Л. Д. КУДРЯВЦЕВ, А. Д. КУТАСОВ,
В. И. ЧЕХЛОВ, М. И. ШАБУНИН

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

## ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л.Д. КУДРЯВЦЕВ, А.Д. КУТАСОВ,
В.И. ЧЕХЛОВ, М.И. ШАБУНИН

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

## ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Под редакцией Л. Д. КУДРЯВЦЕВА*

*Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов
инженерно-технических специальностей вузов*

Санкт-Петербург
1994

ББК 22.161
К88
УДК 517 (075.8)

Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. **Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных:** Учеб. пособие для вузов/Под ред. Л. Д. Кудрявцева. 496 с.

ISBN 5-85366-010-1

При составлении сборника авторы опирались на многолетний опыт работы со студентами Московского физико-технического института. Включены задачи по следующим разделам курса математического анализа: дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; кратные, криволинейные и поверхностные интегралы; векторный анализ, интегралы, зависящие от параметров; элементы функционального анализа. Сборник является продолжением двух уже изданных книг тех же авторов: "Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость" (М.: Наука, 1984) и "Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды." (М.: Наука, 1986).

Задачи снабжены ответами. Приводятся решения типичных задач.

Для студентов и преподавателей университетов и втузов с расширенной программой по математике.

Ил. 34. Библиогр. 21 назв.

*КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич, КУТАСОВ Александр Дмитриевич*
*ЧЕХЛОВ Валерий Иванович, ШАБУНИН Михаил Иванович*

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Функции нескольких переменных

ЛР № 061434 от 15.07.92. Подписано в печать 09.12.94. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 31. Усл. кр.-отт. 31. Уч.-изд. л. 35,95. Тираж 15 000 экз. Заказ 157.

ИЧП «Кристалл». 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 8

Отпечатано с готовых диапозитивов в ордена Трудового Красного Знамени ГП «Техническая книга» Комитета Российской Федерации по печати. 198052, г. Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга является третьей частью сборника задач по курсу математического анализа. В нее вошел материал, соответствующий заключительным разделам курса: функции нескольких переменных; кратные, криволинейные и поверхностные интегралы; векторный анализ; интегралы, зависящие от параметров; элементы функционального анализа.

Первые две части [1], [2] сборника вышли соответственно в 1984 и 1986 годах и, вероятно, известны многим преподавателям и студентам.

При работе над сборником авторы опирались на многолетний опыт преподавания курса математического анализа на кафедре высшей математики Московского физико-технического института.

Как и в первых двух частях, весь материал третьей части сборника разбит на параграфы. Каждый параграф содержит:

1) краткий обзор теоретических сведений, необходимых для решения последующих задач;

2) решения типичных задач;

3) упражнения и задачи, снабженные ответами и предназначенные для самостоятельного решения.

Включение в сборник сравнительно большого числа подробно решенных задач имеет целью показать студенту оптимальные приемы и методы решения и тем самым дать ему возможность часть материала изучить самостоятельно.

Следует отметить, что упражнения и задачи, предназначенные для самостоятельного решения, разнообразны не только по тематике и содержанию, но и по степени трудности — от простых, иллюстрирующих те или иные разделы курса, до довольно сложных, требующих от читателя определенной настойчивости, а иногда и некоторой изобретательности.

Большой набор упражнений и задач и их разнообразие позволят использовать сборник во втузах и университетах с различными программами по математике.

Авторы надеются, что преподаватели найдут в сборнике материал, который смогут использовать на лекциях, семинарских занятиях, консультациях, при составлении заданий для самостоятельной работы студентов, при составлении контрольных работ, на экзаменах.

Авторы благодарны А. Ф. Лапко за помощь в работе над всеми тремя частями сборника.

ГЛАВА I

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Различные типы множеств в $n$-мерном пространстве

**1. Пространства $\mathbb{R}^n$.** Множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы $n$ действительных чисел, обозначают $\mathbb{R}^n$ *). В множестве $\mathbb{R}^n$ можно ввести понятие расстояния между любыми двумя его элементами. *Расстояние* между элементами

$$x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n) \quad \text{и} \quad y=(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n),$$
$$x_i,\ y_i \in \mathbb{R}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

обозначим $\rho(x;\ y)$ и определим формулой

$$\rho(x;\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}. \tag{1}$$

Множество $\mathbb{R}^n$ с введенным в нем расстоянием называют *пространством* $\mathbb{R}^n$, число $n$ — *размерностью* пространства $\mathbb{R}^n$. Элемент $x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ множества $\mathbb{R}^n$ называют *точкой* пространства $\mathbb{R}^n$, число $x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, — *$i$-й координатой* этой точки. Точки $x=(0;\ 0;\ \ldots;\ x_i;\ \ldots;\ 0)$ $n$-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ образуют *$i$-ю координатную ось* пространства. Точку $O=(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ называют *началом координат*.

Для точек $x=(x_1)$ и $y=(y_1)$ одномерного пространства $\mathbb{R}^1$ формула (1) имеет вид

$$\rho(x;\ y)=|x_1-y_1|,$$

поэтому пространство $\mathbb{R}^1$ представляет собой множество действительных чисел, расстояние между которыми измеряется обычным образом, т. е. $\mathbb{R}^1$ — *числовая прямая*. Пространства $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ — это соответственно *плоскость* и обычное *трехмерное пространство*, которые изучаются в элементарной и в аналитической геометрии.

---

*) $\mathbb{R}^1$ — *множество действительных чисел* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — *декартов квадрат множества* $\mathbb{R}$ (см. [1, с. 7]), $\mathbb{R}^n$ — *$n$-я декартова степень множества* $\mathbb{R}$.

Для элементов множества $\mathbb{R}^n$ можно ввести понятия суммы элементов и произведения элемента на действительное число: если

$$x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n),\quad y=(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n),\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

то

$$\begin{gathered} x+y=(x_1+y_1;\ x_2+y_2;\ \ldots;\ x_n+y_n),\\ \lambda x=(\lambda x_1;\ \lambda x_2;\ \ldots;\ \lambda x_n). \end{gathered} \tag{2}$$

Как известно из линейной алгебры, множество $\mathbb{R}^n$, в котором формулами (2) определены сумма и произведение на действительное число, является *линейным векторным пространством*. Точку $x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в этом случае называют *вектором* и обозначают иногда жирным шрифтом $\boldsymbol{x}$, числа $x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, — его *координатами в базисе*

$$\boldsymbol{e}_1=(1;\ 0;\ \ldots;\ 0),\ \ldots,\quad \boldsymbol{e}_n=(0;\ 0;\ \ldots;\ 1).$$

Вектор $(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$ называют *нулевым*.

В линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести скалярное произведение $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, поставив в соответствие каждым двум векторам $\boldsymbol{x}=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ и $\boldsymbol{y}=(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n)$ число

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{3}$$

Линейное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, для векторов которого формулой (3) определено скалярное произведение, называют *n-мерным евклидовым пространством*. Число $\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}$ называют *длиной вектора* $\boldsymbol{x}$ и обозначают $|\boldsymbol{x}|$. Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ называют *ортогональными*, если $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=0$. Если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — ненулевые векторы, то *углом* между ними называют угол $\varphi\in[0;\ \pi]$ такой, что

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}. \tag{4}$$

---

**1.1.** Доказать, что расстояние $\rho(x;\ y)$ между точками пространства $\mathbb{R}^n$, определенное формулой (1), обладает свойствами:

1) $\rho(x;y)\geqslant 0$, причем $\rho(x;y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$;

2) $\rho(x;\ y)=\rho(y;\ x)$ для любых $x,\ y\in\mathbb{R}^n$;

3) $\rho(x;\ z)\leqslant\rho(x;\ y)+\rho(y;\ z)$ для любых $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}^n$ (*неравенство треугольника*).

**1.2.** Доказать, что скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, определенное формулой (3), обладает свойствами ($\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$):

1) $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\geqslant 0$, причем $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — нулевой вектор;

2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;

3) $(\lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$;

4) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

**1.3.** Доказать:

1) Для длины вектора $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ верна формула

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

2) Для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|.$$

**1.4.** Найти $\lambda \in \mathbb{R}$, при котором векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$ ортогональны:

1) $\boldsymbol{a} = (1;\ 2;\ 1;\ 3)$, $\quad \boldsymbol{b} = (4;\ 1;\ 1;\ 1)$.

2) $\boldsymbol{a} = (1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n)$, $\quad \boldsymbol{b} = (n;\ n-1;\ n-2;\ \ldots;\ 1)$, $\quad n > 1$.

---

**2. Различные типы множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$.** Пусть точка $a = (a_1; a_2, \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Множество всех точек $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которых

$$|x_i - a_i| < \delta, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

называют *n-мерным кубом* с ребром $2\delta$ и с центром в точке $a$ или *кубической $\delta$-окрестностью* точки $a$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

*Одномерный куб* — это *интервал* длины $2\delta$ с центром в точке $a$, *двумерный куб* — это *квадрат* со стороной $2\delta$ и с центром в точке $a$.

Пусть точка $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. Множество всех точек $x$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которых $\rho(x;\ a) < \delta$, называют *n-мерным шаром* радиуса $\delta$ с центром в точке $a$ или *$\delta$-окрестностью* точки $a$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ и обозначают $U^n(a;\ \delta)$.

Таким образом,

$$U^n(a;\ \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x;\ a) < \delta\}. \tag{6}$$

*Одномерный шар*

$$U^1(a;\ \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}$$

представляет собой *интервал* длины $2\delta$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}$; *двумерный шар*

$$U^2(a;\ \delta) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \delta\right\}$$

является *кругом* радиуса $\delta$ с центром в точке $a = (a_1;\ a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *ограниченным*, если существует $n$-мерный шар, содержащий это множество.

Пусть каждому натуральному числу $m$ поставлена в соответствие точка $x^{(m)}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Упорядоченное множество точек

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(m)},\ \ldots$$

называют *последовательностью точек пространства* $\mathbb{R}^n$ и обозначают $x^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, или $\{x^{(m)}\}$. Последовательность $\{y^{(k)}\}$ называют *подпоследовательностью* последовательности $\{x^{(m)}\}$, если существует такая строго возрастающая последовательность $m_k \in \mathbb{N}$, что $x^{(m_k)} = y^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называют *ограниченной*, если множество точек $x^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, ограничено.

Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}$, если $\rho(x^{(m)}; a) \to 0$ при $m \to \infty$. В этом случае пишут

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a$$

и говорят, что последовательность $x^{(m)}$ *сходится* к точке $a$. Последовательность, которая сходится к некоторой точке, называют *сходящейся*. Если последовательность не является сходящейся, ее называют *расходящейся*.

Последовательность $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ сходится к точке $a$ тогда и только тогда, когда для любого $\delta > 0$ существует число $m_\delta$ такое, что для всех $m > m_\delta$ верно включение $x^{(m)} \in U^n(a; \delta)$.

Теорема Больцано — Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Последовательность $\{x^{(m)}\}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ называют *стремящейся к бесконечности* и пишут

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty,$$

если $\rho(x^{(m)}; O) \to +\infty$ при $m \to \infty$, где $O$ — начало координат.

Точку множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *внутренней точкой* этого множества в $\mathbb{R}^n$, если в $\mathbb{R}^n$ существует $\delta$-окрестность этой точки, содержащаяся в множестве $E$. Другими словами, если $x$ — внутренняя точка множества $E \subset \mathbb{R}^n$, то существует шар $U^n(x; \delta)$ такой, что $U^n(x; \delta) \subset E$.

Множество, каждая точка которого является его внутренней точкой в $\mathbb{R}^n$, называют *открытым в* $\mathbb{R}^n$ *множеством.*

Пространство $\mathbb{R}^n$ и пустое множество $\varnothing$ являются открытыми множествами.

Любое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество, содержащее некоторую точку, называют *окрестностью* этой точки в пространстве $\mathbb{R}^n$. В частности, всякая $\delta$-окрестность точки является окрестностью этой точки.

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют *точкой прикосновения* множества $E \in \mathbb{R}^n$, если любая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества $E$.

Точку $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ называют *изолированной точкой* множества $E$, если существует окрестность точки $x$, не содержащая никаких других точек множества $E$, кроме самой точки $x$.

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют *предельной точкой* множества $E$, если любая окрестность точки $x$ содержит хотя бы одну точку множества $E$, отличную от точки $x$.

Точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют *граничной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если любая ее окрестность содержит точку, принадлежащую множеству $E$, и точку, не принадлежащую множеству $E$. Множество всех граничных точек множества $E$ называют его *границей* и обозначают $\partial E$.

Пример 1. В пространстве $\mathbb{R}$ дано множество $E = (0; 1] \cup \{2\}$. Указать внутренние точки множества $E$ в пространстве $\mathbb{R}$, а также точки прикосновения, изолированные, предельные и граничные точки множества $E$.

△ Внутренними точками являются все точки интервала $(0; 1)$, точками прикосновения — все точки отрезка $[0; 1]$ и точка $x = 2$. Множество $E$ имеет одну изолированную точку $x = 2$. Предельными точками являются все точки отрезка $[0; 1]$, граничными — точки $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$. ▲

Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Множество всех точек прикосновения множества $E$ называют *замыканием множества* $E$ и обозначают $\bar{E}$.

Множество всех предельных точек множества $E$ называют его *производным множеством* и обозначают $E^{(1)}$. Множество $E$ называют *совершенным*, если $E^{(1)} = E$. Множество всех предельных точек множества $E^{(1)}$ называют *вторым производным множеством* множества $E$ и обозначают $E^{(2)}$. По индукции определяют *производное множество порядка* $n$ и обозначают $E^{(n)}$.

Расстояние $d$ между непустыми множествами $E_1$ и $E_2$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$d = d(E_1;\ E_2) = \inf_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} \rho(x;\ y). \tag{7}$$

В частности, для расстояния $d$ между точкой $x \in \mathbb{R}^n$ и непустым множеством $E \subset \mathbb{R}^n$ получаем

$$d = d(x;\ E) = \inf_{y \in E} \rho(x;\ y). \tag{8}$$

*Диаметром* $D(E)$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называют

$$\sup_{x,\ x' \in E} \rho(x;\ x'). \tag{9}$$

Множество $\Gamma$ точек $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ \ldots, \ x_n = x_n(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \tag{10}$$

где функции $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$, называют *непрерывной кривой* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Уравнения (10) называют *параметрическими уравнениями* кривой Г, аргумент $t$ называют *параметром*.

Если уравнения (10) линейны, т. е.

$$x_1=a_1+b_1t,\quad x_2=a_2+b_2t,\ \ldots,\ x_n=a_n+b_nt, \tag{11}$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2>0$, то Г называют *прямой в пространстве* $\mathbb{R}^n$, если $t\in\mathbb{R}$, и *отрезком в пространстве* $\mathbb{R}^n$, если $t\in[\alpha;\ \beta]$.

Пример 2. Найти расстояние между прямыми $\Gamma_1\subset\mathbb{R}^4$ и $\Gamma_2\subset\mathbb{R}^4$, заданными параметрическими уравнениями

$$x_1=1+2t,\quad x_2=-2t,\quad x_3=2+2t,\quad x_4=2t$$

и

$$x_1=1,\qquad x_2=t,\qquad x_3=1+2t,\quad x_4=t,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Указать точки $x^0\in\Gamma_1$ и $y^0\in\Gamma_2$ такие, что

$$\rho(x^0;\ y^0)=d(\Gamma_1;\ \Gamma_2).$$

$\triangle$ Найдем расстояние между двумя произвольными точками данных прямых:

$$\rho(x;\ y)=\sqrt{4t^2+(2t+\tau)^2+(1+2t-2\tau)^2+(2t-\tau)^2}=$$
$$=\sqrt{16t^2-8t\tau+6\tau^2+4t-4\tau+1}.$$

Преобразовав подкоренное выражение, получим

$$\rho(x;\ y)=\sqrt{\left(4t-\tau+\frac{1}{2}\right)^2+5\tau^2-3\tau+\frac{3}{4}}=$$
$$=\sqrt{\left(4t-\tau+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{5}\tau-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2+\frac{3}{10}}.$$

Следовательно,

$$d(\Gamma_1;\ \Gamma_2)=\inf_{\substack{x\in\Gamma_1\\ y\in\Gamma_2}}\rho(x;\ y)=\sqrt{3/10}.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 4t-\tau+\dfrac{1}{2}=0,\\ \sqrt{5}\tau-\dfrac{3}{2\sqrt{5}}=0,\end{cases}$$

найдем $t=-1/20$, $\tau=3/10$, и, следовательно,

$$x^0=(9/10;\ -1/10;\ 19/10;\ 1/10),\quad y^0=(1;\ 3/10;\ 8/5;\ 3/10).\ \blacktriangle$$

Множество $E\subset\mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству, называют *линейно-связным*. Множество, состоящее из одной точки, также считают линейно-связным.

Множество $E\subset\mathbb{R}^n$ называют *областью* в пространстве $\mathbb{R}^n$, если $E$ — открытое в $\mathbb{R}^n$ линейно-связное множество. Если $E$ — область, то ее замыкание $\bar{E}$ называют *замкнутой областью*.

Множества $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ называют *отделимыми*, если ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *связным*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух отделимых множеств. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$, любые две точки которого можно соединить отрезком, принадлежащим этому множеству, называют *выпуклым*. Множество, содержащее только одну точку, также считают выпуклым. Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих множество $E \subset \mathbb{R}^n$, называют *выпуклой оболочкой* множества $E$.

---

**1.5.** В $n$-мерном евклидовом пространстве дан куб с ребром $a$. Найти: 1) длину $d_n$ диагонали куба; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$; 3) угол $\varphi_n$ между диагональю куба и его $k$-мерной гранью, $k < n$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$; 5) число вершин куба; 6) число диагоналей куба, ортогональных данной диагонали.

**1.6.** Пусть $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Множество всех точек $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, для которых

$$|x_i - a_i| < \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

называют *$n$-мерным прямоугольным параллелепипедом* с ребрами $2\delta_i$ и с центром в точке $a$.

Доказать:

1) Для любого $n$-мерного шара с центром в точке $a$ существует $n$-мерный прямоугольный параллелепипед с центром в точке $a$, содержащийся в шаре, и, наоборот, для любого $n$-мерного прямоугольного параллелепипеда с центром в точке $a$ существует $n$-мерный шар с центром в точке $a$, содержащийся в параллелепипеде.

2) Квадрат диагонали $n$-мерного прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его ребер, выходящих из одной вершины (*обобщение теоремы Пифагора*).

**1.7.** Доказать, что для сходимости последовательности $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}; x_2^{(m)}; \ldots; x_n^{(m)}\right) \in \mathbb{R}^n$ к точке $a = (a_1; a_2; \ldots; a_n) \in \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**1.8.** Найти $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)}$, если

1) $x^{(m)} = \left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m};\ \dfrac{m-1}{m};\ \dfrac{2m^2-1}{m^2};\ \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\right)$.

2) $x^{(m)} = \left(\dfrac{(-1)^m}{m};\ (-1)^m\right)$.

3) $x^{(m)} = \left(\dfrac{\cos\varphi_n}{\varphi_n};\ \dfrac{\sin\varphi_n}{\varphi_n}\right)$, где: а) $\varphi_n$ — бесконечно большая последовательность; б) $\varphi_n$ — бесконечно малая последовательность, $\varphi_n \neq 0$.

4) $x^{(m)} = (r^m \cos m\varphi;\ r^m \sin m\varphi)$, $\quad r,\ \varphi \in \mathbb{R}$.

5) $x^{(m)} = \left(m\left(\sqrt[m]{r}\cos(\varphi/m) - 1\right);\ m\sqrt[m]{r}\sin(\varphi/m)\right)$, $r, \varphi \in \mathbb{R}, r > 0$.

**1.9.** Последовательность $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ называют *фундаментальной*, если она удовлетворяет *условию Коши*: для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N$, что для любого $m \geqslant N$ и любого $k \geqslant N$ верно неравенство $\rho(x^{(m)}; x^{(k)}) < \varepsilon$.

Доказать, что для сходимости последовательности точек пространства $\mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность была фундаментальной.

**1.10.** Доказать, что если последовательность $\{x^{(m)}\}$ точек пространства $\mathbb{R}^n$ стремится к бесконечности, то:

1) $\rho(x^{(m)}; a) \to +\infty$ при $m \to \infty$, где $a$ — любая фиксированная точка пространства $\mathbb{R}^n$;

2) может не существовать координаты $x_i^{(m)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = \infty$.

**1.11.** Доказать, что следующие множества являются открытыми в $\mathbb{R}^n$:

1) произвольный $n$-мерный шар;

2) произвольный $n$-мерный куб;

3) произвольный $n$-мерный прямоугольный параллелепипед (см. задачу **1.6**);

4) внешность $(n-1)$-мерной сферы радиуса $\delta$ с центром в точке $a$, т. е. множество

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x; a) > \delta\}.$$

**1.12.** Является ли открытым в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, множество всех точек круга

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 < \delta^2,\ x_i = 0,\ i = 3, \ldots, n\}?$$

**1.13.** Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — непрерывная функция, $y_0$ — произвольное фиксированное число. Доказать, что множество решений неравенства $f(x) > y_0$ является открытым в $\mathbb{R}$.

**1.14.** Пусть $G_i$, $i \in \mathbb{N}$, — произвольные открытые в $\mathbb{R}^n$ множества. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ множества $\bigcap\limits_{i=1}^{m} G_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ являются открытыми.

**1.15.** Построить последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

**1.16.** Доказать, что для того, чтобы точка $a \in \mathbb{R}^n$ была точкой прикосновения множества $E \subset \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность точек $x^{(m)} \in E$, сходящаяся к $a$.

**1.17.** Найти все точки прикосновения множества

$$E = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \sin(1/x_1)\},\ \text{не принадлежащие } E.$$

**1.18.** Построить множество, все точки которого изолированные, а множество его предельных точек непустое.

**1.19.** Доказать, что множество изолированных точек произвольного множества не более чем счетно.

**1.20.** Верны ли утверждения:

1) Всякая граничная точка множества является его предельной точкой.

2) Любая окрестность граничной точки множества содержит как внутренние точки, так и внешние точки этого множества (*внешними точками* множества называют внутренние точки его дополнения).

**1.21.** Построить множество $E$, удовлетворяющее следующим трем условиям: 1) все точки $E$ изолированные; 2) предельных точек множество $E$ не имеет; 3) $\inf\limits_{x,\, y \in E} \rho(x; y) = 0$.

**1.22.** Доказать, что следующие множества являются замкнутыми:

1) пространство $\mathbb{R}^n$;

2) произвольный $n$-мерный замкнутый шар, т. е. множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\rho(x; a) \leqslant \delta$;

3) произвольная $(n-1)$*-мерная сфера* радиуса $\delta \geqslant 0$ с центром в точке $a$, т. е. множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\rho(x; a) = \delta$.

**1.23.** Даны $n$-мерный куб с ребром $a$ и $n$-мерный замкнутый шар радиуса $a$ (см. задачу **1.22**, 2)). Центр куба совпадает с центром шара. При каких значениях $n$ куб содержится в шаре?

**1.24.** Доказать равносильность следующих определений замкнутого множества: множество называется замкнутым, если оно содержит все свои 1) точки прикосновения, 2) предельные точки, 3) граничные точки.

**1.25.** Доказать, что дополнение замкнутого множества до всего пространства открыто, а дополнение открытого множества замкнуто.

**1.26.** Доказать, что если множество $G \subset \mathbb{R}^n$ открытое, а $F \subset \mathbb{R}^n$ замкнутое, то $G \setminus F$ открытое, а $F \setminus G$ замкнутое.

**1.27.** Пусть $F_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, — произвольные замкнутые множества. Доказать, что множества $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$ являются замкнутыми.

**1.28.** Построить последовательность замкнутых множеств, объединение которых не является замкнутым.

**1.29.** Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, — непрерывная функция, $y_0$ — произвольное фиксированное число. Доказать, что множество решений неравенства $f(x) \geqslant y_0$ является замкнутым.

**1.30.** Пусть $f(x)$, $x \in [0; 1]$, — непрерывная функция и $E_n$ — множество решений неравенства

$$n \leqslant f(x) \leqslant n+1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать, что множество $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{2k-1}$ замкнуто.

**1.31.** Пусть для функции $f(x)$, $x \in [a; b]$, $b > a$, множества точек, в которых $f(x) \geqslant y$ и $f(x) \leqslant y$ при любом $y$ замкнуты. Доказать, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

**1.32.** Доказать, что при отображении, задаваемом непрерывной функцией $f(x)$, $x \in [a; b]$, произвольное замкнутое множество $F \subset [a; b]$ переводится в замкнутое.

**1.33.** В пространстве $\mathbb{R}^n$ дана последовательность концентрических $n$-мерных шаров радиусов

$$\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_k < \ldots$$

Является ли их объединение: 1) открытым множеством; 2) замкнутым множеством?

**1.34.** В пространстве $\mathbb{R}^n$ дана последовательность концентрических $(n-1)$-мерных сфер (см. задачу **1.22**, 3)) радиусов

$$\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_k < \ldots$$

Является ли их объединение замкнутым множеством?

**1.35.** Доказать, что замыкание $\bar{E}$ произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто.

**1.36.** Доказать, что граница $\partial E$ произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.

**1.37.** Привести пример замкнутого множества $F$, не равного замыканию множества внутренних точек $F$.

**1.38.** Привести пример открытого в $\mathbb{R}^2$ множества $G$, не равного множеству внутренних точек его замыкания $\bar{G}$.

**1.39.** Для каких множеств $E \subset \mathbb{R}^n$ (открытых, замкнутых, произвольных) верны следующие утверждения:

1) $E \subset \bar{E}$. 2) $E = \bar{E}$. 3) $\partial E \subset \bar{E}$. 4) $E \cap \partial E = \varnothing$. 5) $\partial(\partial E) = \partial E$. 6) $\partial(\partial E) \subset \partial E$. 7) $\partial(\partial(\partial E)) = \partial(\partial E)$. 8) Если $x^{(m)} \in E$ и $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = a$, то $a \in E$.

**1.40.** Доказать, что для произвольных множеств $E_i \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, верны формулы

$$1)\ \overline{\bigcup_{i=1}^{m} E_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{E}_i. \quad 2)\ \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{E}_i.$$

**1.41.** Построить последовательность множеств, для которых замыкание их объединения не равно объединению замыканий.

**1.42.** Доказать, что множество является совершенным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и не имеет изолированных точек.

**1.43.** Доказать, что производное множество любого множества замкнуто.

**1.44.** Построить множество $E$, для которого производное множество $E^{(1)}$ непустое, а второе производное множество $E^{(2)}$ пустое.

**1.45.** Доказать, что для любого множества $E$ верны включения

$$E^{(1)} \supset E^{(2)} \supset \ldots \supset E^{(k)} \supset \ldots,$$

где $E^{(k)}$ — производное множество порядка $k$.

**1.46.** Пусть $E$ — множество всех точек $x$ поверхности Земли (Земля считается шаром), которые обладают свойством: если из точки $x$ пройти 7 км на север, затем 7 км на запад и, наконец, 7 км на юг, то окажешься снова в точке $x$. Доказать, что множество $E$ не является замкнутым. Найти замыкание $\bar{E}$ и производное множество $E^{(1)}$.

**1.47.** В пространстве $\mathbb{R}$ построим множество $C$ следующим образом. Из отрезка $[0; 1]$ удалим интервал $(1/3; 2/3)$. Каждый из двух оставшихся отрезков разделим на три равные части и удалим средние интервалы $(1/9; 2/9)$ и $(7/9; 8/9)$. Затем каждый из оставшихся четырех интервалов делим на три равные части и средние интервалы удаляем. В результате неограниченного продолжения этого процесса деления оставшихся отрезков на три равные части и удаления средних интервалов получим подмножество $C$ точек отрезка $[0; 1]$, которое называют *канторовым множеством*. Доказать, что:

1) множество $C$ является замкнутым и совершенным;

2) сумма длин интервалов, удаленных при построении множества $C$, равна длине отрезка $[0; 1]$;

3) множество $C$ имеет мощность континуума.

**1.48.** Пусть $C'$ — дополнение канторова множества $C$ (см. задачу **1.47**) до отрезка $[0; 1]$. Доказать, что множество

$$S = ([0; 1] \times [0; 1]) \setminus (C' \times C'),$$

называемое *ковром Серпинского*, совершенно.

**1.49.** Доказать, что множество всех чисел $x \in [0; 1]$, в представлении которых десятичной дробью отсутствуют цифры 4 и 5, является совершенным.

**1.50.** Доказать, что если множества $F_1$ и $F_2$ непустые, замкнутые и хотя бы одно из них ограничено, то существуют такие точки $x \in F_1$ и $y \in F_2$, что

$$d(F_1; F_2) = \rho(x; y).$$

**1.51.** Доказать, что если множества $F_1$ и $F_2$ непустые, замкнутые, непересекающиеся и хотя бы одно из них ограничено, то

$$d(F_1; F_2) > 0.$$

**1.52.** Найти расстояние между непустыми замкнутыми непересекающимися множествами: гиперболой

$$F_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$$

и прямой

$$F_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}.$$

**1.53.** Доказать, что для любого непустого множества $E \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $\varepsilon > 0$ множество всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $d(x; E) < \varepsilon$, является открытым в $\mathbb{R}^n$.

**1.54.** Доказать, что для любых непустых множеств $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ верны равенства

$$d(E_1;\ E_2) = d(E_1;\ \overline{E}_2) = d(\overline{E}_1;\ E_2) = d(\overline{E}_1;\ \overline{E}_2).$$

**1.55.** Найти расстояние от точки $x = (1;\ 1;\ \ldots;\ 1) \in \mathbb{R}^n$ до множества

$$L^k = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i = 0,\ i > k\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

**1.56.** Найти $d(E_1;\ E_2)$, если:

1) $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 = x_1^2\}$, $\qquad E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 = x_1 - 2\}$;

2) $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 + 2\sqrt{3}x_2 = 8\}$;

3) $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2 = x_3\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 = 1,\ x_3 = 0\}$.

**1.57.** Пусть $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + 4x_2^2 = 4\}$ и $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 x_2 = 4\}$. Доказать, что $d(E_1;\ E_2) > 1$.

**1.58.** Найти расстояние между прямыми $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^3$ и $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$, заданными параметрическими уравнениями:

$$x_1 = 3 + t, \quad x_2 = 1 - t, \quad x_3 = 2 + 2t;$$

$$x_1 = -t, \quad x_2 = 2 + 3t, \quad x_3 = 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Указать точки $x \in \Gamma_1$ и $y \in \Gamma_2$ такие, что

$$\rho(x;\ y) = d(\Gamma_1;\ \Gamma_2).$$

**1.59.** Найти расстояние между прямыми $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^n$ и $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$, заданными параметрическими уравнениями:

$$x_1 = t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t, \ \ldots, \ x_n = t;$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = 1 - t, \quad x_3 = 0, \ \ldots, \ x_n = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Указать точки $x \in \Gamma_1$ и $y \in \Gamma_2$ такие, что

$$\rho(x;\ y) = d(\Gamma_1;\ \Gamma_2).$$

**1.60.** Доказать, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ ограничено тогда и только тогда, когда его диаметр удовлетворяет условию $D(E) < < +\infty$.

**1.61.** Найти диаметр множества точек пространства $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию:

1) $4x_1^2 + 3x_2^2 < 2$.

2) $4x_1^2 - 3x_2^2 = 2$.

3) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 1) = 0$.

4) $x_2 = \sin(1/x_1)$, $\quad |x_1| < 2/\pi$.

**1.62.** Найти диаметр множества точек пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих условию:

1) $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 - 1 < 0$.

2) $3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3 + 1 \leqslant 0$.

3) $3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_3-1=0$.

4) $3x_1^2+x_3^2+2x_3-1\leqslant 0$.

**1.63.** Найти диаметр $n$-мерного куба с ребром $a$.

**1.64.** Доказать, что объединение линейно-связных множеств, имеющих общую точку, является линейно-связным множеством.

**1.65.** Доказать, что если множество $E\subset\mathbb{R}$ линейно-связно, то $E$ является промежутком.

**1.66.** Доказать, что если линейно-связное множество пересекается с некоторым множеством и с его дополнением в $\mathbb{R}^n$, то оно пересекается и с границей этого множества.

**1.67.** Построить область, замыкание которой не является линейно-связным множеством.

**1.68.** Доказать, что всякое линейно-связное множество $E\subset\subset\mathbb{R}^n$ является связным.

**1.69.** Построить множество $E\subset\mathbb{R}^2$, являющееся связным, но не линейно-связным.

**1.70.** Доказать, что всякое связное открытое в $\mathbb{R}^n$ множество является линейно-связным.

**1.71.** Доказать, что если $E\subset\mathbb{R}^n$ — связное множество, то его замыкание $\bar{E}$ — тоже связное множество. Привести пример несвязного множества, замыкание которого связно.

**1.72.** Является ли связным множество всех точек плоскости, у которых: 1) хотя бы одна координата рациональна, 2) обе координаты иррациональны?

**1.73.** Выяснить, является ли множество $E$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ а) связным, б) линейно-связным, в) открытым, г) областью:

1) $E=\{x_1^2+x_2^2>1\}$. 2) $E=\{x_1^2+x_2^2=1\}$.

3) $E=\{x_1^2+x_2^2\neq 1\}$. 4) $E=\{x_1^2+x_2^2=0\}$.

5) $E=\{x_1^2+x_2^2<1\}\cup\{(x_1-2)^2+x_2^2<1\}$.

6) $E=\{x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}\cup\{(x_1-2)^2+x_2^2<1\}$.

7) $E=\{x_1^2-x_2^2<1\}$. 8) $E=\{x_1^2-x_2^2=1\}$.

9) $E=\{x_1^2-x_2^2>1\}$.

10) $E=\left\{x_1\in(0;\ 1),\ \left|x_2-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2x_1}\right|<\frac{1}{4}\right\}$.

11) $E=\left\{x_2=\sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\right\}\cup\{x_1=0,\ |x_2|\leqslant 1\}$.

12) $E=\{5x_1^2+12x_1x_2-22x_1-12x_2>19\}$.

**1.74.** Выяснить, является ли множество $E$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ областью:

1) $E=\{x_1^2+x_2^2<1,\ x_3=0\}$. 2) $E=\{x_1^2+2x_2^2+3x_3^2<4\}$.

3) $E=\{x_1^2+x_2^2-x_3^2<1\}$. 4) $E=\{x_1^2+x_2^2+1<x_3^2\}$.

5) $E=\{x_1^2+x_2^2>x_3\}$. 6) $E=\{x_1^2+x_2^2<x_3^2\}$.

7) $E=\{x_1^2-x_2^2<x_3\}$. 8) $E=\{x_1^2+x_2^2<1\}$.

9) $E=\{x_1x_2>1\}$.

10) $E=\{x_2^2-x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3>x_1-x_2\}$.

**1.75.** Доказать, что любые две точки произвольной области можно соединить ломаной линией с конечным числом звеньев, целиком ей принадлежащей.

**1.76.** Выяснить, какие из множеств, заданных в задачах **1.73** и **1.74**, являются выпуклыми.

**1.77.** Найти выпуклую оболочку множества $E$:

1) $E=\{(0;\ 0),(0;\ 1)\}$. 2) $E=\{(0;\ 0),\ (0;\ 1),\ (1;\ 0)\}$.

3) $E=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,x_1^2=x_2^2\}$. 4) $E=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,x_1^2+x_2^2+2x_1+1=0\}$.

5) $E=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,x_1^2+4x_2^2=4\}$. 6) $E=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,x_1^2-4x_2^2=4\}$.

7) $E=\mathbb{R}\cup\{(0;\ 1)\}$. 8) $E=\{x\in\mathbb{R}^3\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2>1\}$.

9) $E$ — множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, состоящее из точек $(0;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $(1;\ 0;\ \ldots;\ 0)$, $(0;\ 1;\ \ldots;\ 0)$, $\ldots$, $(0;\ 0;\ \ldots;\ 1)$.

**1.78.** Доказать, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

**1.79.** *Симплексом* в пространстве $\mathbb{R}^n$ с вершинами в точках $a^i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,\ 2,\ldots,\ n+1$, называют множество точек

$$x=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i a^i,\quad \alpha_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1.$$

Доказать, что симплекс — выпуклое множество.

**1.80.** Доказать, что выпуклая оболочка произвольного открытого в $\mathbb{R}^n$ множества открыта в $\mathbb{R}^n$.

**1.81.** Доказать, что выпуклая оболочка произвольного замкнутого ограниченного множества замкнута.

**1.82.** Построить в пространстве $\mathbb{R}^2$ замкнутое множество, выпуклая оболочка которого не замкнута.

**1.83.** Доказать, что замыкание выпуклой оболочки произвольного ограниченного множества совпадает с выпуклой оболочкой его замыкания.

---

## § 2. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Отображения

**1. Функции $n$ переменных.** Пусть дано множество $E\subset\mathbb{R}^n$, и пусть каждой точке $x\in E$ поставлено в соответствие число $u\in\mathbb{R}$; тогда говорят, что на множестве $E$ определена числовая функция.

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторой буквой, например $f$, и пишут

$$u=f(x),\quad x\in E,$$

или, подробнее,

$$u=f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n),\quad (x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)\in E.$$

Множество $E$ называют *областью определения* функции. Точку $x$ — *аргументом* или *независимой переменной*, ее координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *независимыми переменными*, функцию $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ — *функцией n переменных*. Если $n > 1$, то функцию называют также *функцией нескольких переменных*. Число $u_0$, соответствующее значению аргумента $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ называют *значением функции в точке* $x^0$ и обозначают $f(x^0)$ или $f(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$.

Функцию $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и композиций элементарных функций одного переменного (см. [1], § 7, п. 2) от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называют *элементарной функцией n* переменных.

Под *функцией, заданной формулой*, понимают функцию, областью определения которой являются все значения аргумента, для которых эта формула имеет смысл и результатом каждой операции, указанной в формуле, является действительное число.

Независимые переменные функции двух переменных обычно обозначают буквами $x$ и $y$, а трех переменных — $x$, $y$ и $z$.

*Графиком* функции двух переменных

$$u = f(x; y), \quad (x; y) \in E \subset \mathbb{R}^2$$

называют множество всех точек $(x; y; f(x; y))$, $(x; y) \in E$, пространства $\mathbb{R}^3$.

Например, из курса аналитической геометрии известно, что графиком функции $u = 4x^2 + y^2$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, является эллиптический параболоид.

Аналогично можно определить понятие графика функции трех и более переменных.

Если область определения функции двух переменных $u = f(x; y)$ состоит только из тех точек, координаты которых являются натуральными числами $x = m$, $y = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, то функцию $u$ называют *двойной последовательностью*. Значение функции в точке $(m; n)$ называют членом последовательности и обозначают $u_{m,n}$, а саму последовательность — $\{u_{m,n}\}$.

*Уровнем* (*c-уровнем*, $c \in \mathbb{R}$) функции $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, называют множество точек $x \in E$, удовлетворяющих уравнению $f(x) = c$. Уровни функции двух переменных часто называют *линиями уровня*, уровни функции трех переменных — *поверхностями уровня*.

Пример 1. Найти область определения и $c$-уровни функции, заданной формулой

$$u = \sqrt{\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}.$$

△ Функция определена в тех и только в тех точках $(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \geqslant 0.$$

Это неравенство равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x^2+y^2>1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y \leqslant 0, \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$$

Первой системе неравенств удовлетворяют координаты всех точек, расположенных в полуплоскости $y \geqslant 0$ и вне окружности радиуса 1 с центром в начале координат. Второй системе удовлетворяют все точки плоскости, лежащие в полуплоскости $y \leqslant 0$ и внутри окружности радиуса 1 с центром в начале координат. На рис. 1 область определения функции показана штриховкой.

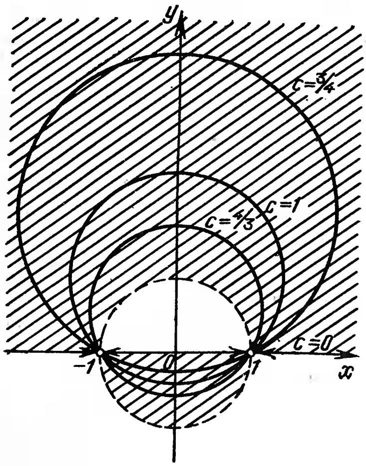

Рис. 1

Для нахождения $c$-уровня функции нужно для любого $c \in \mathbb{R}$ найти множество точек плоскости, координаты $x$, $y$ которых удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{\frac{2y}{x^2+y^2-1}} = c.$$

Если $c<0$, то $c$-уровнем функции является пустое множество; 0-уровнем функции будет, очевидно, множество всех точек оси $x$, за исключением двух точек $(\pm 1; 0)$, не входящих в область определения функции. В случае $c>0$, преобразуя исходное уравнение, получаем

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1} = c^2, \quad x^2+y^2-\frac{2}{c^2}y = 1,$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{c^2}\right)^2 = 1+\frac{1}{c^4}.$$

Следовательно, $c$-уровнем функции при $c>0$ является окружность радиуса $\sqrt{1+\frac{1}{c^4}}$ с центром в точке $(0; 1/c^2)$, за исключением двух точек $(\pm 1;\ 0)$ этой окружности, не принадлежащих области определения функции. На рис. 1 построены $c$-уровни функции при $c=0$, 3/4, 1, 4/3. ▲

Функцию $f(x)$, определенную в области $G \subset \mathbb{R}^n$, называют *однородной степени* $\alpha$ в области $G$, если для любых $x \in G$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таких, что $\lambda x \in G$, верно равенство

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x). \tag{1}$$

Если при тех же предположениях имеет место равенство

$$f(\lambda x) = |\lambda|^\alpha f(x), \tag{2}$$

то функцию называют *положительно однородной степени* $\alpha$.

Например, функция $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, является однородной степени 1; функция $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$, — положительно однородной степени 1; функция, заданная формулой $f(x;y)=y/x$, — однородной и положительно однородной степени 0.

Функцию называют *локально однородной степени* $\alpha$ в области $G$, если она является однородной функцией степени $\alpha$ в некоторой окрестности каждой точки области $G$. Из локальной однородности функции в области не следует ее однородность в этой области (см. 2.36).

---

**2.1.** Найти функцию $s=f(x;\ y)$, если $s$ — площадь ромба, $x$ — его периметр, $y$ — сумма длин его диагоналей. Вычислить $f(1;\ 2)$.

**2.2.** Найти функцию $v=f(x;\ y)$, если $v$ — объем прямого кругового конуса, $x$ — длина его образующей, а $y$: 1) высота конуса; 2) длина окружности основания.

**2.3.** Найти функцию $v=f(x;\ y)$, если $v$ — объем прямого кругового конуса, $x$ — величина угла между образующей и плоскостью основания конуса, $y$ — площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию и проходящей через центр вписанного в конус шара.

**2.4.** Найти функцию $s=f(x;\ y;\ z)$, если $s$ — площадь равнобочной трапеции, $x$, $y$ — длины оснований, $z$ — длина боковой стороны трапеции. Вычислить: а) $f(2;\ 1;\ 2)$; б) $f(1;\ 4;\ 1)$.

**2.5.** Найти функцию $s=f(x;\ y;\ z)$, если $s$ — площадь треугольника, $x$, $y$, $z$ — длины его сторон.

**2.6.** Найти функцию $Q=f(x;\ y;\ z)$, если $Q$ — площадь боковой поверхности правильной шестиугольной усеченной пирамиды, $x$, $y$ — стороны оснований, а $z$ — высота пирамиды.

**2.7.** Найти функцию $v=f(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4)$, если $v$ — объем тетраэдра, а $x_i$, $i=1, 2, 3, 4$, — площади его граней, причем двугранные углы, прилегающие к грани с площадью $x_1$, равны между собой. Вычислить $f(1;\ 1;\ 1;\ 1)$.

**2.8.** Найти области определения функций двух переменных, заданных формулами:

1) $u=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$. 2) $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$. 4) $u=\ln(x^2+y^2-1)$.

5) $u=\ln(y^2-4x+8)$. 6) $u=\ln(x^2+4y^2-2x-3)$.

7) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-16(y^2+1)}}$. 8) $u=\ln\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$.

9) $u=\sqrt{1-|x|-|y|}$. 10) $u=\dfrac{1}{5x^2-4xy+2y^2+2x-2y+3}$.

11) $u=\dfrac{\ln x\ln y}{\sqrt{1-x-y}}$. 12) $u=\sqrt{4x^2-x^3-4x}$.

13) $u=\sqrt{\log_a(2-x^2-y^2)}$.

14) $u=\sqrt{(x^2+y^2-a)(2a-x^2-y^2)}$.

15) $u=\ln(3x+y-3)+\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{3x-2y+6}}$.

16) $u=\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{x+y-3}+\sqrt{42-6x-7y}$.

17) $u=\sqrt{y\sin x}$. 18) $u=\ln x-\ln\sin y$.

19) $u=\ln\sin\pi(x^2+y^2)$. 20) $u=\sqrt{x}\ln\operatorname{tg}(\pi y/x)$.

21) $u=\arccos y$. 22) $u=\arccos(x+y)$.

23) $u=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$. 24) $u=x^y$.

**2.9.** Является ли множество, на котором определена функция $u=u(x;\ y)$: а) замкнутым, б) открытым, в) линейно-связным, г) областью, д) замкнутой областью, е) выпуклым? Функция $u(x;\ y)$ задана формулой:

1) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$. 2) $u=\sqrt{x\sin y}$.

3) $u=\ln(1-2x-x^2-y^2)+\ln(1+2x-x^2-y^2)$.

4) $u=\arcsin(y/x)$. 5) $u=\sqrt{xy}+\arcsin x$.

6) $u=\arccos(x/y^2)$. 7) $u=\arccos(2y+2yx^2-1)$.

**2.10.** Найти множество значений функций, заданных формулами:

1) $u=x^2-2xy+y^2+2x-2y-3$.

2) $u=\sqrt{2+x+y-x^2-2xy-y^2}$.

3) $u=\ln(4x^2+2y^2-4xy+12x-12y+21)$.

4) $u=\log_y x+\log_x y$. 5) $u=e^{2xy}-e^{xy}+2$.

6) $u=3\sin(y/x)+8\sin^2(y/2x)$.

7) $u=3\sin(x-y)+6\sin(x+y)+4\cos(x-y)+8\cos(x+y)$.

8) $u=\arccos\dfrac{1+x^2y^2}{2xy}$.

**2.11.** Найти множество значений функций $u=f(x;\ y)$, $(x;\ y)\in E$:

1) $u=x-2y-3$, $E=\{(x;\ y)\mid x+y=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

2) $u=x^2-xy+y^2$, $E=\{(x;\ y)\mid |x|+|y|=1\}$.

3) $u=x^2+y^2-12x+16y+25$, $E=\{(x;\ y)\mid x^2+y^2=25\}$.

4) $u=\ln(2x^2+3y^2)$, $E=\{(x;\ y)\mid x+y=2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

5) $u=\sqrt[4]{x^4+y^4}$, $E=\{(x;\ y)\mid x+y=2\}$.

**2.12.** Найти области определения функций трех переменных, заданных формулами:

1) $u=\ln(1-x-y-z)$.
2) $u=\sqrt{1-|x|-|y|-|z|}$.
3) $u=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$.
4) $u=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.
5) $u=\sqrt{16-x^2-z^2}$.
6) $u=\sqrt{(9-y^2-z^2)(y^2+z^2-4)}$.
7) $u=\ln(36-36x^2-9y^2-4z^2)$.
8) $u=\frac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.
9) $u=\ln(2z^2-6x^2-3y^2-6)$.
10) $u=\sqrt{x^2+2y^2+2yz+z^2-2y+1}$.
11) $u=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}\ln(x^2+y^2+z^2-4)$.
12) $u=\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)-(x^2+y^2+z^2)^2-1}$.
13) $u=\frac{\ln x+\ln z}{\sqrt{y-1}}+\ln(5-x-y-z)$.
14) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{1-x-y}+\sqrt{3x+y-3z}$.
15) $u=\frac{\ln(z^2-x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.
16) $u=\frac{\ln(x^2+y^2+z^2-4)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.
17) $u=\frac{\ln(4z-z^2-x^2-y^2)}{\sqrt{4-z-x^2-y^2}}$.
18) $u=\sqrt{z-xy}+\sqrt{1-z-\sqrt{x^2+y^2}}$.
19) $u=\arccos(2-x^2-y^2-z^2)$.
20) $u=\arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-1}$.
21) $u=\arccos(x^2+y^2+z^2-3)+\arccos\sqrt{x^2+y^2-3}$.

**2.13.** Доказать, что областью определения функции, заданной формулой

$$u=\arcsin x\arcsin(2x+y)\arcsin(3x+2y+z),$$

является замкнутый параллелепипед, и найти его вершины.

**2.14.** Является ли множество, на котором определена функция $u(x;y;z)$: а) замкнутым, б) открытым, в) линейно-связным, г) областью, д) замкнутой областью, е) выпуклым? Функция $u$ задана формулой:

1) $u=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
2) $u=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.
3) $u=\ln(xyz)$.
4) $u=\sqrt{z^2-x^2-y^2}$.
5) $u=\sqrt{z^2-x^2-y^2-1}$.
6) $u=\ln(z^2-x^2-y^2+1)$.
7) $u=\ln(y\ln(z-y))$.
8) $u=\arccos\frac{x^2+y^2}{z^2}$.
9) $u=(xy)^z$.
10) $u=z^{xy}$.

**2.15.** Найти множество значений функций, заданных формулами:

1) $u = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz - 20z.$

2) $u = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz.$

3) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 5} + \sqrt{2x^2 + z^2 + 4x + 11}.$

4) $u = \sqrt{4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4z + 5}.$

5) $u = 3\ln(|x| + |y| + |z|) - \ln|xyz|.$

**2.16.** Найти множество значений функций $u = f(x; y; z)$, $(x; y; z) \in E$:

1) $u = x^2 + y^2 + z^2, \quad E = \{(x; y; z) \mid x + y + z = 6\}.$

2) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3}, \quad E = \{(x; y; z) \mid x + y - z = 1\}.$

3) $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2yz}, \; E = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 100\}.$

4) $u = \operatorname{arctg}\sqrt{xy} - \dfrac{1}{2}\ln(1 + xz), \; E = \{(x; y; z) \mid x = y = z\}.$

**2.17.** Найти область определения и множество значений функций четырех переменных, заданных формулами:

1) $u = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 1}.$

2) $u = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{4 - x_2^2} + \sqrt{9 - x_3^2} + \sqrt{16 - x_4^2}.$

3) $u = \sqrt{7 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 2x_3 - 2x_4}.$

4) $u = \ln\left(144\left(1 - x_1^2\right) - 36x_2^2 - 16x_3^2 - 9x_4^2\right).$

**2.18.** Найти область определения функций $n$ переменных, заданных формулами:

1) $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 - |x_i|}.$

2) $u = \sqrt{1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}.$

3) $u = \ln\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - i)^2\right).$

4) $u = \ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\limits_{i<j=1}^{n} x_i x_j\right).$

5) $u = \sqrt{\log_a\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)}.$

6) $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \arcsin(x_i - i).$

**2.19.** Найти $c$-уровень функции двух переменных:

1) $u = y - x.$

2) $u = \sqrt{y - x}.$

3) $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2}.$

4) $u = \ln(1 - x^2 - y^2).$

5) $u = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}.$

6) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

7) $u=\sqrt{x}/y$. 8) $u=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$.

9) $u=\dfrac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}$. 10) $u=\ln\sqrt{\dfrac{(x-1)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2}}$.

11) $u=x^y$. 12) $u=e^{2x/(x^2+y^2)}$.

13) $u=\sqrt{y-\sin x}$. 14) $u=\ln x-\ln\sin y$.

15) $u=\arcsin(y/x)$. 16) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}$.

17) $u=\sqrt{1-2|x|-|y|}$. 18) $u=|x|+|y|-|x+y|$.

19) $u=\min(x, y)$. 20) $u=\max(|x|, |y|)$.

21) $u=\min(x^2, y)$. 22) $u=\sqrt{\operatorname{sign}(\sin x\sin y)}$.

**2.20.** Найти $c$-уровень функции трех переменных:

1) $u=x+2y+3z$. 2) $u=e^{x+2y+3z}$.

3) $u=x^2+y^2+4z^2$. 4) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+2x}$.

5) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$. 6) $u=x^2+y^2-z^2$.

7) $u=\ln(z^2-x^2-y^2)$. 8) $u=(x-y)^2+z^2$.

9) $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}$. 10) $u=\dfrac{z}{x+y+z-1}$.

11) $u=\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}$. 12) $u=\dfrac{2z}{x^2+y^2}$.

13) $u=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

14) $u=\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)-(3+x^4+y^4+z^4)}$.

15) $u=\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$.

16) $u=\ln(1-|x|-|y|-|z|)$.

17) $u=\sqrt{\operatorname{sign}\sin(x^2+y^2+z^2)}$. 18) $u=\arcsin\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z^2}}$.

**2.21.** Найти $c$-уровень функции $n$ переменных:

1) $u=\dfrac{x_1}{1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$. 2) $u=\sqrt{n^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.

3) $u=\dfrac{x_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$. 4) $u=\dfrac{(x_1-1)^2+\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2}{(x_1+1)^2+\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2}$.

**2.22.** Выяснить, верны ли равенства:

1) $f(x;\ y;\ z)=f(y;\ x;\ z)$, 2) $f(x;\ y;\ z)=f(z;\ x;\ y)$,

если

$$f(x;\ y;\ z)=xe^{y-z}+ye^{z-x}+ze^{x-y}.$$

**2.23.** Найти $f(x;\ y)$, если:

1) $f(x+y;\ x-y)=y(x+y)$. 2) $f(xy;\ y/x)=x^2-y^2$.

**2.24.** Найти $f(x;\ y)=\sqrt{y}+\varphi(\sqrt{x}-1)$, если $f(x;\ 1)=x$.

**2.25.** Найти $f(x;\ y)=x\varphi(y/x)$, если $f(1;\ y)=\sqrt{1+y^2}$.

**2.26.** Найти $f(x;\ y)=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\ \psi(y/x)$, если $f(1;\ y)=1$, $f(x;\ x)=x$.

**2.27.** Найти $f(x;\ y)=\varphi(xy)+\psi(y/x)$, если $f(x;\ 1)=\sin(\pi x/2)$, $f(x;\ x)=1$.

**2.28.** Найти $f(x;\ y)=\varphi(x+2\sqrt{y})+\psi(x-2\sqrt{y})$, $x\geqslant 0$, если $f(x;\ 0)=\sin x$, $f(x;\ x^2/4)=\cos x-1$.

**2.29.** Найти $f(x;\ y)=\varphi(x)+\psi(y+e^x)$, если $f(0;\ y)=y^2$, $f(x;\ -e^x)=x^2+1$.

**2.30.** Найти $u=f\left(\dfrac{x}{z};\ \dfrac{y}{z}-x\right)$, если $u=x$ при $y=x$.

**2.31.** Найти $u=f(x^2z;\ 2y^2z-z^4)$, если $u=z^3/x^2$ при $y=x$, $x>0$, $z>0$.

**2.32.** Найти $u=f\left(\dfrac{x}{z};\ \dfrac{x}{y}-x^3y\right)$, если $u=x^3z$ при $y=x$, $y>0$.

**2.33.** Найти $u=f\left(\dfrac{z-x}{xz};\ \dfrac{z^2}{e^y}-z\right)$, если $u=\left(1-\dfrac{z}{x}\right)^2$ при $y=\ln x$, $z>0$.

**2.34.** Найти степень однородности или положительной однородности функций, заданных формулами:

1) $u=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $x>0$. 2) $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

3) $u=x^{\sqrt{2}}\sin\dfrac{y}{x}+y^{\sqrt{2}}\cos\dfrac{x}{y}$.

4) $u=\sqrt[6]{x^6z^2+2x^3y^4z+xy^2z^5}$.

5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-t^2}$. 6) $u=\dfrac{xy+zt}{xyz+yzt}$.

7) $u=\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$. 8) $u=\dfrac{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}x_ix_j}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.

9) $u=\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^{\pi}(\ln x_{i+1}-\ln x_i)$. 10) $u=\left|\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\right|^{\gamma}$, $\gamma\in\mathbb{R}$.

**2.35.** Доказать, что всякая однородная степени $\alpha$ функция $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $x_n \neq 0$, представима в виде

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = x_n^{\alpha} F\left(\frac{x_1}{x_n}; \frac{x_2}{x_n}; \ldots; \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

**2.36.** 1) Пусть $G$ — область, состоящая из всех точек плоскости, за исключением луча $x = 2$, $y \geqslant 0$. Доказать, что функция

$$u = \begin{cases} y^4/x, & \text{если } x > 2, \ y > 0, \\ y^3 & \text{в остальных точках области } G \end{cases}$$

является локально однородной, но не однородной в области $G$.

2) Доказать, что в выпуклой области всякая локально однородная функция является однородной.

---

**2. Предел функции.** Первое определение предела функции (определение Гейне). Пусть область определения функции $f(x)$ содержит окрестность $U^n(x^0)$ точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, кроме, быть может, самой точки $x^0$.

Число $a$ называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x^0$, если для любой последовательности точек $x^{(m)} \in U^n(x^0)$, $x^{(m)} \neq x^0$, сходящейся к $x^0$, числовая последовательность $f(x^{(m)})$ сходится к $a$.

Для того чтобы доказать, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке $x^0$, достаточно указать две последовательности точек $x^{(m)} \in U^n(x^0)$ и $y^{(m)} \in U^n(x^0)$, $x^{(m)} \neq x^0$, $y^{(m)} \neq x^0$, сходящиеся к $x^0$, такие, что $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) \neq \lim\limits_{m\to\infty} f(y^{(m)})$.

Второе определение предела функции (определение Коши). Число $a$ называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x^0 \in \mathbb{R}^n$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x; x^0) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Определения Коши и Гейне равносильны.

Если число $a$ является пределом функции $f(x)$ в точке $x^0$, то пишут

$$\lim_{x\to x^0} f(x) = a \quad \text{или} \quad \lim_{\rho(x;\, x^0)\to 0} f(x) = a. \tag{3}$$

Понятие предела функции в точке обобщается на тот случай, когда функция рассматривается не на всей окрестности точки, а только на некотором ее подмножестве.

Определение Гейне. Число $a$ называют *пределом функции* $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, *по множеству* $X \subset E$ *в точке* $x^0$, являющейся предельной точкой множества $X$, если для любой последовательности точек $x^{(m)} \in X$, $x^{(m)} \neq x^0$, сходящейся к $x^0$, числовая последовательность $f(x^{(m)})$ сходится к $a$.

Для того чтобы доказать, что функция $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, не имеет предела по множеству $X$ в точке $x^0$, достаточно указать две последовательности $x^{(m)} \in X$ и $y^{(m)} \in X$, $x^{(m)} \neq x^0$, $y^{(m)} \neq x^0$, сходящиеся к точке $x^0$, такие, что

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) \neq \lim_{m \to \infty} f(y^{(m)}).$$

Определение Коши. Число $a$ называют *пределом функции* $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, *по множеству* $X \subset E$ *в точке* $x^0$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x; x^0) < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \varepsilon.$$

Если число $a$ является пределом функции $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, по множеству $X \subset E$ в точке $x^0$, то пишут

$$\lim_{\substack{x \to x^0 \\ x \in X}} f(x) = a. \tag{4}$$

В тех случаях, когда из контекста бывает ясно, по какому множеству берется предел, указание $x \in X$ часто опускают и пишут просто

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = a.$$

Если множество $X$ содержит окрестность точки $x^0$, кроме, быть может, самой точки $x^0$, то предел функции $f(x)$ по множеству $X$ в точке $x^0$ совпадает с обычным пределом функции $f(x)$ в этой точке.

Если множество $X$ состоит из точек некоторой непрерывной кривой $\Gamma$ (§ 1, (10)), проходящей через точку $x^0$, то $\lim\limits_{\substack{x \to x^0 \\ x \in X}} f(x)$ называют *пределом функции* $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, *по кривой* $\Gamma$ *в точке* $x^0$.

Предел функции $u = f(x; y)$ двух переменных в точке $(x_0; y_0)$ обычно обозначают

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u.$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

$\triangle$ Для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (а именно $\delta = \varepsilon$) такое, что для всех точек $(x; y)$, удовлетворяющих условию $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ и отличных от начала координат, справедливо неравенство

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Найти предел функции

$$f(x;\ y) = y\cos\frac{1}{y-x}$$

в точке (0; 0) по множеству, на котором функция определена.

$\triangle$ Заметим, что функция не определена в точках прямой $y=x$. Поэтому обычного предела в точке (0; 0) не существует. В то же время предел по множеству $E=\{(x;\ y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$, на котором функция определена, существует и равен нулю, что следует из неравенства

$$\left| y\cos\frac{1}{y-x}\right| \leqslant |y|,$$

справедливого для всех точек $(x;\ y)\in E$. $\blacktriangle$

Пример 4. Найти предел функции $f(x;\ y)=\dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$ в точке (0; 0) по прямой $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$; доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$ не существует.

$\triangle$ Функция определена во всех точках плоскости, кроме точки (0; 0). Так как

$$f(\alpha t;\ \beta t) = \frac{\alpha^2\beta t}{\beta^2+\alpha^4 t^2} \to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0$$

(если $\beta=0$, то $f(\alpha t;\ 0)=0$), то предел функции в точке (0; 0) по каждой прямой, проходящей через начало координат, равен нулю.

Чтобы доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{y^2+x^4}$ не существует, достаточно указать кривую, проходящую через начало координат, по которой предел функции в точке (0; 0) не равен нулю. Такой кривой является, например, парабола $y=x^2$. В самом деле, $f(x;\ x^2)=1/2$, и, следовательно, предел функции в точке (0; 0) по параболе $y=x^2$ равен 1/2. $\blacktriangle$

Аналогично случаю функций одного переменного (см. [1], § 9, п. 3, 4) для функций нескольких переменных $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n>1$, вводятся понятия предела функции при $x\to\infty$ и бесконечного предела.

Для функций нескольких переменных справедливы теоремы о пределе суммы (разности), произведения и частного функций, аналогичные соответствующим теоремам для функций одного переменного (см. [1], § 9, п. 2).

Для функций $n>1$ переменных можно рассматривать $n!$ так называемых повторных пределов.

В частности, в случае функции двух переменных $u=f(x;\ y)$ можно рассматривать два повторных предела в точке $(x_0;\ y_0)$:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x;\ y)\right) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x;\ y)\right).$$

Например, для функции $u=\dfrac{x-y}{x+y}$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=1 \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=-1.$$

Отсюда следует, что изменять порядок следования предельных переходов по разным переменным, вообще говоря, нельзя.

Связь предела функции в точке с ее повторными пределами в той же точке иллюстрируют задачи **2.37—2.39**.

---

В задачах **2.37—2.48** $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ понимается как предел по множеству, на котором определена функция $u=f(x)$.

**2.37.** Найти

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} u$, б) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} u$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u$,

если:

1) $u=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$.
2) $u=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
3) $u=\dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$.
4) $u=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$.
5) $u=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.
6) $u=\dfrac{x^8+x^5+x^4+y^4+y^5-y^8}{x^4+y^4}$.
7) $u=x+y\sin\dfrac{1}{x}$.
8) $u=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$.
9) $u=\dfrac{y}{x}\operatorname{tg}\dfrac{x}{x+y}$.
10) $u=\log_{1+x}(1+x+y)$.

**2.38.** Построить функцию $u=f(x;\ y)$, определенную на всей плоскости, для которой:

1) $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;\ y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;\ y)=0,$$

а $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\ y)$ не существует.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\ y)=0$, а повторные пределы

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x;\ y) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x;\ y)$$

не существуют.

**2.39.** Пусть функция $f$ определена на множестве $E$, содержащем окрестность точки $(x_0;\ y_0)$: $|x-x_0|<\delta_1$, $|y-y_0|<\delta_2$, кроме, быть может, точек прямых $x=x_0$ и $y=y_0$. Доказать, что если $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f=A$ и при любом $y\in(y_0-\delta_2;\ y_0+\delta_2)$, $y\neq y_0$, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f$, то $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f=A$.

**2.40.** Найти

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} u$, б) $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} u$, в) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} u$,

если:

1) $u=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^3}$. 2) $u=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^4}$.

3) $u=\sin\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2}$. 4) $u=(x^2+y^2)^{\alpha}e^{-x^2-y^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

**2.41.** Дана функция $u=\dfrac{x^y}{1+x^y}$.

1) Найти:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+0} u$. б) $\lim\limits_{y\to+0}\lim\limits_{x\to+\infty} u$.

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to-0} u$. г) $\lim\limits_{y\to-0}\lim\limits_{x\to+\infty} u$.

2) Доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to 0}} u$ не существует.

**2.42.** Пусть $u_{m,n}(x)=\cos^m(\pi n!x)$, $m$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$. Определить, при каких значениях $x$ верно равенство

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} u_{m,n}(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} u_{m,n}(x).$$

**2.43.** Найти предел функции $u=f(x;\ y)$ в точке $(0;\ 0)$ по прямой $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$; доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\ y)$ не существует:

1) $u=\dfrac{y-2x^2}{y-x^2}$. 2) $u=\dfrac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^4+y^2}$.

**2.44.** Найти предел функции $u=\dfrac{xyz}{x^4+y^4+z^2}$ в точке $(0;\ 0;\ 0)$ по прямой $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $z=\gamma t$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$; доказать, что предел функции $u$ в точке $(0;\ 0;\ 0)$ не существует.

**2.45.** Найти предел функции $u=x^2e^{y-x^2}$ по лучу

$$x=t\cos\varphi,\quad y=t\sin\varphi,\quad \varphi\in[0;\ 2\pi),\quad t\to+\infty;$$

доказать, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f(x;\ y)$ не существует.

**2.46.** Найти предел функции $u=f(x;\ y)$ по лучу

$$x=t\cos\varphi,\quad y=t\sin\varphi,\quad \varphi\in[0;\ 2\pi),\quad t\to+\infty:$$

1) $u=e^{xy^2/(x^2+y^2)}$. 2) $u=\ln|x+y|\,e^{x+y}$.

3) $u=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$. 4) $u=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln\left(\dfrac{1}{x}+e^{1/y}\right)$.

**2.47.** Найти предел функции $u=\begin{cases} \dfrac{ye^{-1/x^2}}{y^2+e^{-2/x^2}}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases}$

в точке $(0;0)$ по кривой

$$x=\alpha t^m,\quad y=\beta t^n,\quad \alpha^2+\beta^2\neq 0,\quad m,\ n\in\mathbb{N},\quad t>0;$$

доказать, что предел функции $u$ в точке $(0;0)$ не существует.

**2.48.** Найти в точке $(0;0)$ предел функции $u=f(x;y)$:

1) $u=\dfrac{xy}{1-\sqrt[3]{1+xy}}$.

2) $u=\dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y+9}-3}$.

3) $u=\dfrac{\sin(y-x^2)}{y-x^2}$.

4) $u=\dfrac{xy^2(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

5) $u=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos(x^2+y^2)}}{\operatorname{tg}^2(x^2+y^2)}$.

6) $u=\dfrac{1-\sqrt[3]{\sin^4 x+\cos^4 y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

7) $u=\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)$.

8) $u=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

9) $u=(1+xy^2)^{1/(x^2+y^2)}$.

10) $u=(1+xy)^{1/(x^2+y^2)}$.

11) $u=(1+xy)^{1/(|x|+|y|)}$.

12) $u=\left(\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-1/(x^2+y^2)}$.

**2.49.** Найти:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+2x-2xy-4y}$.

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(1+x)^{1/(x+x^2y)}$.

4) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} xy\sin\dfrac{\pi}{xy}$.

5) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+6}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt[6]{x^4+y^4+2(1+x^2y^2)}-\sqrt{x^2+y^2}}$.

6) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\left(\sqrt{4(x^4+y^4)+13(x^2+y^2)+8x^2y^2-7}-2(x^2+y^2)\right)$.

**2.50.** Найти функции $f_i(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n>1$, $i=1,2,\ldots,n$, для каждой из которых при $x\to\infty$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела, а $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f_i^2(x)=+\infty$.

---

**3. Непрерывность и равномерная непрерывность.** Функцию $f(x)$, определенную в окрестности точки $x^0\in\mathbb{R}^n$, называют *непрерывной в точке* $x^0$, если

$$\lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0).$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x^0 \in \mathbb{R}^n$, то функции $cf(x)$, $c$ — постоянная, $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а если $g(x^0)\neq 0$, то и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в точке $x^0$.

Функцию $f(x)$ называют *непрерывной в области* $G \subset \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке области $G$.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$, кроме, быть может, самой точки $x^0$. Точку $x^0$ называют *точкой разрыва* функции $f(x)$ в следующих случаях:

1) функция $f(x)$ не определена в точке $x^0$,
2) функция $f(x)$ определена в точке $x^0$, но

   а) $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ не существует,

   б) $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ существует, но не равен $f(x^0)$.

Если $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$ существует, но или $f(x)$ не определена в точке $x^0$, или $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)\neq f(x^0)$, то точку $x^0$ называют точкой *устранимого разрыва*.

Понятие непрерывности функции в точке обобщается на тот случай, когда функция рассматривается не на всей окрестности точки, а только на некотором ее подмножестве.

Функцию $f(x)$, определенную на множестве $E\subset\mathbb{R}^n$, называют *непрерывной по множеству* $X\subset E$ *в точке* $x^0\in E$, если

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in X}} f(x)=f(x^0). \tag{5}$$

В случае, когда $X=E$, говорят о *непрерывности в точке по множеству* (*области*) *определения функции*.

Например, функция двух переменных

$$f(x;\ y)=\begin{cases} y\sin(1/x), & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

не является непрерывной в точке $(0;\ 0)$, так как не определена в ее окрестности, но она является в этой точке непрерывной по множеству определения функции.

*Непрерывной по множеству* $E$ *в точке* $x^0$ считается функция $f(x)$, $x\in E\subset\mathbb{R}^n$, если $x^0$ — изолированная точка множества $E$.

Всякая элементарная функция $n$ переменных (см. п. 1) непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Функцию $f(x)$, $x\in E\subset\mathbb{R}^n$, называют *непрерывной на множестве* $X\subset E$, если она непрерывна по множеству $X$ в каждой его точке.

Функцию $f(x)$, $x\in E\subset\mathbb{R}^n$, называют *равномерно непрерывной на множестве* $X\subset E$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для любых $x,\ x'\in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x;\ x')<\delta$, верно неравенство

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Теорема Кантора. Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на этом множестве.

Пусть $\delta$ — произвольное положительное число. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, на множестве $X \subset E$ называют

$$\omega(\delta;\ f;\ X) = \sup_{\substack{\rho(x;\ x') < \delta \\ x,\ x' \in X}} (f(x) - f(x')).$$

В тех случаях, когда ясно, о каком множестве $X$ и о какой функции $f$ идет речь, модуль непрерывности $\omega(\delta;\ f;\ X)$ обозначают $\omega(\delta)$.

Значение модуля непрерывности $\omega(\delta;\ f;\ X)$ функции $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, при $\delta = D$, где $D$ — диаметр множества $X \subset E$, называют *колебанием* функции $f$ на множестве $X$ и обозначают $\omega(f;\ X)$. Из этого определения следует, что

$$\omega(f;\ X) = \sup_{x,\ x' \in X} (f(x) - f(x')). \qquad (7)$$

---

**2.51.** Выяснить, является ли функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0;\ 0)$: 1) непрерывной по $x$; 2) непрерывной по $y$; 3) непрерывной.

**2.52.** Найти значение $a$, при котором функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ a, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0;\ 0)$ является: 1) непрерывной по $x$; 2) непрерывной по $y$; 3) непрерывной по кривой $y = \alpha\sqrt{x}$, $\alpha \neq 0$; 4) непрерывной.

**2.53.** Найти значение $a$, при котором функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ a, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0;\ 0)$ является: 1) непрерывной по прямой $x = \alpha t$, $y = \beta t$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; 2) непрерывной.

**2.54.** Найти значение $a$, при котором функция

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{y^2 + x^4}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ a, & \text{если} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

в точке $(0;\ 0)$ является: 1) непрерывной по прямой $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$; 2) непрерывной по кривой $y=\alpha x^2$; 3) непрерывной.

**2.55.** Является ли функция

$$u=\frac{x+y^2}{x-y^2}$$

непрерывной на своей области определения?

**2.56.** Найти значение $a$, при котором функция

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}e^{-1/|x+y|}, & \text{если } x+y\neq 0,\\ a, & \text{если } x+y=0,\end{cases}$$

является непрерывной в $\mathbb{R}^2$.

**2.57.** Найти значения $a$ и $b$, при которых функция

$$u=\begin{cases} a, & \text{если } x^2+y^2\leqslant 4,\\ \sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2-4}, & \text{если } 4<x^2+y^2\leqslant 9,\\ b, & \text{если } x^2+y^2>9,\end{cases}$$

непрерывна в $\mathbb{R}^2$.

**2.58.** Найти значения $a$ и $b$, при которых функция

$$u=\begin{cases} a, & \text{если } x^2+y^2=0,\\ \sqrt{5(x^2+y^2)-4-(x^2+y^2)^2}, & \text{если } 1\leqslant x^2+y^2<4,\\ b, & \text{если } x^2+y^2\geqslant 4,\end{cases}$$

является непрерывной на своей области определения.

**2.59.** Найти значения $a$ и $b$, при которых функция

$$u=\begin{cases} a, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=0,\\ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\ln\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)}, & \text{если } 0<\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2<1,\\ b, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant 1,\end{cases}$$

непрерывна в $\mathbb{R}^n$.

**2.60.** Доказать, что: 1) функции

$$f_i(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)=x_i,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

непрерывны в пространстве $\mathbb{R}^n$; 2) если $g(x)$, $x\in\mathbb{R}$, непрерывна, то функции

$$f_i(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)=g(x_i),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

непрерывны в пространстве $\mathbb{R}^n$; 3) функция

$$f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$; 4) функция

$$f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)=\max_k|x_k|$$

непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$.

**2.61.** Доказать, что функция

$$f(x)=\rho(x;\ E),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

где $E\subset\mathbb{R}^n$ — произвольное непустое множество, непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$.

**2.62.** Найти все точки разрыва, указать точки устранимого разрыва функции двух переменных:

1) $u=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. 2) $u=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

3) $u=\dfrac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$.

4) $u=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если}\ \ x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\ \ x^2+y^2=0.\end{cases}$

5) $u=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x+y}, & \text{если}\ \ x+y\neq 0,\\ 3, & \text{если}\ \ x+y=0.\end{cases}$

6) $u=\dfrac{1}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

7) $u=\begin{cases}x\sin(1/y), & \text{если}\ \ y\neq 0,\\ 0, & \text{если}\ \ y=0.\end{cases}$

8) $u=\dfrac{\sin^2 x\sin y}{\sin^4 x+\sin^2 y}$. 9) $u=x\sin\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

10) $u=\begin{cases}(x^2+y^2-1)\sin\dfrac{1}{1-x^2-y^2}, & \text{если}\ \ x^2+y^2\neq 1,\\ 0, & \text{если}\ \ x^2+y^2=1.\end{cases}$

11) $u=\begin{cases}e^{-1/|x-y|}, & \text{если}\ \ y\neq x,\\ x^2-5x+6, & \text{если}\ \ y=x.\end{cases}$

12) $u=\dfrac{1}{\ln|1-x^2-4y^2|}$. 13) $u=\operatorname{sign}(1-|x|-2|y|)$.

14) $u=\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]$. 15) $u=[y/x]$.

Здесь $[t]$ — целая часть числа $t$.

16) $u=\begin{cases}x^2+y^2, & \text{если}\ \ x^2+y^2\ \text{— рациональное число},\\ 0, & \text{если}\ \ x^2+y^2\ \text{— иррациональное число}.\end{cases}$

**2.63.** Найти все точки разрыва функции трех переменных:

1) $u=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{y^2+z^2}, & \text{если } y^2+z^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } y^2+z^2=0.\end{cases}$

2) $u=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+z^2}, & \text{если } x^2+z^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+z^2=0.\end{cases}$

3) $u=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-2x+2z-14}$.

4) $u=\dfrac{1}{x^2+z^2+2(y^2-yz-y+1)}$.

5) $u=\sin(x/yz)$. 6) $u=x/\sin(yz)$.

7) $u=\begin{cases} \dfrac{\sin(xyz)}{z}, & \text{если } z\neq 0,\\ x^2, & \text{если } z=0.\end{cases}$

8) $u=\begin{cases} \arccos\dfrac{x^2}{x^2+z^2}, & \text{если } x^2+z^2\neq 0,\\ \pi/2, & \text{если } x^2+z^2=0.\end{cases}$

9) $u=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-2z}\,e^{-1/z^2}, & \text{если } \begin{cases} z\neq 0,\\ x^2+y^2+z^2\neq 2z,\end{cases}\\ 0, & \text{если } z=0 \text{ или } x^2+y^2+z^2= \\ & =2z.\end{cases}$

10) $u=\dfrac{1}{\ln|x^2+y^2-z^2|}$.

**2.64.** Найти область определения функции двух переменных

$$u=\arccos\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

и выяснить, является ли эта функция непрерывной на своей области определения.

**2.65.** Выяснить, является ли функция

$$u=\begin{cases} 2\,\mathrm{arctg}\,(1/(x^2-y^2)), & \text{если } x+y\neq 0,\\ \pi, & \text{если } x+y=0,\end{cases}$$

непрерывной на своей области определения.

**2.66.** Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x^0\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$ и $f(x^0)>c$, то существует окрестность точки $x^0$, для всех точек которой верно неравенство $f(x)>c$.

**2.67.** Доказать, что $c$-уровень непрерывной в $\mathbb{R}^n$ функции есть замкнутое множество.

**2.68.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $c\in\mathbb{R}$. Доказать, что множество точек $x$, для которых $f(x)<c$,

открыто в $\mathbb{R}^n$, а множество точек $x$, для которых $f(x) \leqslant c$, замкнуто.

**2.69.** Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, функция $f(x)$ непрерывна на $F$ и $c \in \mathbb{R}$. Доказать, что множество точек $x \in F$, для которых $f(x) \geqslant c$, замкнуто.

**2.70.** Доказать, что если функция $f(x;\ y)$ в некоторой области $G$ непрерывна по $x$ и равномерно относительно $x$ непрерывна по $y$, то $f(x;\ y)$ непрерывна в $G$.

**2.71.** Доказать, что если функция $f(x;\ y)$ в области $G$ непрерывна по $x$, а по $y$ удовлетворяет *условию Липшица*, т. е.

$$|f(x;\ y') - f(x;\ y'')| \leqslant L|y' - y''|, \quad L - \text{const},$$

то $f(x;\ y)$ непрерывна в $G$.

**2.72.** Доказать, что если функция $f(x;\ y)$, $(x;\ y) \in E$, непрерывна по $x$, а по $y$ непрерывна и монотонна, то $f(x;\ y)$, $(x;\ y) \in E$, непрерывна.

**2.73.** Пусть функции

$$u_1 = f_1(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n),\ \ldots,\ u_m = f_m(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n), \quad m \leqslant n,$$

непрерывны в точке $(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$, а функция $F(u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_m)$ непрерывна в точке

$$\left(f_1(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0);\ \ldots;\ f_m(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)\right).$$

Доказать, что композиция

$$u = F(f_1(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n);\ \ldots;\ f_m(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n))$$

непрерывна в точке $(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$.

**2.74.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на линейно-связном множестве $E$ (§ 1, п. 2), и пусть $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A < B$, $a$, $b \in E$. Доказать, что для любого числа $C \in [A;\ B]$ существует точка $c \in E$ такая, что $f(c) = C$.

**2.75.** Дана функция

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_n^2, \quad 1 \leqslant k < n.$$

Доказать, что на сфере

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

существует такая точка $c$, что $f(c) = 1/\pi$.

**2.76.** Пусть функция $f$ непрерывна и принимает как положительные, так и отрицательные значения на открытом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Является ли множество точек $x \in E$, в которых $f(x) \neq 0$: 1) открытым в $\mathbb{R}^n$ множеством; 2) областью?

**2.77.** Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x;\ y)$ на множестве $X$:

1) $f = 2x + 3y + 4, \quad X = \mathbb{R}^2$.

2) $f = \ln(x^2 + y^2), \quad X = \{x^2 + y^2 \geqslant 1\}$.

3) $f = \sin\dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}, \quad X = \{x^2 + y^2 < 1\}$.

4) $f = \arcsin(y/x), \quad X = \{|y| < x\}$.

**2.78.** Доказать, что если функция $f$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{\delta \to +0} \dfrac{\omega(\delta; f; G)}{\delta} = 0$, то $f$ — постоянная функция.

**2.79.** Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, на множестве $X \subset E$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega(\delta; f; X) = 0$.

**2.80.** Найти модуль непрерывности и исследовать на равномерную непрерывность функцию $f$ на ее области определения:

1) $f = ax + by + c$. 2) $f = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) $f = \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 4) $f = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

**2.81.** Найти колебание функции $f$ на множестве $X$:

1) $f = x + 2y + 3$, $X = \{|x| + |y| < 1\}$.

2) $f = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1$, $X = \{x^2 + y^2 = 1\}$.

3) $f = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, а) $X = \mathbb{R}^2$, б) $X = \{x^2 + y^2 > 2\}$.

4) $f = \dfrac{1}{x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 2}$, $X = \mathbb{R}^2$.

5) $f = x + |x - y|$, $X = \{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 2\}$.

6) $f = (x + y) e^{xy}$, $X = \{0 < x + y \leqslant 1\}$.

7) $f = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{9 - z^2}$, $X$ — область определения функции.

8) $f = \sqrt{144(1 - x_1^2) - 36x_2^2 - 16x_3^2 - 9x_4^2}$, $X$ — область определения функции.

**2.82.** Доказать, что если функция $f$ непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^n$, то при любом не отрицательно $\varepsilon$ множество $E = \{x \in \mathbb{R}^n | \omega(f; \mathbb{R}^n) \geqslant \varepsilon\}$ замкнуто.

---

**4. Отображения.** Пусть дано множество $E \subset \mathbb{R}^n$, и пусть каждой точке $x \in E$ поставлена в соответствие точка $u \in \mathbb{R}^m$; тогда говорят, что на множестве $E$ определено *отображение* или *функция* со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Правило, устанавливающее соответствие, обозначают некоторой буквой, например $f$, и пишут

$$f\colon E \mapsto \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{или} \quad u = f(x),\ x \in E \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

В частном случае $m = 1$, т. е. когда $u \in \mathbb{R}$, отображение $f$ представляет собой числовую функцию $n$ переменных. В общем случае задание отображения

$$u = f(x), \quad x \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \tag{9}$$

равносильно заданию $m$ функций $n$ переменных

$$u_i = f_i(x_1; x_2; \ldots; x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Функции (10) называют *координатными функциями* отображения $f$ и пишут $f=f(f_1;\ f_2;\ \ldots;\ f_m)$. Если при отображении $f$ точке $x\in\mathbb{R}^n$ ставится в соответствие точка $u\in\mathbb{R}^m$, то точку $u$ называют *образом точки* $x$ при отображении $f$ или *значением функции* $f$ *в точке* $x$. Множество всех образов при отображении $f(x)$, $x\in E$, называют *образом множества* $E$ и обозначают $f(E)$. Если точка $u\in\mathbb{R}^m$ является значением функции $f$, то множество всех точек $x\in E\subset\mathbb{R}^n$ таких, что $f(x)=u$, называют прообразом точки $u$ и обозначают $f^{-1}(u)$. Через $f^{-1}(U)$ обозначают объединение множеств всех прообразов точек множества $U\subset f(E)$.

Отображение $f(x)$, $x\in E\subset\mathbb{R}^n$, называют *непрерывным в точке* $x^{(0)}\in E$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех точек $x\in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x;\ x^{(0)})<\delta$, верно неравенство $\rho(f(x);\ f(x^{(0)}))<\varepsilon$.

Отображение $f(x)$, $x\in E\subset\mathbb{R}^n$, называют *непрерывным на множестве* $X\subset E$, если оно непрерывно в каждой точке множества $X$.

Отображение $f(x)$, $x\in E\subset\mathbb{R}^n$, называют *равномерно непрерывным на множестве* $X\subset E$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что для любых $x$, $x'\in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x;\ x')<\delta$, верно неравенство

$$\rho(f(x);\ f(x'))<\varepsilon. \tag{11}$$

Отображение $f$: $E\mapsto\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$, называют *взаимно однозначным*, если разным точкам множества $E$ соответствуют при этом отображении разные точки пространства $\mathbb{R}^m$, т. е. если из равенства $f(x)=f(x')$ для $x$, $x'\in E$ следует равенство $x=x'$. В этом случае говорят, что *множество* $E$ *взаимно однозначно отображается на множество* $f(E)$. Если $E$ взаимно однозначно отображается на $f(E)$, то на множестве $f(E)$ существует однозначное отображение (*обратная функция*) $f^{-1}$: $f(E)\mapsto E$, при котором каждой точке $u\in f(E)$ ставится в соответствие точка $x\in E$ такая, что $f(x)=u$.

Если отображение $f$: $E\mapsto\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$, взаимно однозначно и непрерывно на множестве $E$, а обратное отображение $f^{-1}$ непрерывно на множестве $f(E)$, то $f$ называют *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом*.

Если для множеств $E\subset\mathbb{R}^n$ и $E_1\subset\mathbb{R}^m$ существует гомеоморфизм, отображающий $E$ на $E_1$, то множества $E$ и $E_1$ называют *гомеоморфными*.

---

**2.83.** Найти образ окружности $x^2+y^2=1$ при отображении:

1) $u=2x$, $v=3y$. 2) $u=ax+a_0$, $v=by+b_0$.

**2.84.** Найти образ прямой $x=a$ при отображении

1) $u=y$, $v=xy$. 2) $u=x\cos y$, $v=x\sin y$.

**2.85.** Найти образ квадрата $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ при отображении $u=x-xy$, $v=xy$.

**2.86.** Найти образ области $G \subset \mathbb{R}^2$, заданной неравенствами: $xy < 2$, $xy > 1$, $y < x + 1$, $y > x - 1$, при отображении $u = xy$, $v = x - y$.

**2.87.** 1) Найти образ окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при отображении

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Доказать, что образом каждой прямой и каждой окружности при этом отображении является либо окружность, либо прямая.

2) Найти образ окружности $x^2 + y^2 = 4$ при отображении

$$u = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x+1)^2 + y^2}, \quad v = \frac{2y}{(x+1)^2 + y^2}.$$

**2.88.** Найти образы: 1) прямой $x = a$, 2) прямой $y = b$, 3) области $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$, при отображении

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

**2.89.** Найти образы: 1) окружностей а) $x^2 + y^2 = 1$, б) $x^2 + y^2 = 1/4$, в) $x^2 + y^2 = 4$; 2) кривой $y = |x|$, $y \neq 0$, при отображении

$$u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right), \quad v = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

**2.90.** Найти образы: 1) прямой $x = a$, 2) отрезка $x = a$, $|y| \leqslant \pi$, 3) прямой $y = b$, $|b| < \pi/2$, 4) прямой $y = ax + b$, $a \neq 0$, при отображении

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

**2.91.** Найти образы: 1) прямой $x = a$, 2) прямой $y = b$, 3) полуполосы $0 < x < \pi$, $y > 0$, 4) полосы $0 < x < \pi$, при отображении

$$u = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v = \sin x \operatorname{sh} y.$$

**2.92.** Найти образ пространства $\mathbb{R}$ при отображении:

1) $u = \sin x$, $v = \cos 2x$.

2) $u = ax + a_0$, $v = bx + b_0$, $w = cx + c_0$.

**2.93.** Найти образ пространства $\mathbb{R}^2$ при отображении:

1) $u = y + 2$, $v = 3x + 4y + 5$, $w = 6x + 7y + 8$.

2) $u = \cos x \cos y$, $v = \cos x \sin y$, $w = \sin x$.

3) $u = (2 + \cos y) \cos x$, $v = (2 + \cos y) \sin x$, $w = \sin y$.

**2.94.** Найти образ прямой $x=a$ при отображении

$$u=x\cos y,\quad v=x\sin y,\quad w=y.$$

**2.95.** Найти образ пространства $\mathbb{R}^2$ при отображении

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+1},\quad v=\frac{y}{x^2+y^2+1},\quad w=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}.$$

Доказать, что при этом отображении образом каждой окружности является окружность.

**2.96.** Найти образ куба $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$ при отображении

$$u=x(1-y),\quad v=xy(1-z),\quad w=xyz.$$

**2.97.** Доказать, что отображение $f\colon E\longmapsto\mathbb{R}^m$, $E\subset\mathbb{R}^n$, непрерывно в точке $x^{(0)}\in E$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $U(u^{(0)})$ точки $u^{(0)}=f(x^{(0)})$ существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что $f(U(x^{(0)}))\subset U(u^{(0)})$.

**2.98.** Доказать, что отображение $f=(f_1;\ f_2;\ \ldots;\ f_m)\colon E\longmapsto\mathbb{R}^m$ непрерывно в точке $x=(x_1;x_2;\ \ldots;\ x_n)\in E\subset\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все координатные функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

**2.99.** Пусть $f$ — отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$. Доказать, что для непрерывности отображения $f$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

1) Прообраз каждого замкнутого множества есть замкнутое множество.

2) Прообраз каждого открытого в $\mathbb{R}^m$ множества есть множество, открытое в $\mathbb{R}^n$.

**2.100.** Доказать, что если при отображении $f$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ прообраз каждого открытого шара является открытым в $\mathbb{R}^n$ множеством, то отображение $f$ непрерывно.

**2.101.** Доказать, что если отображение $f$ непрерывно на ограниченном замкнутом множестве, то оно равномерно непрерывно на этом множестве.

**2.102.** Пусть отображение $f$ — проектирование точек плоскости $(x;\ y)$ на прямую $y=0$. Доказать, что:

1) $f$ равномерно непрерывно на любом плоском множестве $E$;

2) если $E$ — открытое множество, то $f(E)$ — открытое на прямой $y=0$ множество;

3) если $E$ — замкнутое множество, то $f(E)$ не обязательно замкнуто.

**2.103.** Доказать, что при непрерывном отображении:

1) образ каждого ограниченного замкнутого множества ограничен и замкнут;

2) образ каждого связного множества есть связное множество;

3) образ каждого линейно-связного множества есть множество линейно-связное.

**2.104.** Пусть $f$ — отображение множества $E\subset\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$, $X\subset E$, $U\subset f(E)$. Верны ли равенства:

1) $f^{-1}(f(X))=X$; 2) $f(f^{-1}(U))=U$?

**2.105.** Доказать, что если $f$ — взаимно однозначное отображение множества $E$ на множество $f(E)$, то для любой последовательности множеств $X_k\subset E$, $k\in\mathbb{N}$, верны равенства:

$$1)\ f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f(X_k).\quad 2)\ f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}X_k\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}f(X_k).$$

Верны ли эти равенства, если $f$ не является взаимно однозначным отображением?

**2.106.** Пусть $f$ — взаимно однозначное непрерывное отображение множества $E\subset\mathbb{R}^n$ на множество $U\subset\mathbb{R}^m$. Верны ли следующие утверждения:

1) если $E$ не имеет изолированных точек, то и $U$ не имеет изолированных точек;

2) если $U$ не имеет изолированных точек, то и $E$ не имеет изолированных точек?

**2.107.** Построить взаимно однозначное непрерывное отображение $f$, для которого обратное отображение не является непрерывным.

**2.108.** Доказать, что если $f$ — взаимно однозначное непрерывное отображение ограниченного замкнутого множества $F\subset\mathbb{R}^n$ на множество $U\subset\mathbb{R}^m$, то обратное отображение $f^{-1}$ непрерывно на $U$, т. е. $f$ является гомеоморфизмом.

**2.109.** Доказать, что $(n-1)$-мерная сфера $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ с выброшенной точкой гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^{n-1}$.

**2.110.** Построить отображение отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ на квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$.

**2.111.** Построить непрерывное отображение отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ на квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ (*кривая Пеано*).

**2.112.** Доказать, что не существует взаимно однозначного непрерывного отображения отрезка $0\leqslant x\leqslant 1$ на квадрат $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, т. е. что отрезок и квадрат не гомеоморфны.

---

## § 3. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных. Дифференцируемые отображения

**1. Производные и дифференциал первого порядка.** Пусть функция $f(x;\ y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$. Если существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;\ y_0)-f(x_0;\ y_0)}{\Delta x}\quad\text{и}\quad\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0)}{\Delta y},\qquad(1)$$

то их называют *частными производными функции* $f$ *в точке* $(x_0;\ y_0)$ соответственно по переменным $x$ и $y$ и обозначают

$$\frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial y};\qquad f'_x(x_0;\ y_0),\quad f'_y(x_0;\ y_0)$$

или просто

$$f_x(x_0;\ y_0),\quad f_y(x_0;\ y_0).$$

Если частные производные функции $f$ существуют в каждой точке множества $E\subset\mathbb{R}^2$, то говорят, что функция $f$ имеет *частные производные на множестве* $E$.

Аналогично определяют и обозначают частные производные функций трех и более переменных.

Например, если существует конечный

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1;\ \ldots;\ x_k+\Delta x_k;\ \ldots;\ x_n)-f(x_1;\ \ldots;\ x_k;\ \ldots;\ x_n)}{\Delta x_k},$$

то его называют *частной производной функции* $f$ *в точке* $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ *по переменной* $x_k$ и обозначают

$$\frac{\partial f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)}{\partial x_k}\quad\text{или}\quad f'_{x_k}(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n).$$

Производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, называют *производными первого порядка.*

Для вычисления частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ обычно пользуются известными формулами и правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все переменные, кроме переменной $x_k$, фиксированными (постоянными).

Пример 1. Найти частные производные функции

$$f(x;\ y)=x+y^2+\ln(x+y^2).$$

△ Функция определена в области $y^2>-x$. Фиксируя переменную $y$, находим

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1+\frac{1}{x+y^2},\quad y^2>-x.$$

Фиксируя переменную $x$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y+\frac{2y}{x+y^2},\quad y^2>-x.\ ▲$$

Функцию $f(x;\ y)$ называют *дифференцируемой в точке* $(x_0;\ y_0)$, если существуют числа $A$ и $B$ такие, что приращение

$$\Delta f(x_0;\ y_0)=f(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)-f(x_0;\ y_0)$$

функции $f$ в точке $(x_0;\ y_0)$ представимо в виде

$$\Delta f(x_0;\ y_0)=A\,\Delta x+B\,\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),\quad (\Delta x;\ \Delta y)\to(0;\ 0).\quad (2)$$

Если функция $f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x_0;\ y_0)$, то в формуле (2) линейную относительно приращений $\Delta x$ и $\Delta y$ функцию

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y$$

называют *дифференциалом* (точнее, *первым дифференциалом*) функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначают $df(x_0;\ y_0)$.

Таким образом, если верно равенство (2), то

$$df(x_0;\ y_0) = A\,\Delta x + B\,\Delta y. \tag{3}$$

*Дифференциалом независимой переменной $x$ или $y$* называют ее приращение, т. е. по определению полагают $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Если функция $f$ дифференцируема в каждой точке множества $E \subset \mathbb{R}^2$, то ее называют *дифференцируемой на множестве* $E$. Аналогично определяются понятия дифференцируемости и дифференциала для функций трех и более переменных.

Теорема 1. Если функция $f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $(x_0;\ y_0)$ и

$$df(x_0;\ y_0) = A\,dx + B\,dy$$

ее дифференциал в этой точке, то в точке $(x_0;\ y_0)$ существуют частные производные функции $f$, причем

$$\frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial y} = B.$$

Таким образом, в каждой точке, где справедливо равенство (2), дифференциал функции $f$ может быть вычислен по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy. \tag{4}$$

Формула (4) обобщается на случай дифференцируемой функции $n$ переменных $f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ следующим образом:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \tag{5}$$

Теорема 2. Для дифференцируемости функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, в некоторой точке достаточно, чтобы частные производные функции $f$ были непрерывны в этой точке.

Функцию, частные производные которой непрерывны на некотором множестве, называют *непрерывно дифференцируемой* на этом множестве.

Пример 2. Доказать, что функция

$$f(x;\ y) = x + y^2 + \ln(x + y^2)$$

дифференцируема в точке $(0;\ 1)$, и найти $df(0;\ 1)$.

△ В примере 1 найдены частные производные данной функции. В точке $(0;\ 1)$ обе частные производные непрерывны. Следовательно, функция $f$ дифференцируема в точке $(0;\ 1)$, и ее дифференциал в этой точке можно вычислить, применив формулу (4). Так как

$$\frac{\partial f(0;\ 1)}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial f(0;\ 1)}{\partial y}=4,$$

то

$$df(0;\ 1)=2dx+4dy. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Исследовать функцию $f$ на дифференцируемость в точке $(0;\ 0)$:

1) $f(x;\ y)=\sqrt[3]{xy}$. 2) $f(x;\ y)=\cos\sqrt[3]{xy}$.

Если $f$ дифференцируема, найти $df(0;\ 0)$.

$\triangle$ 1) Найдем приращение функции $f$ в точке $(0;\ 0)$:

$$\Delta f(0;\ 0)=f(\Delta x;\ \Delta y)-f(0;\ 0)=\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}$$

и вычислим частные производные в точке $(0;\ 0)$. Так как $f(x;\ 0)=0$ и $f(0;\ y)=0$, то $\dfrac{\partial f(0;\ 0)}{\partial x}=0$ и $\dfrac{\partial f(0;\ 0)}{\partial y}=0$. Предположим, что функция $f$ дифференцируема в точке $(0;\ 0)$, тогда справедлива формула (2), которая в данном случае имеет вид

$$\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),\quad (\Delta x;\ \Delta y)\to(0;\ 0),$$

но эта формула неверна, так как

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq 0.$$

В самом деле, при $\Delta y=\Delta x\to 0$ получаем

$$\frac{\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{|\Delta x|\sqrt{2}}\to+\infty.$$

Следовательно, данная функция в точке $(0;\ 0)$ не дифференцируема.

2) Найдем приращение функции в точке $(0;\ 0)$:

$$\Delta f(0;\ 0)=f(\Delta x;\ \Delta y)-f(0;\ 0)=\cos\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}-1.$$

Вычислим частные производные в точке $(0;\ 0)$. Так как $f(x;\ 0)=1$ и $f(0;\ y)=1$, то

$$\frac{\partial f(0;\ 0)}{\partial x}=0\quad\text{и}\quad\frac{\partial f(0;\ 0)}{\partial y}=0.$$

Для дифференцируемости функции нужно доказать, что

$$\Delta f(0;\ 0)=\cos\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}-1=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),\quad (\Delta x;\ \Delta y)\to(0;\ 0).$$

Так как $|\sin t|\leqslant t$, то $|\cos t-1|=2\sin^2(t/2)\leqslant t^2/2$, и поэтому

$$|\Delta f(0;\ 0)|=\left|\cos\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}-1\right|\leqslant\left(\sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y}\right)^2/2.$$

Используя неравенства $|\Delta x| \leqslant \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $|\Delta y| \leqslant \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, получаем

$$|\Delta f(0;\ 0)| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta x|^{2/3}|\Delta y|^{2/3} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^{4/3},$$

откуда следует, что $\Delta f(0;\ 0)=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$ при $(\Delta x;\ \Delta y)\to \to(0;\ 0)$, т. е. формула (2) верна.

Таким образом, данная функция в точке $(0;\ 0)$ дифференцируема, причем $df(0;\ 0)=0$. ▲

**2. Частные производные сложной функции.**

Теорема 3. Пусть функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$ определены в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$, а функция $f(u;\ v)$ определена в некоторой окрестности точки $(u_0;\ v_0)= =(u(x_0;\ y_0);\ v(x_0;\ y_0))$. Если функция $f(u;\ v)$ дифференцируема в точке $(u_0;\ v_0)$ и если в точке $(x_0;\ y_0)$ существуют производные

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y},$$

то в точке $(x_0;\ y_0)$ существуют частные производные сложной функции $f(u(x;\ y);\ v(x;\ y))$, причем

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\tag{6}$$

Аналогичные формулы при соответствующих предположениях справедливы для частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ сложной функции $f(u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n)$, где $u_k$ — функции переменных $x_i$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\tag{7}$$

Пример 4. Пусть $f(u;\ v)$ — дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция, $u=xy$, $v=x^2-y^2$. Выразить $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ через $\frac{\partial f}{\partial u}$ и $\frac{\partial f}{\partial v}$.

△ По формулам (6) находим

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-2y\frac{\partial f}{\partial v}.\ ▲$$

**3. Свойства дифференциала.**

1°. Для любых дифференцируемых функций $u(x)$, $v(x)$, $x\in \in\mathbb{R}^n$, справедливы равенства

$$d(\alpha u+\beta v)=\alpha\,du+\beta\,dv,\tag{8}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — постоянные,

$$d(uv)=v\,du+u\,dv,\tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2},\quad v\neq 0.\tag{10}$$

2°. Формулы (4) и (5) справедливы не только тогда, когда $x$ и $y$ — независимые переменные, но и тогда, когда $x$ и $y$ являются дифференцируемыми функциями каких-либо переменных (*свойство инвариантности формы первого дифференциала*).

Пример 5. Найти дифференциал функции

$$f = 1 + \frac{z}{x^2+y^2}.$$

△ Используя формулы (8)—(10), получаем

$$df = d\left(1 + \frac{z}{x^2+y^2}\right) = d\frac{z}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)\,dz - z\,d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= -\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}dy + \frac{1}{x^2+y^2}dz. \blacktriangle$$

Пример 6. Пусть $f(u;\ v)$ — дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция, $u = x/y$, $v = y/z$. Найти $df$, если $f'_u$ и $f'_v$ известны.

△ Используя формулы (4) и (8)—(10), получаем

$$df = f'_u\,du + f'_v\,dv =$$

$$= f'_u d\left(\frac{x}{y}\right) + f'_v d\left(\frac{y}{z}\right) = f'_u\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + f'_v\frac{z\,dy - y\,dz}{z^2} =$$

$$= \frac{1}{y}f'_u\,dx + \left(\frac{1}{z}f'_v - \frac{x}{y^2}f'_u\right)dy - \frac{y}{z^2}f'_v\,dz. \blacktriangle$$

**4. Производная по направлению и градиент.** Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задан единичный вектор

$$\boldsymbol{l} = (\cos\alpha_1;\ \cos\alpha_2;\ \ldots;\ \cos\alpha_n), \quad \sum_{k=1}^{n}\cos^2\alpha_k = 1.$$

*Производной функции $f$ в точке $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ по направлению вектора $\boldsymbol{l}$* называют предел

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_1 + t\cos\alpha_1;\ \ldots;\ x_n + t\cos\alpha_n) - f(x_1;\ \ldots;\ x_n)}{t}.$$

Производную функции $f$ по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ обозначают $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

Производную по единичному вектору $\boldsymbol{l}$ называют также *производной по направлению* (направлению вектора $\boldsymbol{l}$).

*Градиентом* дифференцируемой функции $f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ называют вектор

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1};\ \frac{\partial f}{\partial x_2};\ \ldots;\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Этот вектор обозначают $\operatorname{grad} f$.

---

**3.1.** Найти частные производные первого порядка функции $f(x;\ y)$:

1) $f = x^3 + y^3 - 3xy$. 2) $f = \dfrac{x(x-y)}{y^2}$.

3) $f = \sin x - x^2 y$. 4) $f = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}$.

5) $f = e^x(\cos y + x\sin y)$. 6) $f = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

7) $f = \arcsin\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$. 8) $f = (1+\sin^2 x)^{\ln y}$

**3.2.** Вычислить частные производные первого порядка функции $f$ в данной точке:

1) $f = x/y^2$, $(1;\ 1)$. 2) $f = \ln\left(1+\dfrac{x}{y}\right)$, $(1;\ 2)$.

3) $f = xye^{\sin \pi xy}$, $(1;\ 1)$.

4) $f = (2x+y)^{2x+y}$, $(1;\ -1)$.

**3.3.** Найти частные производные первого порядка функции $f(x;\ y;\ z)$:

1) $f = xy + yz + zx$. 2) $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3) $f = \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}$. 4) $f = \dfrac{y}{z} + \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{z}$.

5) $f = z^{xy}$. 6) $f = (x/y)^z$.

**3.4.** Найти частные производные первого порядка функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$:

1) $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin^2 x_i$. 2) $f = e^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

**3.5.** Вычислить $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, если

1) $f = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 2) $f = \ln(x^2+xy+y^2)$.

**3.6.** Вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$, если

1) $f = (x-y)(y-z)(z-x)$. 2) $f = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

**3.7.** Вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$ в точке $(1;\ 1;\ 1)$, если

1) $f = \ln(x^3+y^3+z^3-2xyz)$. 2) $f = \ln(1+x+y^2+z^3)$.

**3.8.** Вычислить $\sum\limits_{i=1}^{4}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, если $f = \dfrac{x_1-x_2}{x_3-x_4} + \dfrac{x_4-x_1}{x_2-x_3}$.

**3.9.** Решить систему уравнений $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, если

$$f = xy\sqrt{9-x^2-y^2}.$$

**3.10.** Найти приращение $\Delta f$ и дифференциал $df$ функции $f=x^2y$ в точках:

1) $(1;\ 1)$. 2) $(1;\ 0)$. 3) $(0;\ 0)$.

**3.11.** Найти $\Delta f(x;\ y)$ и $df(x;\ y)$ функции $f=x^3-y^2$.

**3.12.** Верны ли для функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, следующие утверждения:

1) Если функция в некоторой точке имеет частные производные по всем переменным, то $f(x)$ непрерывна в этой точке.

2) Если функция в каждой точке пространства $\mathbb{R}^n$ имеет частные производные по всем переменным, то она непрерывна в $\mathbb{R}^n$.

3) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке у функции существуют частные производные по всем переменным.

4) Если у функции в некоторой точке существуют частные производные по всем переменным, то функция дифференцируема в этой точке.

5) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке у функции существуют непрерывные частные производные по всем переменным.

6) Если у функции в некоторой точке существуют непрерывные частные производные, то функция дифференцируема в этой точке.

**3.13.** Найти дифференциал функции $f(x;\ y)$, если:

1) $f=2x^4-3x^2y^2+x^3y$. 2) $f=(y^3+2x^2y+3)^4$.

3) $f=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$. 4) $f=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5) $f=2^{-y/x}$. 6) $f=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

7) $f=\ln\sin\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}$. 8) $f=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

9) $f=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$. 10) $f=(1+xy)^y$.

**3.14.** Найти точки, в которых дифференциал функции $f$ равен нулю, если:

1) $f(x;\ y)=(5x+7y-25)\,e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

2) $f(x;\ y;\ z)=2y^2+z^2-xy^2-yz+4x+1$.

**3.15.** Найти дифференциал функции $f(x;\ y)$ в данной точке, если:

1) $f=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, а) $(1;\ 1)$, б) $(0;\ 1)$.

2) $f=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, $(2;\ 1)$. 3) $f=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$, $(\pi/4;\ \pi)$.

4) $f=2^{\operatorname{tg}(\pi x/(x+3y^2))}$, $(1;\ 1)$. 5) $f=\ln\dfrac{4\sqrt{2-x}-xy}{1+\cos y}$, $(1;\ 0)$.

6) $f=\arccos\sqrt{x^2-2y}$, $(1;\ 0{,}18)$.

7) $f=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{1+x^2}$, $(1;\ -1)$.

8) $f=e^{x-1}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3y}{1-6xy}$, $(1;\ 1)$.

9) $f=\ln\arcsin(x+y^3)$, $(\sqrt{3}/2;\ 0)$.

10) $f=\operatorname{arcctg}\ln(\sqrt{x}+y^4)$, $(e^2;\ 0)$.

**3.16.** Найти дифференциал функции $f(x;\ y;\ z)$, если:

1) $f=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 2) $f=e^{xy\sin z}$.
3) $f=(xy)^z$. 4) $f=x^{y/z}$.

**3.17.** Найти дифференциал функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ если:

1) $f=\sin\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$. 2) $f=\ln\dfrac{1-\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}}{1+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}}$.

**3.18.** Найти дифференциал функции $f$ в заданной точке, если:

1) $f=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $(1;\ 0;\ 1)$.

2) $f=\operatorname{arctg}\dfrac{xy}{z^2}$, $(3;\ 2;\ 1)$.

3) $f=\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)^z$, $(1;\ 1;\ 1)$.

4) $f=\ln\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $(1;\ 2;\ \ldots;\ n)$.

**3.19.** Доказать, что функция $f$ дифференцируема в точке $(0;\ 0)$, если:

1) $f=x\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{|y|}}-1\right)$. 2) $f=|y|\sin x$.

3) $f=\left(\sin x+\sqrt[3]{xy}\right)^2$. 4) $f=\operatorname{ch}\sqrt[5]{x^2y}$.

5) $f=\sqrt[5]{x^4}\left(\cos\sqrt[5]{y}-1\right)$. 6) $f=\ln\left(2-|x|^{7/6}+|y|^{5/4}\right)$.

7) $f=\sqrt[3]{y^2}\operatorname{arctg}\sqrt{|x|}$. 8) $f=\begin{cases} x\sin\dfrac{y}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

**3.20.** Доказать, что функция $f$ недифференцируема в точке $(0;\ 0)$, если:

1) $f=\sqrt{|xy|}$. 2) $f=\sqrt{x^2+y^2}$.

3) $f=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. 4) $f=\sqrt[5]{\sin x\,(1-\cos xy)}$.

5) $f=\sin\left(\pi/4+\sqrt[3]{xy^2}\right)$. 6) $f=\ln\left(3+\sqrt[3]{x^2y}\right)$.

**3.21.** Найти частные производные функции $f$ в точке $(0;\ 0)$ и исследовать ее на дифференцируемость в этой точке, если:

1) $f = y\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}$.  2) $f = \sqrt[3]{x^3+y^4}$.

3) $f = 2y + x\cos\sqrt[3]{xy}$.  4) $f = y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

5) $f = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$.  6) $f = y + \ln\left(3+\sqrt[3]{x^2y}\right)$.

7) $f = \arcsin\left(xy+\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)$.  8) $f = \operatorname{arctg}\left(xy+y+\sqrt[3]{x^2y}\right)$.

9) $f = \begin{cases} \dfrac{y^3-x^3}{x^2+2y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0. \end{cases}$

10) $f = \begin{cases} x+\sqrt{|xy|}\cos(1/y), & \text{если } y\neq 0, \\ x, & \text{если } y=0. \end{cases}$

11) $f = \begin{cases} (x+y)\operatorname{arctg}(x/y)^2, & \text{если } y\neq 0, \\ \pi x/2, & \text{если } y=0. \end{cases}$

12) $f = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0. \end{cases}$

**3.22.** Найти дифференциал функции $f$ в точке $(1; 0)$, если:

1) $f = \sqrt[4]{|(x-1)y^3|} - xy$.

2) $f = xy + \sin\sqrt[5]{(x-1)^2y^4}$.

3) $f = x - y + \ln\left(2+\sqrt{|(x-1)y^3|}\right)$.

4) $f = x + 2y + e^{\sqrt[3]{(x-1)^2y^2}}$.

**3.23.** 1) Доказать, что функция

$$f = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(1/(x^2+y^2)), & \text{если } x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0, \end{cases}$$

дифференцируема, но не непрерывно дифференцируема в $\mathbb{R}^2$.

2) Доказать, что функция

$$f = \begin{cases} (x^2+y^2)^\alpha, & \text{если } x,\ y \text{ — рациональные числа}, \\ 0, & \text{если по крайней мере одно из чисел } x,\ y \text{ иррационально}, \end{cases}$$

при $\alpha > 1/2$ дифференцируема только в точке $(0;\ 0)$ и не является непрерывно дифференцируемой в этой точке.

**3.24.** Найти все значения $\alpha$, при которых функция $f$ дифференцируема в точке $(0;\ 0)$, если $f(0;\ 0)=0$, а при $x^2+y^2\neq 0$ функция $f$ задается формулой:

1) $f = |x+y|^{3\alpha} + |y|^{4-\alpha}$.  2) $f = \dfrac{|x|^{3\alpha}+|y|^{7-\alpha}}{x^2+y^2}$.

3) $f = \dfrac{|x|^\alpha|y|^{5-2\alpha}}{|x|+|y|}$.  4) $f = \dfrac{|xy|^\alpha}{1-\ln(x^2+y^2)}$.

**3.25.** Найти все значения $\alpha$, при которых функция $f = \sqrt{\left(\sum x_i^2\right)^\alpha}$, $\alpha > 0$, дифференцируема в начале координат.

**3.26.** Найти все точки, в которых функция $f(x;\ y)$ дифференцируема, если:

1) $f = x|y| + y|x|$. 2) $f = (y - |x|)^2$.

3) $f = |x^2 - y^2|$. 4) $f = \dfrac{1}{1 + |xy|}$.

**3.27.** Найти $\dfrac{\partial f(0;\ 0)}{\partial x}$ для сложной функции

$$f(u;\ v) = \begin{cases} \dfrac{u^2 v}{u^2 + v^2}, & \text{если } u^2 + v^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } u^2 + v^2 = 0, \end{cases}$$

$$u = x, \quad v = x.$$

Объяснить, почему в данном случае нельзя воспользоваться формулой (7) для производной сложной функции.

В задачах **3.28—3.30** предполагается, что функции $f(u)$, $f(u;\ v)$, $f(u;\ v;\ w)$ дифференцируемы и их производные $f'_u, f'_v, f'_w$ известны.

**3.28.** Для функции $f(u)$ найти $f'_x$ и $f'_y$, если:

1) $u = x^2 + e^y$. 2) $u = \sqrt[3]{x^3 + xy^2}$.

3) $u = \sin^2 3x \cos^3 2y$. 4) $u = \operatorname{arcctg}(x + \ln y)$.

**3.29.** Для функции $f(u;\ v)$ найти $f'_x$ и $f'_y$, если:

1) $u = xy$, $v = x/y$. 2) $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.

3) $u = x\cos y$, $v = x\sin y$. 4) $u = \arcsin x^2$, $v = x^y$.

**3.30.** Найти дифференциал функции $\varphi$, если:

1) $\varphi = f(u)$, $u = xy + y^2/x$.

2) $\varphi = f(u;\ v)$, $u = y/(x + y)$, $v = x^2 - y^3$.

3) $\varphi = f(u;\ v)$, $u = y^2$, $v = \operatorname{arctg}(y/x)$.

4) $\varphi = f(u;\ v;\ w)$, $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xyz$.

**3.31.** Доказать, что если $f(u)$ — произвольная дифференцируемая функция, то функция $\varphi(x;\ y)$ удовлетворяет данному уравнению:

1) $\varphi = yf(x^2 - y^2)$, $y^2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + xy\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x\varphi$.

2) $\varphi = xy + xf(y/x)$, $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xy + \varphi$.

3) $\varphi = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, $\cos y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos x\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \cos x\cos y$.

4) $\varphi = e^y f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$, $(x^2 - y^2)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + xy\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xy\varphi$.

**3.32.** Доказать, что если $f(u;\ v)$ — произвольная дифференцируемая функция, то функция $\varphi(x;\ y;\ z)$ удовлетворяет данному уравнению:

1) $\varphi = f(x/y;\ x^2+y-z^2)$, $2xz\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + 2yz\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + (2x^2+y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$

2) $\varphi = f\left(\dfrac{x-y}{xy};\ (x-y)e^{-z^2/2}\right)$,

$$x^2z\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y^2z\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

3) $\varphi = x^\alpha f(yx^\beta;\ zx^\gamma)$, $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \beta y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \gamma z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \alpha\varphi.$

**3.33.** Найти решение $u(x;\ y)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + y^2,$$

удовлетворяющее условию $u(x;\ x^2) = 0$.

**3.34.** Найти решение $u(x;\ y)$ системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+2y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y-2x}{x^2+y^2},$$

удовлетворяющее условию $u(0;\ 2) = 0$.

**3.35.** Доказать, что если функция $f$ дифференцируема в точке $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, то в этой точке существует производная $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ по направлению произвольного единичного вектора

$$\boldsymbol{l} = (\cos\alpha_1;\ \cos\alpha_2;\ \ldots;\ \cos\alpha_n), \quad \sum_{k=1}^{n}\cos^2\alpha_k = 1,$$

причем

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\cos\alpha_k.$$

**3.36.** Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, дифференцируема в некоторой точке и $\boldsymbol{l}$ — произвольный единичный вектор. Доказать, что в этой точке:

1) $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = (\operatorname{grad} f,\ \boldsymbol{l})$.

2) $\max\limits_{\boldsymbol{l}}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = |\operatorname{grad} f|$.

3) Если $\operatorname{grad} f \neq \boldsymbol{o}$, то производная $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ достигает наибольшего значения при

$$\boldsymbol{l} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}.$$

**3.37.** Верно ли утверждение: производная функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ по направлению вектора $(1;\ 0)$ равна $\dfrac{\partial f(x_0;\ y_0)}{\partial x}$?

**3.38.** Верно ли утверждение: градиентом функции $f = x + y + \sqrt{|xy|}$ в точке $(0;\ 0)$ является вектор $(1;\ 1)$?

**3.39.** Найти производную функции $f$ по направлению вектора $\boldsymbol{l}$ в точке $M$, если:

1) $f = 3x^2 + 5y^2$, $\boldsymbol{l} = (-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$, $M(1;\ 1)$.

2) $f = x\sin(x+y)$, $\boldsymbol{l} = (-1;\ 0)$, $M(\pi/4;\ \pi/4)$.

3) $f = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, $\boldsymbol{l} = (2/3;\ 2/3;\ 1/3)$, $M(3;\ 3;\ 1)$.

4) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\boldsymbol{l} = (-1/3;\ 2/3;\ 2/3)$, $M(1;\ 2;\ 1)$.

5) $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2$, $\boldsymbol{l} = (2/3;\ 1/3;\ 0;\ -2/3)$, $M(1;\ 3;\ 2;\ 1)$.

6) $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \arcsin x_k$, $\boldsymbol{l} = (1/\sqrt{n};\ 1/\sqrt{n};\ \ldots;\ 1/\sqrt{n})$, $M(1/4;\ 1/4;\ \ldots;\ 1/4)$.

**3.40.** Найти градиент функции $f$ в точке $M$, если:

1) $f = 1 + x^2y^3$, $M(-1;\ 1)$.

2) $f = yx^y$, $M(2;\ 1)$.

3) $f = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $M(1;\ 2;\ 3)$.

4) $f = \operatorname{arctg}(xy/z^2)$, $M(0;\ 1;\ 2)$.

5) $f = e^{x+xy+xyz}$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

6) $f = \ln(1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 < 1$.

**3.41.** Решить уравнение $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{o}$, если:

1) $f = 2z^3 + x^2 + 2y^2 + xy + 3x - 2y - 6z + 1$.

2) $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

**3.42.** Для функции $f = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ найти:

1) $\inf|\operatorname{grad} f|$, 2) $\sup|\operatorname{grad} f|$

в области $0 < a < z < A$.

**3.43.** Найти производную функции $f$ в точке $M_0$ по направлению вектора $\overline{M_0M}$, если:

1) $f = 5x + 10x^2y + y^5$, $M_0(1;\ 2)$, $M(5;\ -1)$.

2) $f = xy^2z^3$, $M_0(3;\ 2;\ 1)$, $M(7;\ 5;\ 1)$.

3) $f = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(1;\ 1;\ 1)$, $M(1;\ 5;\ 4)$.

4) $f = \dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $M_0(0;\ 1;\ 1;\ 0)$, $M(3;\ 2;\ 1;\ 0)$.

**3.44.** Найти производную функции $f$ в точке $M$ по данному направлению, если:

1) $f=3x^4+y^3+xy$, $M(1;\ 2)$, по направлению луча, образующего с осью $x$ угол $135°$.

2) $f=\operatorname{arctg}(y/x)$, $M\left(1/2;\ \sqrt{3}/2\right)$, по направлению внешней нормали к окружности $x^2+y^2=2x$ в точке $M$.

3) $f=x^2-3yz+4$, $M(1;\ 2;\ -1)$, по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями.

4) $f=\ln(e^x+e^y+e^z)$, $M(0;\ 0;\ 0)$, по направлению луча, образующего с осями координат $x$, $y$ и $z$ углы, соответственно равные $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/3$.

5) $f=\operatorname{tg} xz$, $M(\pi/4;\ \pi/4;\ 1)$, по направлению градиента функции $f_1=\sin yz$ в точке $M$.

6) $f=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, по направлению градиента функции $f$ в точке $M$.

**3.45.** Найти производную функции $f$ по направлению внешней нормали к линии $c$-уровня функции $f$ в каждой ее точке, если:

1) $f=x^2+y^2$, $c>0$. 2) $f=\ln(x^2+y^2)$.

**3.46.** Найти в точке $\left(a\sqrt{c/2};\ b\sqrt{c/2}\right)$, $c>0$, производную функции

$$f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

по направлению внутренней нормали к линии $c$-уровня функции $f$.

**3.47.** Найти $f'_y(x;\ x^2)$ для дифференцируемой функции $f(x;\ y)$, удовлетворяющей условиям

$$f(x;\ x^2)=\text{const},\quad f'_x(x;\ x^2)=x.$$

**3.48.** Найти наибольшее значение $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ в точке $M$, если:

1) $f=xy^2-3x^4y^5$, $M(1;\ 1)$.

2) $f=\dfrac{x+\sqrt{y}}{y}$, $M(2;\ 1)$.

3) $f=\ln xyz$, $M(1;\ -2;\ -3)$.

4) $f=\operatorname{tg} x-x+3\sin y-\sin^3 y+2z+\operatorname{ctg} z$, $M(\pi/4;\ \pi/3;\ \pi/2)$.

**3.49.** Найти единичный вектор $l$, по направлению которого $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ в точке $M$ достигает наибольшего значения, если:

1) $f=x^2-xy+y^2$, $M(-1;\ 2)$.

2) $f=x-3y+\sqrt{3xy}$, $M(3;\ 1)$.

3) $f=\arcsin xy+\arccos yz$, $M(1;\ 0{,}5;\ 0)$.

4) $f=xz^y$, $M(-3;\ 2;\ 1)$.

**3.50.** Найти величину градиента функции

$$f=10^{-3}\sin\left(\pi 10^6\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

в точке $(2;\ 1;\ 2)$.

**3.51.** Найти угол между градиентами функции $f$ в точках $A$ и $B$, если:

1) $f=\ln|y/x|$, $A(1/2;\ 1/4)$, $B(1;\ -1)$.

2) $f=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$, $A(1;\ 1)$, $B(3;\ 4)$.

3) $f=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $A(1;\ 2;\ 2)$, $B(-3;\ 1;\ 0)$.

4) $f=\sin(x^2+y^2-z^2)$, $A(a;\ -2a;\ a)$, $B(b;\ b;\ b)$, $a^2+b^2\neq 0$.

**3.52.** Найти угол между градиентами функций $f_1$ и $f_2$ в точке $M$, если:

1) $f_1=\sqrt{x^2-y^2}$, $\quad f_2=x^3+y^3-3xy$, $\quad M(4;\ 3)$.

2) $f_1=\dfrac{y^2}{x}$, $\quad f_2=2x^2+y^2$, $\quad M(x_0;\ y_0)$, $\quad x_0\neq 0$.

3) $f_1=x^2-2y^2+z^2$, $\quad f_2=(xyz)^2$, $\quad M(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

4) $f_1=\sin(xz+yt)$, $\quad f_2=\cos(xt-yz)$, $\quad M(x_0;\ y_0;\ z_0;\ t_0)$.

**3.53.** Доказать, что угол между градиентами функций

$$f_1=x^2+2y^2+3z^2,$$
$$f_2=x^2+2y^2+3z^2+4x+5y+6z$$

в точке $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ стремится к нулю, если точка $M$ удаляется в бесконечность.

**3.54.** Пусть $f(x),\ x\in G\subset\mathbb{R}^n,$ — дифференцируемая однородная функция степени $\alpha$ (§ 2, (1)). Доказать, что частные производные функции $f$ — однородные функции степени $\alpha-1$.

**3.55.** 1) Доказать, что дифференцируемая в области $G\subset\mathbb{R}^n$ функция $f$ удовлетворяет в $G$ *тождеству Эйлера*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial f}{\partial x_k}=\alpha f$$

тогда и только тогда, когда она локально однородна степени $\alpha$ в области $G$ (см. § 2, с. 21).

2) Построить функцию, удовлетворяющую тождеству Эйлера в некоторой области, но не являющуюся однородной функцией в этой области.

**3.56.** Используя тождество Эйлера (см. **3.55**), вычислить

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z},$$

если:

1) $f=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. $\qquad$ 2) $f=\dfrac{x+z}{\sqrt[3]{x^2+z^2}}$.

3) $f=(x+2y+3z)^4$. $\quad$ 4) $f=(\ln x-\ln y)^{y/z}$.

5) $f=\dfrac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\dfrac{y}{x};\ \dfrac{z}{x}\right)$, где $\varphi(u;\ v)$ — дифференцируемая функция.

**3.57.** Доказать, что функция $f(x;\ y)$, имеющая ограниченные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой выпуклой области $G$, равномерно непрерывна в этой области.

**3.58.** Доказать, что если функция $f(x;\ y)$ в некоторой области $G$ непрерывна по $x$ при каждом фиксированном $y$ и имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то эта функция непрерывна в области $G$.

**3.59.** Пусть $f(x;\ y)$ непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области $G$ и $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ в области $G$. Верно ли утверждение, что функция $f(x;\ y)$ не зависит от $y$ в области $G$?

---

**5. Частные производные функций, заданных неявно.** Пусть функция $F(x;\ u)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}$, равна нулю в точке $(x^0;\ u^0)=(x_1^0;\ \ldots;\ x_n^0;\ u^0)$ и непрерывна в некоторой ее окрестности, частная производная $F'_u$ непрерывна в точке $(x^0;\ u^0)$ и $F'_u(x^0;\ u^0)\neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $x^0$ существует единственная непрерывная функция $u=f(x)$ такая, что $u^0=f(x^0)$, удовлетворяющая уравнению $F(x;\ u)=0$. Если, кроме того, частные производные $F'_{x_k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, непрерывны в точке $(x^0;\ u^0)$, то в точке $x^0$ существуют все частные производные функции $u=f(x)$, причем

$$f'_{x_k}=-\frac{F'_{x_k}}{F'_u},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{11}$$

Формулы (11) можно записать в виде одной матричной формулы:

$$\left(f'_{x_1};\ f'_{x_2};\ \ldots;\ f'_{x_n}\right)=-\left(F'_u\right)^{-1}\left(F'_{x_1};\ F'_{x_2};\ \ldots;\ F'_{x_n}\right). \tag{12}$$

При дополнительном условии непрерывности частных производных $F'_u$, $F'_{x_k}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, в окрестности точки $(x^0;\ u^0)$, функция $u=f(x)$, определяемая неявно уравнением $F(x;\ u)=0$, будет непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки $x^0$.

Пример 7. Найти в точке $(1;\ 1)$ частные производные функции $u=f(x;\ y)$, заданной неявно уравнением

$$u^3-2u^2x+uxy-2=0.$$

$\triangle$ Из уравнения найдем значение функции $u$ в данной точке: $u=f(1;\ 1)=2$. Функция $F(x;\ y;\ u)=u^3-2u^2x+uxy-2$ равна нулю в точке $(1;\ 1;\ 2)$ и непрерывна в ее окрестности, а ее частные производные

$$F'_x=-2u^2+uy,\quad F'_y=ux,\quad F'_u=3u^2-4ux+xy$$

также непрерывны, причем $F'_u(1;\ 1;\ 2) \neq 0$. Следовательно, данным уравнением в окрестности точки $(1;\ 1;\ 2)$ определяется непрерывно дифференцируемая функция $u = f(x;\ y)$, частные производные которой можно найти по формулам (11). Так как в точке $(1;\ 1;\ 2)$ частные производные функции $F$ соответственно равны

$$F'_x = -6, \quad F'_y = 2, \quad F'_u = 5,$$

то частные производные функции $u = f(x;\ y)$ в этой точке равны

$$f'_x = 6/5, \quad f'_y = -2/5. \ \blacktriangle$$

Пусть функции

$$F_i(x;\ u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

равны нулю в точке

$$(x^0;\ u^0) = (x_1^0;\ \ldots;\ x_n^0;\ u_1^0;\ \ldots;\ u_m^0)$$

и непрерывны в некоторой ее окрестности, а их частные производные $(F_i)'_{u_k}$, $i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, непрерывны в точке $(x^0;\ u^0)$ и определитель

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_{u_1} & \cdots & (F_1)'_{u_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (F_m)'_{u_1} & \cdots & (F_m)'_{u_m} \end{vmatrix} \tag{13}$$

не равен нулю в точке $(x^0;\ u^0)$.

Тогда в некоторой окрестности точки $x^0$ существует единственная система непрерывных функций

$$u_i = f_i(x), \quad u_i^0 = f_i(x^0), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

удовлетворяющая системе уравнений

$$F_i(x;\ u) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Если, кроме того, частные производные $(F_i)'_{x_k}$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ n$, непрерывны в точке $(x^0;\ u^0)$, то в точке $x^0$ существуют все частные производные функций $u_i = f_i(x)$, $i = 1, 2,\ \ldots,\ m$, причем

$$\begin{pmatrix} (f_1)'_{x_1} & \cdots & (f_1)'_{x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (f_m)'_{x_1} & \cdots & (f_m)'_{x_n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} (F_1)'_{u_1} & \cdots & (F_1)'_{u_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (F_m)'_{u_1} & \cdots & (F_m)'_{u_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (F_1)'_{x_1} & \cdots & (F_1)'_{x_n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (F_m)'_{x_1} & \cdots & (F_m)'_{x_n} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

При дополнительном условии непрерывности частных производных функций $F_i$, $i = 1, 2,\ \ldots,\ m$, в окрестности точки $(x^0;\ u^0)$, функции $u_i = f_i(x)$, определяемые неявно системой уравнений $F_i(x;\ u) = 0$, будут непрерывно дифференцируемыми в некоторой окрестности точки $x^0$.

Формула (12) является частным случаем ($m=1$) формулы (14).

Определитель (13) называют *якобианом* системы функций $F_i$ по переменным $u_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, и обозначают

$$\frac{\partial (F_1, \ldots, F_m)}{\partial (u_1, \ldots, u_m)}.$$

Пример 8. Найти в точке (1; 0; 1; —2) частные производные функций $u=f_1(x; y)$ и $v=f_2(x; y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} xu+yv-u^3=0, \\ x+y+u+v=0. \end{cases}$$

△ Функции $F_1=xu+yv-u^3$ и $F_2=x+y+u+v$ равны нулю в точке (1; 0; 1; —2) и непрерывны в ее окрестности, их частные производные

$$(F_1)'_x=u, \quad (F_1)'_y=v, \quad (F_1)'_u=x-3u^2, \quad (F_1)'_v=y,$$
$$(F_2)'_x=1, \quad (F_2)'_y=1, \quad (F_2)'_u=1, \quad (F_2)'_v=1$$

также непрерывны, и якобиан

$$\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (u, v)}=\begin{vmatrix} x-3u^2 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

не равен нулю в заданной точке. Следовательно, данной системой уравнений в окрестности точки (1; 0; 1; —2) определяются единственным образом непрерывно дифференцируемые функции $u=f_1(x; y)$ и $v=f_2(x; y)$, частные производные которых можно найти по формуле (14). Значения частных производных функций $F_1$ и $F_2$ в точке (1; 0; 1; —2) соответственно равны:

$$(F_1)'_x=1, \quad (F_1)'_y=-2, \quad (F_1)'_u=-2, \quad (F_1)'_v=0,$$
$$(F_2)'_x=1, \quad (F_2)'_y=1, \quad (F_2)'_u=1, \quad (F_2)'_v=1.$$

По формуле (14) находим матрицу, элементами которой являются искомые значения производных:

$$\begin{pmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}. \ \blacktriangle$$

---

**3.60.** Найти в указанной точке частные производные функции $u(x; y)$, заданной неявно уравнением:

1) $u^3+3xyu+1=0$, $(0; 1)$. 2) $e^u-xyu-2=0$, $(1; 0)$.

3) $u+\ln(x+y+u)=0$, $(1; -1)$.

4) $\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}-\operatorname{arctg}\dfrac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}-1=0$, $(5; 4)$.

**3.61.** Найти в указанной точке частные производные функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $x^2-2y^2+3u^2-yu+y=0$, а) $(1;\ 1;\ 1/3)$, б) $(1;\ 1;\ 0)$.

2) $x\cos y+y\cos u+u\cos x=1$, $(0;\ 1;\ 0)$.

3) $u-x=y\operatorname{ctg}(u-x)$, $(\pi/4;\ \pi/4;\ \pi/2)$.

4) $u^2\ln(u+x)=xy$, $(1;\ 1;\ u_0)$, $u_0$ — корень уравнения $u^2\ln(1+u)=1$.

**3.62.** Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в точке $(1;\ -2)$ для каждой дифференцируемой функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением

$$u^3-4xu+y^2-4=0.$$

**3.63.** Найти в указанной точке дифференциал функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $x+y-u=e^{u-x-y}$, $(x_0;\ y_0)$.

2) $x-u=u\ln(u/y)$, $(1;\ 1)$.

**3.64.** Найти в указанной точке дифференциал функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $u^3-xu+y=0$, а) $(3;\ -2;\ 2)$, б) $(3;\ -2;\ -1)$.

2) $x^3+2y^3+u^3-3xyu+2y-3=0$,
а) $(1;\ 1;\ 1)$, б) $(1;\ 1;\ -2)$.

**3.65.** Найти $du$ в точке $(1;\ 1)$ для каждой дифференцируемой функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением

$$\pi yu=4\operatorname{arctg}xu.$$

**3.66.** Найти в точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ дифференциал функций $u(x;\ y;\ z)$, заданных уравнением

$$u^3-3(x+y)u^2+z^3=0.$$

**3.67.** Для функции $u(x;\ y;\ z)=xy^2z^3$ найти в точке $(1;\ 1;\ 1)$ производную $\frac{\partial u}{\partial x}$, если: 1) $z(x;\ y)$, 2) $y(x;\ z)$ — функции, заданные неявно уравнением $x^2+y^2+z^2=3xyz$.

**3.68.** Найти $du$ в точке $(x;\ y)$, если

$$u=\frac{x+z(x;\ y)}{y+z(x;\ y)},$$

$z(x;\ y)$ — функция, заданная неявно уравнением

$$ze^z=xe^x+ye^y.$$

**3.69.** Пусть уравнением

$$f(x-y;\ y-z;\ z-x)=0,$$

где $f(u;\ v;\ w)$ — дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x;\ y)$. Найти $dz(x;\ y)$.

**3.70.** Доказать, что если уравнением

$$f(x^2+y^2+z^2)=ax+by+cz,$$

где $f(u)$ — дифференцируемая функция, $a$, $b$, $c$ — постоянные, определяется дифференцируемая функция $z(x;\ y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

**3.71.** Доказать, что если уравнением

$$yf(z/y)=x^2+y^2+z^2,$$

где $f(u)$ — дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x;\ y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

**3.72.** Доказать, что если уравнением

$$f(x-az;\ y-bz)=0,$$

где $f(u;\ v)$ — дифференцируемая функция, $a$, $b$ — постоянные, определяется дифференцируемая функция $z(x;\ y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

**3.73.** Доказать, что если уравнением

$$f\left(\frac{x-a}{z-c};\ \frac{y-b}{z-c}\right)=0,$$

где $f(u;\ v)$ — дифференцируемая функция, $a$, $b$, $c$ — постоянные, определяется дифференцируемая функция $z(x;\ y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c.$$

**3.74.** Доказать, что если уравнением

$$f\left(\frac{x_1}{x_n};\ \frac{x_2}{x_n};\ \ldots;\ \frac{x_{n-1}}{x_n};\ \frac{z}{x_n^\alpha}\right)=0,$$

где $f(u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_n)$ — дифференцируемая функция, $\alpha$ — постоянная, определяется дифференцируемая функция $z(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, то она удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial z}{\partial x_k}=\alpha z.$$

**3.75.** Найти в точке $(1;\ 2)$ частные производные дифференцируемых функций $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$, заданных неявно уравнениями

$$xe^{u+v}+2uv=1,\quad ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x,\quad u(1;\ 2)=v(1;\ 2)=0.$$

**3.76.** Найти в точке (1; 1) дифференциалы для дифференцируемых функций $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$, заданных неявно условиями

$$x = \sqrt{2}e^{u/x}\cos(v/y), \quad y = \sqrt{2}e^{u/x}\sin(v/y),$$
$$u(1;\ 1) = 0, \quad v(1;\ 1) = \pi/4.$$

**3.77.** Найти $dz(1; 1)$ функции $z = 2u + v$, если $u = u(x; y)$ и $v = v(x;\ y)$ — дифференцируемые функции, заданные неявно уравнениями

$$u + \ln v = x, \quad v - \ln u = y.$$

**3.78.** Найти $dz(x;\ y)$ функции $z = u^3 + v^3$, $u \neq v$, если $u = u(x;\ y)$ и $v = v(x;\ y)$ — дифференцируемые функции, заданные неявно уравнениями

$$u + v = x, \quad u^2 + v^2 = y.$$

**3.79.** Найти $dz(x;\ y)$, если:

1) $z = c\sin v, \quad x = a\cos u\cos v, \quad y = b\sin u\cos v,$

2) $z = c\,\mathrm{sh}\,v, \quad x = a\cos u\,\mathrm{ch}\,v, \quad y = b\sin u\,\mathrm{ch}\,v,$

$a$, $b$, $c$ — постоянные.

**3.80.** Пусть системой уравнений

$$x\cos v + y\sin v + \ln u = f(v), \quad y\cos v - x\sin v = f'(v),$$

где $f(v)$ — дважды дифференцируемая функция, в окрестности точки $(x_0;\ y_0;\ u_0;\ v_0)$ определяются дифференцируемые функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$. Найти в этой точке: 1) $du$; 2) $|\mathrm{grad}\, u|$.

**3.81.** Пусть системой уравнений

$$(u - f(v))^2 = x^2(y^2 - v^2), \quad (u - f(v))f'(v) = x^2 v,$$

где $f(v)$ — дважды дифференцируемая функция, определяются дифференцируемые функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$. Доказать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} = xy.$$

**3.82.** 1) Пусть уравнением $f(x; y; z) = 0$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$ определяются дифференцируемые функции

$$x = x(y;\ z), \quad y = y(x;\ z), \quad z = z(x;\ y).$$

Доказать, что

$$\frac{\partial x(y_0;\ z_0)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(x_0;\ z_0)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z(x_0;\ y_0)}{\partial x} = -1.$$

2) Пусть уравнением $f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = 0$ в точке $x^0 = (x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$ определяются дифференцируемые функции

$$x_1 = x_1(x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n),\ \ldots,\ x_n = x_n(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{n-1}).$$

Доказать, что

$$\frac{\partial x_1(x^0)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2(x^0)}{\partial x_3}\ \ldots\ \frac{\partial x_n(x^0)}{\partial x_1} = (-1)^n.$$

**3.83.** Пусть системой уравнений

$$f(x;\ y;\ u;\ v)=0, \quad g(x;\ y;\ u;\ v)=0,$$

где $f$ и $g$ — дифференцируемые функции, определяются дифференцируемые функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$. Найти частные производные функций $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$.

**3.84.** Пусть системой уравнений

$$f(y;\ u;\ v)=0, \quad g(u;\ v)=0,$$

где $f$ и $g$ — дифференцируемые функции, определяются дифференцируемые функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$. Найти $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$, если $w=F(x;\ y;\ u;\ v)$ — дифференцируемая функция.

---

**6. Замена переменных.** В различных вопросах математики и ее приложений часто оказывается целесообразным при рассмотрении выражений, содержащих какие-либо функции и их производные, перейти к другим независимым переменным, а иногда и к другим функциям, которые связаны с исходными переменными и функциями определенными соотношениями. Целесообразность такого перехода объясняется обычно либо той ролью, которую играют новые переменные в изучаемом вопросе, либо тем, что в новых переменных данное дифференциальное выражение значительно упрощается. При замене переменных используются правила дифференцирования сложных и неявно заданных функций (см. пп. 2, 5).

Пример 9. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2, \quad xyz\neq 0,$$

приняв за новые независимые переменные

$$u=x, \quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$$

и за новую функцию

$$w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

Найти решения данного уравнения.

△ Найдем выражения производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через частные производные функции $w$ по переменным $u$ и $v$. Для этого продифференцируем обе части равенства $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=w$ по переменным $x$ и $y$. При дифференцировании функции $w$ воспользуемся формулами (7) для частных производных сложной функции. Получим

$$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v};$$

следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Подставив найденные выражения для производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение, будем иметь

$$x^2z^2\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

Осталось заменить $x$ и $z$ новыми переменными. Так как $x=u$, $z=\frac{u}{uw+1}$, то в новых переменных исходное уравнение принимает вид

$$\left(\frac{u^2}{uw+1}\right)^2\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

Полученное уравнение легко решается. Интегрируя по $u$ уравнение $\frac{\partial w}{\partial u}=0$, находим $w=f(v)$, где $f$ — произвольная дифференцируемая функция. Возвращаясь к исходным переменным, получаем решения исходного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right),$$

откуда

$$z=\frac{x}{xf\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)+1}. \ \blacktriangle$$

---

**3.85.** Перейти от декартовых координат $x$, $y$ к полярным, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$:

1) $w=\dfrac{\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx}}$. 2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$.

3) $x(2y-x)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2xy\dfrac{dy}{dx}+y(2x-y)=0$.

4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+x(x^2+y^2),\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y(x^2+y^2).\end{cases}$

5) $w=x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}$. 6) $w=x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

7) $w=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$. 8) $w=\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

**3.86.** Решить уравнение $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$, преобразовав его к полярным координатам.

**3.87.** Преобразовать уравнение, принимая $u$ и $v$ за новые независимые переменные:

1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy,\quad u=\ln x,\quad v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$

2) $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\ v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}.$

3) $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+y+z,\ u=x+z,\ v=y+z.$

4) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{z},\quad u=2x-z^2,\quad v=-\dfrac{y}{z}.$

**3.88.** Решить уравнение, преобразовав его к новым независимым переменным $u$ и $v$:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\quad u=x+y,\quad v=x-y$

2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,\quad x=u,\quad y=uv.$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\alpha\dfrac{\partial z}{\partial y}=1,\quad u=x,\quad v=y-\alpha z,\quad \alpha=\mathrm{const}.$

4) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2},$

$$u=\frac{y}{x},\quad v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

**3.89.** Преобразовать уравнение, приняв $u$ и $v$ за независимые переменные, а $w$ за функцию:

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},\quad x=ue^w,\ y=ve^w,\ z=we^w.$$

**3.90.** Преобразовать уравнение

$$(z-x)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв $x$ за функцию, а $y$ и $z$ за независимые переменные.

**3.91.** Преобразовать уравнение

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв $x$ за функцию, а

$$u=y-z,\quad v=y+z$$

за независимые переменные.

**3.92.** Решить уравнение, преобразовав его к переменным $u$, $v$ и $w=w(u;\ v)$:

1) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$

$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad w=\ln z-x-y.$$

2) $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$

$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z.$$

**3.93.** Решить уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

преобразовав его к новым независимым переменным

$$u=x,\quad v=y-x,\quad t=z-x.$$

**3.94.** Преобразовать уравнение

$$(y+z+w)\frac{\partial w}{\partial x}+(x+z+w)\frac{\partial w}{\partial y}+(x+y+w)\frac{\partial w}{\partial z}=x+y+z,$$

приняв за независимые переменные

$$u=\ln(x-w),\quad v=\ln(y-w),\quad t=\ln(z-w).$$

**3.95.** Записать $(\operatorname{grad} u)^2$, где $u=u(x;\ y;\ z)$, в сферических координатах, полагая

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi.$$

**3.96.** Записать $(\operatorname{grad} u)^2$, где $u=u(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, в ортогональных координатах

$$y_i=y_i(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

т. е. в координатах, удовлетворяющих условиям

$$(\operatorname{grad} y_i;\ \operatorname{grad} y_k)=0,\quad i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ i<k.$$

**3.97.** Преобразовать уравнение

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=w+\frac{xy}{z},$$

приняв за независимые переменные

$$u=x/z,\quad v=y/z,\quad t=z,$$

а за функцию $s=w/z$.

---

**7. Дифференцируемые отображения.** Отображение (см. § 2, п. 4)

$$f\colon E\mapsto\mathbb{R}^m,\quad E\subset\mathbb{R}^n,$$

с координатными функциями

$$u_i=f_i(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

называют *дифференцируемым в точке* $x^0=(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$, если существуют такие числа

$$A_{ik},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

что приращения

$$\Delta f_i=f_i(x_1^0+\Delta x_1;\ \ldots;\ x_n^0+\Delta x_n)-f_i(x_1^0;\ \ldots;\ x_n^0)$$

функций $f_i$ в точке $x^0$ представимы в виде

$$\Delta f_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\Delta x_k + o\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}\right), \quad \Delta x_k \to 0. \tag{15}$$

Если отображение $f$ дифференцируемо в точке $x^0$, т. е. если справедливы формулы (15), то произведение матрицы

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

на столбец

$$dx = \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{Bmatrix}$$

называют *дифференциалом отображения $f$ в точке $x^0$* и обозначают $df(x^0)$.

Таким образом, если верно равенство (15), то

$$df(x^0) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{Bmatrix}. \tag{16}$$

Если равенство (15) справедливо в каждой точке множества $E \subset \mathbb{R}^n$, то отображение $f$ называют *дифференцируемым отображением* множества $E$.

Теорема 4. Если отображение $f$: $E \mapsto \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, с координатными функциями

$$u_i = f_i(x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n), \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ m,$$

дифференцируемо в точке $x^0 = \left(x_1^0;\ x_2^0;\ \dots;\ x_n^0\right)$ и его дифференциал в этой точке определяется формулой (16), то в точке $x^0$ существуют частные производные функций $f_i$, причем

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в каждой точке, где справедливо равенство (15), дифференциал отображения $f$ может быть вычислен по формуле

$$df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{Bmatrix}, \tag{17}$$

Для дифференцируемости отображения $f(f_1; f_2; \ldots; f_m)$ в некоторой точке достаточно, чтобы частные производные функций $f_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, были непрерывны в этой точке.

Отображение $f(f_1; f_2; \ldots; f_m)$ называют *непрерывно дифференцируемым отображением* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если его координатные функции непрерывно дифференцируемы на множестве $E$.

Матрицу $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)$, $i=1, 2, \ldots, m$, $k=1, 2, \ldots, n$, составленную из частных производных координатных функций отображения $f$, называют *производной отображения* $f$ и обозначают $f'$.

Формулу (17) для дифференциала отображения $f$ можно записать в виде

$$df = f'\,dx.$$

В случае $m=n$ производная отображения $f(f_1; f_2; \ldots; f_n)$ является квадратной матрицей, и ее определитель

$$|f'| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{18}$$

называют *якобианом отображения* $f$.

Пример 10. Найти в точке $(\pi/4; \pi/4)$ дифференциал отображения $f$: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ с координатными функциями:

$$u_1 = 2\cos x_1 \cos x_2, \quad u_2 = 2\cos x_1 \sin x_2, \quad u_3 = \sqrt{2}\sin x_1.$$

△ Координатные функции непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, дифференциал данного отображения существует в каждой точке, и его можно найти по формуле (17):

$$df(x_1; x_2) = \begin{pmatrix} -2\sin x_1 \cos x_2 & -2\cos x_1 \sin x_2 \\ -2\sin x_1 \sin x_2 & 2\cos x_1 \cos x_2 \\ \sqrt{2}\cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}.$$

В заданной точке получаем

$$df\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dx_1 - dx_2 \\ -dx_1 + dx_2 \\ dx_1 \end{pmatrix}. \ ▲$$

Пример 11. Найти якобиан $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)}$ отображения

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi.$$

△ Согласно формуле (18) получаем

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\psi & 0 & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos\psi\left(\sin\psi\begin{vmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix} + \cos\psi\begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^2\cos\psi(\sin^2\psi + \cos^2\psi) = r^2\cos\psi. \blacktriangle$$

---

**3.98.** Найти в точке (2; 1; 1) дифференциал отображения $u = xy$, $v = z/y$.

**3.99.** Найти дифференциал отображения $u = yz$, $v = zx$, $w = xy$.

**3.100.** Найти в точке (0; 0) производную отображения и исследовать его на дифференцируемость в этой точке:

1) $u = y + \sqrt{1 + |x|^3 |y|^{3/2}}$, $v = x + \sqrt{5 - |x|^{3/2}|y|^{5/6}}$.

2) $u = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln^2|y|}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ $\quad v = \begin{cases} \sqrt{|xy|}\cos(1/y), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

**3.101.** Пусть $f$ — тождественное отображение множества $E \subset \mathbb{R}^n$. Найти $f'$.

**3.102.** Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ с координатными функциями

$$u_i = b_i + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad a_{ik}, b_i = \mathrm{const},$$

называют *линейным*. Найти производную линейного отображения.

**3.103.** Найти якобиан $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ отображения:

1) $u = x(x^2 - 3y^2)$, $v = y(3x^2 - y^2)$.

2) $u = \operatorname{ch} x\cos y$, $v = \operatorname{sh} x\sin y$.

**3.104.** Найти якобиан $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}$ отображения

$$x = r\cos^p\varphi, \quad y = r\sin^p\varphi, \quad p \in \mathbb{N}.$$

**3.105.** Найти якобиан $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)}$ отображения

$$x = r\cos^p\varphi\cos^q\psi, \quad y = r\sin^p\varphi\cos^q\psi, \quad z = r\sin^q\psi, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

**3.106.** Найти якобиан $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ отображения:

1) $u = xyz$, $v = xy - xyz$, $w = y - xy$.

2) $u = \dfrac{x}{\sqrt{1 - r^2}}$, $v = \dfrac{y}{\sqrt{1 - r^2}}$, $w = \dfrac{z}{\sqrt{1 - r^2}}$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

**3.107.** Найти якобиан $\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ отображения:

1) $u_i = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n} x_k^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

2) $u_i = \frac{1}{2}x_i^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_k x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

**3.108.** Пусть $E_1 \subset \mathbb{R}^n$, $E_2 \subset \mathbb{R}^m$, $f\colon E_1 \mapsto E_2$, $g\colon E_2 \mapsto \mathbb{R}^k$, причем отображение $f$ дифференцируемо в точке $x \in E_1$, а отображение $g$ дифференцируемо в точке $f(x) \in E_2$. Доказать, что:

1) Композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке $x$ и производная композиции отображений равна произведению производных, т. е.

$$(g(f(x)) \circ f(x))' = g'(f(x))\, f'(x).$$

2) В случае $k = m = n$ якобиан композиции $g \circ f$ в точке $x$ равен произведению якобианов отображений $f(u_1; u_2; \ldots; u_n)$ и $g(v_1; v_2; \ldots; v_n)$, т. е.

$$\frac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)};$$

в частности, если $g = f^{-1}$, то

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1.$$

**3.109.** Пусть системой уравнений

$$f_i(x; u) = 0, \quad x \in E \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

задается дифференцируемое отображение $u_i = u_i(x)$, и пусть

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \neq 0.$$

Доказать, что

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}}{\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}}.$$

**3.110.** Доказать, что если $f$ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого в пространстве $\mathbb{R}^n$ множества $G$ с якобианом, не обращающимся в нуль на множестве $G$, то:

1) Отображение $f$ локально взаимно однозначно, т. е. для любой точки $x \in G$ найдется окрестность с центром в этой точке, которая взаимно однозначно отображается на некоторую окрестность точки $f(x)$.

2) Образ $f(G)$ множества $G$ есть открытое множество.

3) Если $G$ — область, то $f(G)$ также является областью.

**3.111.** Привести пример непрерывно дифференцируемого отображения области, якобиан которого нигде в этой области не обращается в нуль и которое не взаимно однозначно.

---

## § 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и ряд Тейлора

**1. Частные производные высших порядков.** Пусть функция $u=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, в окрестности точки $x=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ имеет частную производную первого порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$. Тогда частную производную функции $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ по переменной $x_l$ называют *частной производной второго порядка* по переменным $x_k$ и $x_l$ и обозначают

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial x_k},\quad f''_{x_k x_l}\ \text{или}\ f_{x_k x_l}.$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_l\,\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right).$$

В случае $l=k$ производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_k}$ обозначают $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$.

*Частной производной порядка* $m\in\mathbb{N}$ называют частную производную первого порядка по какой-либо переменной от любой частной производной порядка $m-1$ (при этом под частной производной нулевого порядка понимается сама функция). Например, для частных производных третьего порядка по определению имеем

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right),$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right)\quad \text{и т. д.}$$

Частную производную по различным переменным называют *смешанной частной производной.* Например, для функции двух переменных могут существовать четыре производные второго порядка: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и две смешанные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$.

Теорема 1. Если две смешанные производные порядка $m$, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, непрерывны в некоторой точке, то их значения в этой точке совпадают.

Функцию, все частные производные которой до некоторого порядка $m$ включительно непрерывны в некоторой точке (или на некотором множестве), называют *$m$ раз непрерывно дифференцируемой* в этой точке (соответственно на этом множестве).

**2. Дифференциалы высших порядков.** Дифференциалы высших порядков для функции нескольких переменных определяются так же, как и в случае функции одной переменной (см. [1], § 15, п. 2).

Пусть функция $u = f(x;\ y)$ дважды непрерывно дифференцируема на некотором множестве $G \subset \mathbb{R}^2$. Ее дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

есть функция четырех переменных: $x$, $y$, $dx$, $dy$. При фиксированных $dx$ и $dy$ дифференциал $du$ является функцией только $x$ и $y$. Для этой функции вычислим дифференциал, причем в качестве приращений $\Delta x$ и $\Delta y$ независимых переменных возьмем те же самые приращения, которые были выбраны при нахождении первого дифференциала. Вычисленный при этом условии дифференциал от первого дифференциала называют *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* функции $u = f(x;\ y)$ и обозначают $d^2u$ или $d^2f$.

Таким образом, по определению

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,dy\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2,$$

или, учитывая равенство (при сделанных относительно функции $u = f(x;\ y)$ предположениях) смешанных производных, получим

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{1}$$

Аналогично в случае, когда функция $u = f(x;\ y)$ является $m$ раз непрерывно дифференцируемой, ее дифференциал порядка $m$ определяется как первый дифференциал от дифференциала порядка $m - 1$ при условии, что при вычислении первого дифференциала в качестве приращений независимых переменных берутся те же приращения, которые использовались при вычислении $(m-1)$-го дифференциала. При этом условии имеем

$$d^m u = d\left(d^{m-1}u\right).$$

Для дифференциала порядка $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$d^m u = \sum_{k=1}^{m} C_m^k\,\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-k}\,\partial y^k}\,dx^{m-k}\,dy^k. \tag{2}$$

Замечание. Для сложной функции $w = f(x;\ y)$, где $x = x(u;\ v)$, $y = y(u;\ v)$ второй дифференциал функции $u$, вообще говоря, не выражается через $dx$ и $dy$ согласно формуле (1).

Следовательно, для дифференциалов порядка $m \geqslant 2$ (в отличие от дифференциала первого порядка) не имеет места свойство инвариантности формы дифференциала относительно выбора переменных. Для сложной функции $w = f(x(u; v);\ y(u; v))$ формула (1) обобщается следующим образом:

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial w}{\partial y}\,d^2y. \quad (3)$$

Если $x$ и $y$ — независимые переменные, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, и формула (3) совпадает с формулой (1).

В случае функции $n$ переменных $u = f(x_1; \ldots; x_n)$ формула, аналогичная формуле (1), имеет вид

$$d^2u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\,dx_k^2 + 2 \sum_{\substack{i,\,k=1\\ i<k}}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\,dx_i\,dx_k. \quad (4)$$

Формула (2) обобщается на случай функции $n$ переменных $u = f(x_1; \ldots; x_n)$ следующим образом:

$$d^m u = \sum C_m^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,dx_1^{\alpha_1} \ldots dx_n^{\alpha_n}, \quad (5)$$

где

$$C_m^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} = \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!},$$

а суммирование производится по всем целым неотрицательным $\alpha_i$ таким, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = m$.

Пример 1. Найти второй дифференциал функции $u = xe^y$, если: а) $x$ и $y$ — функции каких-либо независимых переменных и их вторые дифференциалы $d^2x$ и $d^2y$ известны; б) $x$ и $y$ — независимые переменные.

△ а) 1-й способ. По определению второго дифференциала получаем

$$d^2u = d\,(d\,(xe^y)) = d\,(e^y\,dx + xe^y\,dy) =$$
$$= d\,(e^y)\,dx + e^y\,d^2x + d\,(xe^y)\,dy + xe^y\,d^2y =$$
$$= 2e^y\,dx\,dy + xe^y\,dy^2 + e^y\,d^2x + xe^y\,d^2y.$$

2-й способ. Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = e^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y,$$

то, согласно формуле (3), находим

$$d^2u = 2e^y\,dx\,dy + xe^y\,dy^2 + e^y\,d^2x + xe^y\,d^2y.$$

б) В этом случае $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, и, следовательно,

$$d^2u = 2e^y\,dx\,dy + xe^y\,dy^2. \ ▲$$

Пример 2. Для каждой дифференцируемой функции $u(x; y)$, заданной неявно уравнением

$$2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8=0,$$

найти $d^2u(2; 0)$.

△ В окрестности точки $(2; 0)$ уравнением определяются две дифференцируемые функции; их значения в этой точке равны 1 и 16. Частные производные функции

$$F(x; y; u)=2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8$$

соответственно равны

$$F'_x=4x-8u, \quad F'_y=4y, \quad F'_u=2u-8x-1.$$

По формулам (11) § 3 находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4\frac{2u-x}{2u-8x-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-4y}{2u-8x-1}.$$

Дифференцируя первое равенство по $x$, второе по $x$ и $y$, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{(2u-8x-1)\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)-(2u-x)\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-8\right)}{(2u-8x-1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=4y\frac{2\frac{\partial u}{\partial x}-8}{(2u-8x-1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4\frac{(2u-8x-1)-2y\frac{\partial u}{\partial y}}{(2u-8x-1)^2}.$$

В точке $(2; 0; 1)$ значения найденных производных равны

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{4}{15}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{4}{15};$$

следовательно, если $u(2; 0)=1$, то

$$d^2u=\frac{4}{15}(dx^2+dy^2).$$

В точке $(2; 0; 16)$ производные равны

$$\frac{\partial u}{\partial x}=8, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{4}{15}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=-\frac{4}{15}.$$

Поэтому, если $u(2; 0)=16$, то

$$d^2u=-\frac{4}{15}(dx^2+dy^2). \quad ▲$$

Пример 3. Преобразовать уравнение

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв за новые независимые переменные

$$u=x, \quad v=xy.$$

△ Применяя правило дифференцирования сложной функции, найдем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по $x$ и $y$, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}+x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial z}{\partial v}+x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+y\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Подставляя найденные значения производных в данное уравнение, будем иметь

$$x\frac{\partial z}{\partial v}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+x^2y\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-yx^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-x\frac{\partial z}{\partial v}=0,$$

т. е. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$, или окончательно $u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. ▲

---

**4.1.** Найти частные производные второго порядка функции $f(x;\,y)$, если:

1) $f=xy(x^3+y^3-3)$. 2) $f=e^{xy}$.

3) $f=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. 4) $f=x^y$.

**4.2.** Вычислить частные производные второго порядка функции $f(x;\,y)$ в заданной точке:

1) $f=\frac{x}{x+y}$, $(1;\,0)$. 2) $f=y^2(1-e^x)$, $(0;\,1)$.

3) $f=\ln(x^2+y)$, $(0;\,1)$. 4) $f=y\sin(y/x)$, $(2;\,\pi)$.

5) $f=\cos(xy-\cos y)$, $(0;\,\pi/2)$. 6) $f=\operatorname{arctg}(x/y)$, $(1;\,1)$.

7) $f=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1;\,-1)$. 8) $f=(xy)^{x+y}$, $(1;\,1)$.

**4.3.** Выяснить, существуют ли в точке $(0;\,0)$ частные производные второго порядка функции

$$f=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x^2+y^2=0.\end{cases}$$

**4.4.** Вычислить в точке $(0;\,0)$ частные производные $f''_{xy}$, $f''_{yx}$ функции

$$f=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{если}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если}\quad x^2+y^2=0.\end{cases}$$

**4.5.** Пусть функция $f$ и ее производные $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xy}$ определены в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ и $f''_{xy}$ непрерывна в этой точке. Доказать, что в точке $(x_0;\ y_0)$ существует производная $f''_{yx}$, причем

$$f''_{yx}(x_0;\ y_0) = f''_{xy}(x_0;\ y_0).$$

**4.6.** Найти частные производные второго порядка функции $f(x;\ y;\ z)$, если:

1) $f = x(1 + y^2z^3)$. 2) $f = \sin(x + y + z)$.

**4.7.** Вычислить частные производные второго порядка функции $f(x;\ y;\ z)$ в заданной точке:

1) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $(1;\ 1;\ 1)$.

2) $f = x^{y^z}$, $(e;\ 1;\ 1)$.

**4.8.** Найти частную производную $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial x^2}$, если:

1) $f = \dfrac{x^4 + 8xy^3}{x + 2y}$. 2) $f = \ln(x + y)$.

3) $f = \sin(x + \cos y)$. 4) $f = \cos(e^{2y} - 2x)$.

**4.9.** Найти частную производную $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, если

1) $f = \sqrt{xy^3z^5}$. 2) $f = x^3\sin y + y^3\sin z + z^3\sin x$.

3) $f = e^{xyz}$. 4) $f = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y + z - xyz}{1 - xy - yz - zx}$.

**4.10.** Найти частную производную $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3\,\partial x_4}$ функции

$$f = \ln\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2}}.$$

**4.11.** Найти смешанную производную $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\,\partial y^q}$, если

1) $f = (x - a)^p(y - b)^q$, $a,\ b \in \mathbb{R}$. 2) $f = \dfrac{x + y}{x - y}$.

3) $f = (x^2 + y^2)e^{x+y}$. 4) $f = \ln(x^x y^y)$.

**4.12.** Вычислить $\dfrac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\,\partial y^q}$ в точке $(0;\ 0)$, если

$$f = e^x \sin y.$$

**4.13.** Найти частную производную $\dfrac{\partial^{p+q+r} f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}$ функции

$$f = xyze^{x+y+z}.$$

**4.14.** Найти второй дифференциал функции $f(x;\ y)$, если

1) $f = x(1 + y)$. 2) $f = x\sin^2 y$.

3) $f = \dfrac{1}{y}e^{xy}$. 4) $f = y\ln x$.

5) $f = \ln(x^2 + y^2)$. 6) $f = \arcsin xy$.

**4.15.** Найти второй дифференциал функции $f(x;\ y)$ в указанной точке:

1) $f=e^{xy}$, $(1;\ -1)$. 2) $f=e^{x^2/y}$, $(1;\ 1)$.

3) $f=\dfrac{x}{y}e^{x^2}$, $(0;\ 1)$. 4) $f=x^2\operatorname{ch}3y-y^2$, $(0;\ 0)$.

5) $f=x\cos xy$, $(\pi/2;\ -1)$. 6) $f=4y^2+\sin^2(x-y)$, $(0;\ 0)$.

7) $f=(2x+y)\ln(x/y)$, $(1;\ 1)$. 8) $f=e^{y\ln x}$, $(2;\ 1)$.

9) $f=e^{xy-\pi\sin y}$, $(0;\ 0)$. 10) $f=\ln\dfrac{2-y-x^2}{2+y+x^2}$, $(1;\ 0)$.

11) $f=\operatorname{arctg}(x^2-2y)$, $(1;\ 0)$. 12) $f=y\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+2y}$, $(0;\ 0)$.

13) $f=(x+y)^{xy}$, $(1;\ 0)$. 14) $f=(\sin x)^{\cos y}$, $(\pi/6;\ \pi/2)$.

**4.16.** Найти множество точек плоскости, для которых верно неравенство $d^2f\geqslant 0$, если:

1) $f=x^2+y^2-xy-7y$. 2) $f=\sqrt{x^2+y^2}$.

3) $f=\cos(x+y)$.

**4.17.** Найти второй дифференциал функции $f(x;\ y;\ z)$, если:

1) $f=xy+yz+xz$. 2) $f=\ln(x+y+z)$.

**4.18.** Найти в точке $(0;\ 0;\ 0)$ второй дифференциал функции $f$, если:

1) $f=x^4+2y^3+3z^2-2xy+4xz+2yz$.

2) $f=(1+x)^\alpha(1+y)^\beta(1+z)^\gamma$, $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}$.

**4.19.** Найти в точке $(1;\ 1;\ 1)$ второй дифференциал функции $f$, если:

1) $f=z/(x^2+y^2)$. 2) $f=(x/y)^{1/z}$.

**4.20.** Найти в точке $(1;\ 1;\ \ldots;\ 1)$ второй дифференциал функции

$$f=\ln\sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

**4.21.** Найти $d^3f$, если:

1) $f=x^2y$. 2) $f=x^3+y^3+3xy(y-x)$.

3) $f=\sin(x^2+y^2)$. 4) $f=xyz$.

**4.22.** Найти в указанной точке $d^3f$, если:

1) $f=e^{x^2y}$, $(0;\ 1)$. 2) $f=\sin(2x+y)$, $(0;\ \pi)$.

3) $f=x\cos y+y\sin x$, $(0;\ 0)$.

4) $f=x^4+xy^2+yz^2+zx^2$, $(0;\ 1;\ 2)$.

**4.23.** Найти $d^4f$, если:

1) $f=\cos(x+y)$. 2) $f=\ln(x^xy^yz^z)$.

**4.24.** Найти в точке $(\pi;\ 0)$ дифференциал шестого порядка функции
$$f = \cos x \operatorname{ch} y.$$

**4.25.** Найти дифференциал порядка $n$ функции $f$, если:

1) $f = e^{ax+by}$. 2) $f = \ln(x + y + z)$.

**4.26.** Доказать, что если $P_n(x;\ y;\ z)$ — однородный многочлен степени $n$, то
$$d^n P_n(x;\ y;\ z) = n!\, P_n(dx;\ dy;\ dz).$$

Найти $d^4 f$, если:

1) $f = x^4 + 4x^3y + 2xy^2z - 3xyz^2$.

2) $f = x^4 + 5x^3y - x^2y + z^3 + xz^3$.

**4.27.** Пусть $f$ — дважды дифференцируемая функция. Найти второй дифференциал функции $\varphi$, если:

1) $\varphi(x;\ y) = f(u)$, $u = x + y$.

2) $\varphi(x;\ y) = f(u)$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) $\varphi(x;\ y;\ z) = f(u)$, $u = xyz$.

4) $\varphi(x;\ y) = f(u;\ v;\ w)$, $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$, $w = 2xy$.

**4.28.** 1) Доказать, что *двумерному уравнению Лапласа*
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
удовлетворяют следующие функции:

а) $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$,

б) $u = x \operatorname{ch} x \sin y + y \operatorname{sh} x \cos y$,

в) $u = \operatorname{arctg}(y/x)$,

г) $u = \ln r$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.

2) Найти функцию $\varphi(t)$, если известно, что функция $u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

3) Доказать, что если функция $u(x;\ y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция
$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2};\ \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$
также удовлетворяет этому уравнению.

**4.29.** 1) Доказать, что функция
$$u = 1/r, \quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$
удовлетворяет *трехмерному уравнению Лапласа*:
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2) Доказать, что если функция $u(x;\ y;\ z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{x}{r^2};\ \frac{y}{r^2};\ \frac{z}{r^2}\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

также удовлетворяет этому уравнению.

3) Доказать, что если функции $u_1(x;\ y;\ z)$, $u_2(x;\ y;\ z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа, то функция

$$v=u_1+(x^2+y^2+z^2)\,u_2$$

удовлетворяет *бигармоническому уравнению*

$$\Delta(\Delta v)=\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}=0.$$

**4.30.** Доказать, что функция

$$u=1/r^{n-2},\quad n>2,\quad r=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-a_k)^2},$$

удовлетворяет *n-мерному уравнению Лапласа*

$$\Delta u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=0.$$

**4.31.** Доказать, что функция

$$u=\frac{C_1e^{-kr}+C_2e^{kr}}{r},$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $k$, $C_1$, $C_2$ — постоянные, удовлетворяет *уравнению Гельмгольца*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^2u.$$

**4.32.** 1) Доказать, что функция

$$u(t;\ x)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-x^2/(4a^2t)}$$

удовлетворяет *уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2) Доказать, что если функция $u(t;x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, то функция

$$v(t;\ x)=\frac{1}{a\sqrt{t}}\,e^{-x^2/(4a^2t)}u\left(\frac{x}{a^2t};\ -\frac{1}{a^4t}\right)$$

также удовлетворяет этому уравнению.

**4.33.** Доказать, что функция

$$u(t;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\, e^{-r^2/(4a^2t)}, \quad r^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

удовлетворяет *n-мерному уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

**4.34.** Доказать, что функция

$$u(t;\ x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{ix^2/(4t)}$$

удовлетворяет *уравнению Шрёдингера*

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

**4.35.** 1) Пусть $f$ и $g$ — дважды дифференцируемые функции. Доказать, что функция

$$u(x;\ y) = f(x) + g(y)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

2) Найти функцию $u(x;\ y)$, удовлетворяющую условиям:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad u(x;\ x) = x, \quad \dfrac{\partial u(x,\ x)}{\partial x} = x^2;$

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = x + y, \quad u(x;\ 0) = \sin x,\ u(0;\ y) = y.$

**4.36.** Доказать, что *одномерному волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

удовлетворяют следующие функции:

1) $u = \dfrac{x}{x^2 - a^2t^2}$.

2) $u = A \sin \omega x \cos a\omega t.$

3) $u = f(x + at) + g(x - at)$, где $f$ и $g$ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

**4.37.** Найти функцию $u(t;\ x)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(t;\ 2t) = t, \quad \frac{\partial u(t;\ 2t)}{\partial t} = t^2.$$

**4.38.** Доказать, что функция

$$u(t;\ x;\ y) = \frac{1}{\sqrt{a^2t^2 - x^2 - y^2}}$$

удовлетворяет *двумерному волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

**4.39.** Пусть $f$ и $g$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Доказать, что функция $u$ удовлетворяет данному уравнению:

1) $u = xf(x+y) + yg(x+y)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2) $u = f(x+2t)\,e^{x/2-t} + g(x-2t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

3) $u = f(xy) + \sqrt{xy}\,g(y/x)$,

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4) $u = \dfrac{f(x-t) + g(x+t)}{x}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

5) $u = f\left(x + 2\sqrt{-y}\right) + g\left(x - 2\sqrt{-y}\right)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ y < 0.$$

6) $u = f(xy) + g(x/y)$,

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y\frac{\partial u}{\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x}.$$

7) $u = f(x)\,g(y)$, $\quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

8) $u = f(x + g(y))$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

**4.40.** 1) Доказать, что $n$ раз дифференцируемая однородная степени $\alpha$ (§ 2, (1)) в области $G \subset \mathbb{R}^3$ функция $f$ удовлетворяет в области $G$ уравнению

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)f.$$

2) Вычислить

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f,$$

если $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $x^2+y^2+z^2 > 0$.

**4.41.** Найти в указанной точке частные производные второго порядка функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $2x^2+2y^2+u^2-8xu-u+8=0$, $(2;\ 0;\ 1)$.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{u^2}{c^2}=1$, $(a;\ b;\ c)$.

**4.42.** Найти частные производные второго порядка функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $eu=e^{x+y+u}$. 2) $u=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{u-x}$.

**4.43.** Найти в указанной точке второй дифференциал функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $2xyu^2+(4y^3-2x^3)u+3x^2y^2-4=0$, $(2;\ 1;\ 2)$.

2) $u^3-3xyu-2=0$, $(1;\ 1;\ 2)$.

**4.44.** Найти второй дифференциал функции $u(x;\ y)$, заданной неявно уравнением:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{u^2}{c^2}=1$. 2) $x+y+u=e^u$.

3) $u=\ln(yu-x)$. 4) $\frac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}=\operatorname{tg}\frac{u}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

**4.45.** Пусть уравнением:

1) $f(xu;\ yu)=0$, 2) $f(x;\ x+y;\ x+y+u)=0$,

где $f$ — дважды дифференцируемая функция, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x;\ y)$. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

**4.46.** Пусть уравнением:

1) $f(x+u;\ y+u)=0$, 2) $f(x/u;\ y/u)=0$,

где $f$ — дважды дифференцируемая функция, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x;\ y)$. Найти $d^2u(x;\ y)$.

**4.47.** Доказать, что если уравнением

$$y=xf(u)+g(u),$$

где $f$ и $g$ — дважды дифференцируемые функции, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x;\ y)$, то она удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

**4.48.** Пусть $u=F(v)$, где $v(x;y)$ — функция, определяемая неявно уравнением

$$v=x+yf(v).$$

Доказать *формулу Лагранжа*

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f^n\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

**4.49.** Найти $\frac{\partial^2 w(3;\ 3)}{\partial x\, \partial y}$, если $w = u(x;\ y)\, v(x;\ y)$, а функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u + v^2 = x, \\ u^2 - v^3 = y, \quad u(3;\ 3) = 2, \quad v(3;\ 3) = 1. \end{cases}$$

**4.50.** Найти в точке $(0;\ \pi/2)$ дифференциалы $d^2u$, $d^2v$, если функции $u(x;\ y)$ и $v(x;\ y)$ заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ \dfrac{\sin u}{\sin v} = \dfrac{x}{y}, \quad u(0;\ \pi/2) = \pi, \quad v(0;\ \pi/2) = -\pi/2. \end{cases}$$

**4.51.** Преобразовать уравнение к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 2) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

3) $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

**4.52.** Преобразовать уравнение, принимая $u$ и $v$ за новые независимые переменные:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $u = x - at$, $v = x + at$.

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

$u = y - 3x$, $v = y + 2x$.

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $u = x^2$, $v = x + y$.

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a^2 z = 0$, $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$.

5) $2(x + y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $u = x$, $v = \sqrt{x + y}$.

6) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $u = xy$, $v = y/x$.

7) $3x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

$u = xy$, $v = xy^3$.

8) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

$u = x/y$, $v = y$.

9) $(1 + x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,

$u = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $v = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$.

10) $\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

$u = y\,\mathrm{tg}(x/2)$, $v = y$.

**4.53.** Решить уравнение, введя новые независимые переменные $u$, $v$:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 4\dfrac{\partial z}{\partial x} - 12\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0,$

$$u = y + 3x, \quad v = y + x.$$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}, \;\; x > 0,$

$$u = y - x^2, \quad v = y + x^2.$$

**4.54.** Доказать, что уравнение Лапласа

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

не изменяется при любой замене независимых переменных

$$x = x(u;\ v), \quad y = y(u;\ v),$$

удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} \neq 0.$$

**4.55.** Преобразовать уравнение, принимая $u$ и $v$ за новые независимые переменные:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,\;\; u = x + z,\;\; v = y + z.$

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \left(1 + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^3,\;\; u = x,\;\; v = y + z.$

**4.56.** Преобразовать уравнение, принимая $w(x;\ y)$ за новую функцию:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\dfrac{\partial z}{\partial x} + b\dfrac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,\;\; z = we^{-(bx+ay)},$

$a$, $b$, $c$ — постоянные.

2) $z\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2,\;\; w = z^2.$

**4.57.** Преборазовать уравнение, принимая $u$, $v$ за новые независимые переменные и $w$ за новую функцию:

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$

$$u = x, \quad v = x + y, \quad w = x + y + z.$$

2) $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x},\;\; yu = x,\;\; v = x,\;\; w = xz - y.$

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = z,$

$$2u = x + y, \quad 2v = x - y, \quad w = e^y z.$$

4) $(1 - x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 - y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y},$

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = e^w.$$

5) $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{4}z,\ |x|<1,$

$$2u=y+\arccos x,\quad 2v=y-\arccos x,\quad w=(1-x^2)^{1/4}z.$$

6) $q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$

где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$; $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$.

**4.58.** Введя новые независимые переменные

$$u=x+y,\quad v=y/x$$

и новую функцию $w=z/x$, решить уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

**4.59.** Преобразовать уравнения:

1) $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$

2) $p^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2pq\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+q^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

приняв за новые независимые переменные $y$ и $z$, а за новую функцию $x$.

**4.60.** Преобразовать уравнения, приняв за новые независимые переменные $u$, $v$, $t$:

1) $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}+4\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0,$

$$u=x,\quad 2v=x+y+z,\quad 2t=3x+y-z.$$

2) $4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$

$$u=\frac{x}{2},\quad v=\frac{x}{2}+y,\quad t=-\frac{x}{2}-y+z.$$

**4.61.** Преобразовать уравнение, принимая за новые независимые переменные $y_1$, $y_2$, $y_3$:

1) $\sum\limits_{i\leqslant j=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=0,$

$$y_1=-x_1+x_2+x_3,\quad y_2=x_1-x_2+x_3,\quad y_3=x_1+x_2-x_3.$$

2) $\sum\limits_{i,\,j=1}^{3}x_ix_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=0,$

$$y_1=x_2/x_1,\quad y_2=x_3/x_1,\quad y_3=x_2-x_3.$$

**4.62.** Преобразовать уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

к сферическим координатам, полагая

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi.$$

**4.63.** Преобразовать уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_{k+1}}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

принимая за новые независимые переменные

$$y_i=\sum_{k=1}^{i}x_k,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

**4.64.** Преобразовать уравнение

$$\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

при условии $\dfrac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial(x,\ y)}\neq 0$, применяя преобразование Лежандра, т. е. принимая за новые независимые переменные $u=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $v=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, а $w=xu+yv-z$ за новую функцию.

---

**3. Формула Тейлора и ряд Тейлора.** Пусть функция $f(x;\ y)$ в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ имеет непрерывные производные до порядка $m$ включительно. Тогда в этой окрестности справедлива формула

$$f(x;\ y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f(x_0;\ y_0)}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i}(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i+o(\rho^m),\tag{6}$$

где

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad x\to x_0,\ y\to y_0.$$

Многочлен

$$P_m(x;\ y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\frac{\partial^k f(x_0;\ y_0)}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i}(x-x_0)^{k-i}(y-y_0)^i\tag{7}$$

называют *многочленом Тейлора m-го порядка* функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$, а функцию

$$r_m(x;\ y)=f(x;\ y)-P_m(x;\ y)$$

— *остаточным членом m-го порядка* формулы Тейлора.

Формулу (6) называют *формулой Тейлора $m$-го порядка функции $f(x;\ y)$ в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ с остаточным членом в форме Пеано.* В частном случае, при $x_0 = y_0 = 0$, формулу (6) называют также *формулой Маклорена*. Формулу (6) можно записать и в таком виде:

$$f = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \frac{\partial^k f(x_0;\ y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\alpha_2}} (x-x_0)^{\alpha_1} (y-y_0)^{\alpha_2} + o(\rho^m), \tag{8}$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad x \to x_0, \quad y \to y_0.$$

Если функция $f(x;\ y)$ имеет в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ непрерывные производные до $(m+1)$-го порядка включительно, то для любой точки $(x;\ y)$ из этой окрестности найдется точка

$$(\xi;\ \eta) = (x_0 + \theta(x-x_0);\quad y_0 + \theta(y-y_0)), \quad 0 < \theta < 1,$$

такая, что

$$f(x;\ y) = \\ = P_m(x;\ y) + \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i=0}^{m+1} C_{m+1}^i \frac{\partial^{m+1} f(\xi;\ \eta)}{\partial x^{m+1-i}\,\partial y^i} (x-x_0)^{m+1-i} (y-y_0)^i, \tag{9}$$

где $P_m(x;\ y)$ — многочлен Тейлора (7).

Формулу (9) называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

Если функция $f(x;\ y)$ представима в виде (6), (8) или (9), то говорят, что она *разложена по формуле Тейлора* в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$.

Если функция $f(x;\ y)$ имеет в точке $(x_0;\ y_0)$ производные всех порядков, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0;\ y_0)}{\partial x^{k-i}\,\partial y^i} (x-x_0)^{k-i} (y-y_0)^i \tag{10}$$

называют *рядом Тейлора* функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$.

Если ряд (10) сходится в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$ к функции $f(x;\ y)$, то говорят, что в этой окрестности функция $f(x;\ y)$ *разлагается в ряд Тейлора.* В частном случае, при $x_0 = y_0 = 0$, ряд (10) называют *рядом Маклорена.*

Формула (10) может быть записана и в следующем виде:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} \frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \frac{\partial^k f(x_0;\ y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\alpha_2}} (x-x_0)^{\alpha_1} (y-y_0)^{\alpha_2}. \tag{11}$$

Для функций трех и более переменных формула Тейлора и ряд Тейлора определяются аналогично. Например, формула, аналогичная формуле (11), т. е. ряд Тейлора функции $f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в точке $(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, имеет вид

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}\sum\frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!}\frac{\partial^k f(x_1^0; \ldots; x_n^0)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}(x_1-x_1^0)^{\alpha_1}\ldots(x_n-x_n^0)^{\alpha_n}, \tag{12}$$

где суммирование $\sum$ производится по всем целым неотрицательным $\alpha_i$ таким, что $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=k$.

Пример 4. Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^5)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, функцию

$$f=\sin x\,\mathrm{sh}\,2y.$$

$\triangle$ 1-й способ. Функция $f$ в точке (0; 0) равна нулю. Из всех ее производных до пятого порядка включительно в точке (0; 0) отличны от нуля только смешанная производная второго порядка и две смешанные производные четвертого порядка, причем

$$\frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x\,\partial y}=2, \quad \frac{\partial^4 f(0;0)}{\partial x^3\,\partial y}=-2, \quad \frac{\partial^4 f(0;0)}{\partial x\,\partial y^3}=8.$$

Согласно формуле (6), положив в ней $m=5$, $x_0=y_0=0$, получаем

$$f=\frac{1}{2!}C_2^1 2xy+\frac{1}{4!}\left(C_4^1(-2)x^3y+C_4^3 8xy^3\right)+o(\rho^5)=$$
$$=2xy-\frac{1}{3}x^3y+\frac{4}{3}xy^3+o(\rho^5).$$

2-й способ. Воспользуемся известными разложениями функций $\sin x$ и $\mathrm{sh}\,2y$ по формуле Маклорена. Тогда получим

$$f=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(2y+\frac{8y^3}{6}+o(y^4)\right)=$$
$$=2xy-\frac{1}{3}x^3y+\frac{4}{3}xy^3+o(\rho^5). \quad \blacktriangle$$

---

**4.65.** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x; y)$ в окрестности заданной точки:

1) $f(x; y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$, $(-2; 1)$.

2) $f(x; y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y$, $(1; -2)$.

3) $f(x; y)=x^3-2y^3+3xy$, $(1; 2)$.

4) $f(x; y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y$, $(2; -1)$.

**4.66.** Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(x_0; y_0)$ функцию

$$f(x; y)=ax^2+2bxy+cy^2,$$

$a$, $b$, $c$ — постоянные.

**4.67.** Разложить по формуле Тейлора функцию $f(x;\ y;\ z)$ в окрестности заданной точки:

1) $f(x;\ y;\ z)=(x+y+z)^2$, $(1;\ 1;\ -2)$.

2) $f(x;\ y;\ z)=x^2+3z^2-2yz-3z$, $(0;\ 1;\ 2)$.

3) $f(x;\ y;\ z)=xyz$, $(1;\ 2,\ 3)$.

4) $f(x;\ y;\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $(1;\ 0;\ 1)$.

**4.68.** Выписать члены до второго порядка включительно формулы Тейлора для функции $f(x;\ y)$ в окрестности заданной точки:

1) $f(x;\ y)=1/(x-y)$, $(2;\ 1)$.

2) $f(x;\ y)=\sqrt{x+y}$, $(2;\ 2)$.

3) $f(x;\ y)=\operatorname{arctg}(x/y)$, $(1;\ 1)$.

4) $f(x;\ y)=\sin x\cos y$, $(x_0;\ y_0)$.

**4.69.** Разложить функцию $f(x;\ y)=x\sqrt{1+y}$ по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$; записать остаточный член второго порядка в форме Лагранжа.

**4.70.** Разложить функцию $f(x;y)$ в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ по формуле Тейлора до $o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$; записать остаточный член 2-го порядка в форме Лагранжа, если:

1) $f(x;\ y)=\sin x\sin y$, $x_0=y_0=\pi/4$.

2) $f(x;\ y)=x^y$, $x_0=y_0=1$.

**4.71.** Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, функцию $f$, если:

1) $f(x;\ y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$. 2) $f(x;\ y)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1+y}$.

3) $f(x;\ y)=\sqrt{\dfrac{(1+x)^\alpha+(1+y)^\beta}{2}}$, $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

**4.72.** Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, функцию

$$f(x;\ y;\ z)=\cos x\cos y\cos z-\cos(x+y+z).$$

**4.73.** Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(0;\ 0;\ 1)$ до $o(\rho^2)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}$, функцию

$$f(x;\ y)=\ln(xy+z^2).$$

**4.74.** Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^4)$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, функцию $f$, если:

1) $f=\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$. 2) $f=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3) $f=\cos x\cos y$. 4) $f=\dfrac{\sin x}{\cos y}$.

5) $f=e^x\sin y$. 6) $f=e^{2x}\ln(1+y)$.

**4.75.** Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(0;\ 2)$ до $o(\rho^4)$, $\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$, функцию $f$, если:

1) $f = x/y$. 2) $f = \sin x \ln y$.

**4.76.** Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^m)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $m \in \mathbb{N}$, функцию

$$f = \frac{x-y}{(1-x)(1-y)}.$$

**4.77.** Разложить по формуле Маклорена до $o(\rho^{2m})$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $m \in \mathbb{N}$, функцию

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

**4.78.** Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ -1)$ до $o(\rho^m)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$, $m \in \mathbb{N}$, функцию

$$f = e^{x+y}.$$

**4.79.** Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ 1)$ до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, функцию $u(x;\ y)$, $u(1;\ 1) = 1$, заданную неявно уравнением:

1) $u^3 - 2xu + y = 0$.
2) $u^3 + 3yu - 4x = 0$.
3) $u^3 + yu - xy^2 - x^3 = 0$.

**4.80.** Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(2e;\ 1)$ до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{(x-2e)^2 + (y-1)^2}$, функцию $u(x;\ y)$, заданную неявно:

$$u(1 + \ln(u/y)) = x, \quad u(2e;\ 1) = e.$$

**4.81.** Пусть функция $f(x;\ y)$ в области $G$ имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно. Разложить по формуле Маклорена до $o(h^2)$ функцию

$$F(h) = \frac{f(x+h;\ y) + f\left(x - \frac{h}{2};\ y + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right) + f\left(x - \frac{h}{2};\ y - \frac{\sqrt{3}}{2}h\right)}{3},$$

$$(x;\ y) \in G.$$

**4.82.** Пусть функция $f(x;\ y)$ в области $G$ имеет непрерывные частные производные до 5-го порядка включительно. Разложить по формуле Маклорена до $o(h^5)$ функцию

$$F(h) = \frac{f(x+h;\ y) + f(x;\ y+h) + f(x-h;\ y) + f(x;\ y-h)}{4},$$

$$(x;\ y) \in G.$$

**4.83.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка $m$ включительно в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$, и пусть $P_m(x;\ y)$ — ее многочлен Тейлора в этой точке. Доказать, что если $Q(x;\ y)$ — какой-либо многочлен степени не выше $m$ такой, что

$$f(x;\ y) = Q(x;\ y) + o(\rho^k),\quad k \geqslant m,\quad \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0,$$

то $Q(x;\ y) = P_m(x;\ y)$.

**4.84.** Разложить в ряд Маклорена функцию $f$ и указать множество точек сходимости ряда, если:

1) $f = \dfrac{1-x+y}{1+x-y}$.  2) $f = \cos^2((x-y)/2)$.

3) $f = \sin x \sin y$.  4) $f = e^x \cos y$.

5) $f = \cos x \operatorname{ch} y$.  6) $f = \ln(1+x+y)$.

7) $f = \sqrt{1+x+y+xy}$.  8) $f = \operatorname{arctg} \dfrac{x-y}{1+xy}$.

**4.85.** Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $(x_0;\ y_0)$ функцию $f$ и указать множество точек сходимости ряда, если:

1) $f = x/y,\ x_0 = y_0 = 1$.

2) $f = \dfrac{1}{2-x-2y+xy},\quad x_0 = 1,\ y_0 = 0$.

3) $f = e^{x+y},\quad x_0 = y_0 = 2$.

4) $f = \sin(x+y),\quad x_0 = 0,\ y_0 = \pi/2$.

5) $f = \sin(x+y^2),\quad x_0 = \pi/2,\ y_0 = 0$.

6) $f = \ln(2-x+2y-xy),\quad x_0 = y_0 = 1$.

7) $f = \ln \dfrac{xy-y}{x-y},\quad x_0 = 0,\ y_0 = 1$.

8) $f = \ln x \ln y,\quad x_0 = y_0 = 1$.

**4.86.** Пусть функция $f(x;\ y)$ в области $G$ имеет производные всех порядков. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$F(u;\ v) = f(x+u;\ y+v) - f(x+u;\ y) - f(x;\ y+v) + f(x;\ y),\qquad (x;\ y) \in G.$$

---

## § 5. Экстремумы функций

**1. Локальный экстремум.** Точку $x^0$ называют *точкой локального максимума* функции $u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, если существует окрестность точки $x^0$, для всех точек $x$ которой верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(x^0).$$

Если для всех $x \neq x^0$ из некоторой окрестности точки $x^0$ верно строгое неравенство

$$f(x) < f(x^0),$$

то точку $x^0$ называют *точкой строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Аналогично, если в некоторой окрестности точки $x^0$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x^0),$$

то точку $x^0$ называют *точкой локального минимума*; если для всех $x \neq x^0$ из некоторой окрестности точки $x^0$ верно неравенство

$$f(x) > f(x^0),$$

то точку $x^0$ называют *точкой строгого локального минимума.*

Для краткости слово «локальный» часто опускают и пишут просто «точка минимума» или «точка строгого максимума».

Точки максимума и минимума функции называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках — *ее экстремумами*. Например, для функций $u = x^2 + y^2$ и $u = |x - y|$ точка (0; 0) является точкой минимума, причем для первой функции — точкой строгого минимума, а для второй — нестрогого.

Необходимые условия существования экстремума. Если точка $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ является точкой экстремума функции $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, то либо $f'_{x_i}(x^0) = 0$, либо $f'_{x_i}(x^0)$ не существует, $i = 1, 2, \ldots, n$. Точки, в которых функция определена, а ее частные производные равны нулю или не существуют, называют *критическими точками* функции. Например, для функции $u = f(x; y) = |y|$ все точки оси $x$ являются критическими, так как в каждой ее точке функция определена, частная производная $f'_x = 0$, а частная производная $f'_y$ не существует. Точки экстремума функции следует искать только среди ее критических точек.

Если у функции $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в точке экстремума существуют частные производные по всем переменным, то все они равны нулю в этой точке:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{1}$$

Условия (1) не являются достаточными условиями существования экстремума. Например, для функции $u = xy$ они выполняются в начале координат, однако эта точка не является точкой экстремума функции.

Точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (1), называют *стационарными точками* функции $u$. Точки экстремума дифференцируемой функции следует искать только среди ее стационарных точек.

Достаточные условия строгого экстремума. Пусть функция $u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $x^0$. Тогда точка $x^0$:

1) является точкой строгого минимума функции, если

$$d^2 f(x^0) \geqslant 0,$$

причем равенство имеет место только при условии

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = 0;$$

2) является точкой строгого максимума функции, если

$$d^2f(x^0) \leqslant 0,$$

причем равенство имеет место только при условии

$$\sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = 0;$$

3) не является точкой экстремума, если $d^2f(x^0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Эти условия не являются необходимыми. Например, функция $u = x^4 + y^4$ имеет в точке (0; 0) строгий минимум, хотя условие 1) не выполнено, так как $d^2u(0;\ 0) = 0$ при любых $dx$ и $dy$.

Условия 1), 2), 3) означают соответственно, что квадратичная относительно дифференциалов независимых переменных $dx_i$ форма

$$d^2f(x^0) = \sum_{i,\ j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{2}$$

положительно определенная, отрицательно определенная, неопределенная.

Согласно критерию Сильвестра (см., например, [20]), условие 1) выполняется тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\, \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_1\, \partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \tag{3}$$

квадратичной формы (2) положительны; условие 2) выполняется тогда и только тогда, когда главные миноры нечетного порядка отрицательны, а четного порядка положительны.

В частном случае функции двух переменных достаточные условия строгого экстремума можно сформулировать следующим образом. Пусть функция $u = f(x;\ y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $(x_0;\ y_0)$. Тогда точка $(x_0;\ y_0)$:

1) является точкой строгого минимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

2) является точкой строгого максимума, если в этой точке

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0;$$

3) не является точкой экстремума, если в этой точке

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} < 0.$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию двух переменных

$$u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$$

△ Найдем частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 39, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy - 36.$$

Согласно необходимым условиям экстремума (формулы (1)) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем все стационарные точки: (3; 2), (—3; —2), (2; 3), (—2; —3). Вычислим частные производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x.$$

Матрица (3) в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры $\Delta_1$ и $\Delta_2$ равны

$$\Delta_1 = 6x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2 - y^2).$$

В точке (3; 2) они положительны; следовательно, в этой точке функция имеет строгий минимум $u(3;\ 2) = -100$. В точке (—3; —2) минор 1-го порядка отрицателен, 2-го порядка положителен; следовательно, в этой точке функция имеет строгий максимум $u(-3;\ -2) = 152$. В точках (2; 3) и (—2; —3) минор 2-го порядка отрицателен, поэтому в этих стационарных точках экстремума нет. ▲

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию трех переменных

$$u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1.$$

△ Найдем частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x}=9x^2+6y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+6x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z-2.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 3x^2+2y=0,\\ y+3x=0,\\ z-1=0,\end{cases}$$

найдем стационарные точки (2; —6; 1) и (0; 0; 1). Вычислим частные производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=18x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=6,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=0.$$

Матрица (3) в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 18x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

В точке (2; —6; 1) ее главные миноры

$$\Delta_1=18x,\quad \Delta_2=36(x-1),\quad \Delta_3=72(x-1)$$

положительны. Следовательно, в этой точке функция имеет минимум $u(2;\ -6;\ 1)=-12$. Для исследования функции в точке (0; 0; 1) нельзя использовать критерий Сильвестра, так как $\Delta_1=0$. Легко видеть, что в этой точке экстремума нет. В самом деле, $u(0;\ 0;\ 1)=0$, а в сколь угодно малой окрестности точки (0; 0; 1) функция принимает как положительные, так и отрицательные значения. Например, $u(\varepsilon;0;1)>0$, если $\varepsilon>0$, и $u(\varepsilon;\ 0;\ 1)<0$, если $\varepsilon<0$. ▲

---

Исследовать функцию $u(x;\ y)$ на экстремум (**5.1—5.8**):

**5.1.** 1) $u=x^2+xy+y^2-12x-3y$.

2) $u=3+2x-y-x^2+xy-y^2$.

3) $u=3x+6y-x^2-xy+y^2$.

4) $u=4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1$.

**5.2.** 1) $u=3(x^2+y^2)-x^3+4y$.

2) $u=3x^2y+y^3-12x-15y+3$.

3) $u=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$.

4) $u=3x^3+y^3-3y^2-x-1$.

5) $u=x^3+y^3+3axy$.

**5.3.** 1) $u = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$.

2) $u = x^4 + y^4 - 2x^2$.

3) $u = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

4) $u = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

5) $u = xy^2(12 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$.

6) $u = x^2y^3(6 - x - y)$.

**5.4.** 1) $u = \dfrac{x + y}{xy} - xy$.

2) $u = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.

3) $u = 81\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) - (x^2 + xy + y^2)$.

4) $u = xy + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}$.

**5.5.** 1) $u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$.

2) $u = x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x}$, $x > -1$, $y > -1$.

3) $u = 1 + x^2 + \sqrt[3]{(y + 2)^2}$.

4) $u = 1 + y^2 - \sqrt[5]{(x - 2)^4}$.

5) $u = xy\sqrt{12 - 4x^2 - y^2}$.

6) $u = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

**5.6.** 1) $u = (x + y^2)\,e^{x/2}$.

2) $u = (x^2 - 2y^2)\,e^{x-y}$.

3) $u = (8x^2 - 6xy + 3y^2)\,e^{2x+3y}$.

4) $u = (5 - 2x + y)\,e^{x^2-y}$.

5) $u = \dfrac{x^3}{3} + 3x^2e^y - e^{-y^2}$.

6) $u = (25 - 5x - 7y)\,e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

7) $u = (ax^2 + by^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$, $a > 0$, $b > 0$.

**5.7.** 1) $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

2) $u = 108\ln x - xy^2 + \dfrac{1}{3}y^3$.

3) $u = x^2 + y^2 - 32\ln(xy)$.

4) $u = xy\ln(x^2 + y^2)$.

**5.8.** 1) $u = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$, $x \in (0;\ \pi/2)$, $y \in (0;\ \pi/2)$.

2) $u = \sin x \sin y \sin(x + y)$, $x \in (0;\ \pi)$, $y \in (0;\ \pi)$.

3) $u = x + y + 4\sin x \sin y$.

4) $u = (1 + e^y)\cos x - ye^y$.

**5.9.** Найти все стационарные точки функции

$$u = x^4 + y^4 - 2x^2$$

и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточные условия строгого экстремума?

**5.10.** Доказать, что функция

$$u = (y^2 - x)(y^2 - 2x)$$

1) вдоль каждой прямой, проходящей через точку (0; 0), имеет в этой точке минимум;

2) не имеет минимума в точке (0; 0).

**5.11.** Может ли непрерывно дифференцируемая функция $u(x; y)$ иметь бесконечное множество строгих максимумов и ни одного минимума?

**5.12.** Верно ли утверждение: если непрерывно дифференцируемая функция $u(x; y)$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, имеет только одну стационарную точку $(x_0; y_0)$, в которой у нее локальный минимум, то справедливо неравенство $u(x; y) \geqslant u(x_0; y_0)$, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$?

Исследовать функцию $u(x; y; z)$ на экстремум (**5.13—5.15**):

**5.13.** 1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$.

2) $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$.

3) $u = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$.

4) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z$.

5) $u = xyz(16 - x - y - 2z)$.

6) $u = xy^2z^3(49 - x - 2y - 3z)$.

**5.14.** 1) $u = \dfrac{xy + xz^2 + y^2z}{xyz} + x + 1$.

2) $u = \dfrac{256}{x} + \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{z} + z^2$.

3) $u = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}$. 4) $u = \dfrac{x^2}{yz} + \dfrac{y^2}{xz} + \dfrac{z^2}{xy}$.

**5.15.** 1) $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$,

$x, y, z \in (0; \pi)$.

2) $u = (x + 7z)\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

3) $u = 2\ln x + 3\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

**5.16.** Исследовать функцию $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на экстремум:

1) $u = x_1 x_2^2 \ldots x_n^n \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} k x_k\right)$.

2) $u = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$, $x_0 = a > 0$, $x_{n+1} = b > 0$.

**5.17.** Исследовать на экстремум непрерывно дифференцируемую функцию $u=u(x;\ y)$, заданную неявно условиями:

1) $x^2+y^2+u^2-4x-6y-4u+8=0, \quad u>2.$
2) $25x^2+y^2+16u^2-50x+64u-311=0, \quad u<-2.$
3) $x^2+4y^2+9u^2-6x+8y-36u=0, \quad u>2.$
4) $(x^2+y^2+u^2)^2=8(x^2+y^2-u^2), \quad u>0.$
5) $(x^2+y^2+u^2+9)^2=100(x^2+y^2), \quad u<0.$

**5.18.** Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u=u(x;\ y)$, заданную неявно уравнением:

1) $x^2+y^2+u^2+2x-2y+4u-3=0.$
2) $2x^2+2y^2+u^2+8yu-u+8=0.$
3) $x^3-y^2+u^2-3x+4y+u-8=0.$
4) $(x^2+y^2)^2+u^4-8(x^2+y^2)-10u^2+16=0.$

---

**2. Условный экстремум.** Пусть на открытом множестве $G\subset\mathbb{R}^n$ заданы функции

$$f(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x), \quad m<n,$$

и пусть $E$ — множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_1(x)=0,\ \ldots,\ \varphi_m(x)=0. \tag{4}$$

Уравнения (4) называют *уравнениями связи* или *ограничениями*. Точку $x^0\in E$ называют *точкой условного строгого максимума* функции $f(x)$ относительно уравнений связи (4), если существует такая окрестность точки $x^0$, для всех точек $x\neq x^0$ которой, удовлетворяющих уравнениям связи, верно неравенство $f(x)<f(x^0)$. Если при тех же условиях выполняется неравенство $f(x)>f(x^0)$, то точку $x^0$ называют *точкой условного строгого минимума* функции $f(x)$ при ограничениях (4).

Например, функция $u=(x;\ y)=xy$ относительно уравнения связи $\varphi(x;\ y)=y-x=0$ в точке $(0;\ 0)$ имеет условный строгий минимум, так как $u(0;\ 0)=0$, а в точках $(\varepsilon;\ \varepsilon)$, $\varepsilon\neq0$, принадлежащих уравнению связи $y-x=0$, значения функции положительны: $u(\varepsilon;\ \varepsilon)=\varepsilon^2>0$.

Аналогично вводится понятие нестрогого условного экстремума.

Точки условного максимума и минимума называют *точками условного экстремума*. Значения функции в этих точках — ее *условными экстремумами*. Условный экстремум иногда называют *относительным экстремумом*.

Прямой метод нахождения точек условного экстремума (метод исключения). Если уравнения связи

$$\varphi_i(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{5}$$

удается разрешить относительно каких-то $m$ переменных, например относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$, т. е.

$$\begin{gathered} x_1=g_1(x_{m+1};\ \ldots;\ x_n),\\ x_2=g_2(x_{m+1};\ \ldots;\ x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_m=g_m(x_{m+1};\ \ldots;\ x_n), \end{gathered}$$

то исследование функции $u=f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$ на условный экстремум при ограничениях (5) сводится к исследованию на обычный (безусловный) экстремум функции $n-m$ переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$:

$$u=f(g_1;\ \ldots;\ g_m;\ x_{m+1};\ \ldots;\ x_n).$$

Пример 3. Найти условные экстремумы функции $u=xyz$ относительно уравнений связи

$$x+y+z=6,\quad x+2y+3z=6.$$

△ Разрешим уравнения связи относительно переменных $x$ и $y$: $x=z+6$, $y=-2z$. Подставив найденные значения $x$ и $y$ в выражение для $u$, сведем задачу к исследованию на обычный (безусловный) экстремум функции

$$u=-2z^2(z+6);$$

так как $u'=-6z(z+4)$, $u''=-12(z+2)$, $u''(0)=-24$, $u''(-4)=24$, то в точке $z=0$ функция имеет максимум $u=0$, а в точке $z=-4$ — минимум $u=-64$. Следовательно, исходная функция при заданных ограничениях имеет один условный максимум $u(6;\ 0;\ 0)=0$ и один условный минимум $u(2;\ 8;\ -4)=-64$. ▲

Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Пусть функции

$$f(x),\ \varphi_i(x),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad m<n,$$

непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^0$ и ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{6}$$

в этой точке равен $m$. Функцию

$$L(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x)$$

называют *функцией Лагранжа*, параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — *множителями Лагранжа*. При сделанных предположениях можно сформулировать необходимые условия существования условного экстремума и достаточные условия наличия или отсутствия условного экстремума.

Необходимые условия. Для того чтобы точка $x^0$ являлась точкой условного экстремума функции $f(x)$, $x=(x_1; \ldots; x_n)$, при уравнениях связи $\varphi_i(x)=0$, $i=1, 2, \ldots, m$ необходимо, чтобы ее координаты при некоторых значениях $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x^0)}{\partial x_k}=0, \quad k=1, 2, \ldots, n, & (7) \\ \varphi_i(x^0)=0, \quad i=1, 2, \ldots, m. & (8) \end{cases}$$

Условия (7) и (8) означают соответственно, что точка $x^0$ является стационарной точкой функции Лагранжа и ее координаты удовлетворяют уравнениям связи.

Достаточные условия. Пусть функции $f(x)$, $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, m$, $x\in\mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^0$, и пусть в этой точке выполняются необходимые условия существования условного экстремума функции $f(x)$ при ограничениях (4).

Тогда, если при выполнении условий

$$d\varphi_i(x^0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i(x_0)}{\partial x_k}dx_k=0, \quad \sum_{k=1}^{n}dx_k^2>0 \tag{9}$$

второй дифференциал $d^2L(x^0)$ функции Лагранжа является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то функция $f(x)$ в точке $x^0$ имеет условный строгий минимум (максимум).

Если при условиях (9) второй дифференциал $d^2L(x^0)$ является неопределенной квадратичной формой, то в точке $x^0$ условного экстремума нет.

Пример 4. Найти условные экстремумы функции $u=f(x;\ y)=6-5x-4y$ относительно уравнения связи $\varphi(x;\ y)=x^2-y^2-9=0$.

△ Функции $f$ и $\varphi$ дважды непрерывно дифференцируемы. Матрица Якоби (6) в данном случае имеет вид $(2x \quad -2y)$, и ее ранг равен единице во всех точках, удовлетворяющих уравнению связи. Следовательно, можно применить метод Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(x;\ y)=6-5x-4y+\lambda(x^2-y^2-9).$$

Согласно необходимым условиям (7), (8) получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 - y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

из которой находим $x = -5$, $y = 4$ при $\lambda = -1/2$ и $x = 5$, $y = -4$ и $\lambda = 1/2$. Таким образом, функция $f$ может иметь условный экстремум только в двух точках: $(-5; 4)$ и $(5; -4)$. Вычислим второй дифференциал функции Лагранжа. Так как

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda,$$

то

$$d^2L = 2\lambda (dx^2 - dy^2).$$

Найдем первый дифференциал функции $\varphi$:

$$d\varphi = x dx - y dy.$$

В точках $(-5; 4)$ и $(5; -4)$ дифференциалы $dx$ и $dy$ связаны равенством $5dx + 4dy = 0$ (условие (9)). При выполнении этого условия второй дифференциал функции Лагранжа в точке $(-5; 4)$ является положительно определенной квадратичной формой

$$d^2L = \frac{9}{16} dx^2,$$

а в точке $(5; -4)$ — отрицательно определенной формой

$$d^2L = -\frac{9}{16} dx^2.$$

Следовательно, функция $f$ в точке $(-5; 4)$ имеет условный минимум $u(-5; 4) = 15$, а в точке $(5; -4)$ — условный максимум $u(5; -4) = -3$. ▲

---

**5.19.** Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относительно заданного уравнения связи:

1) $u = xy$, $x + y - 1 = 0$.

2) $u = x^2 + y^2$, $3x + 2y - 6 = 0$.

3) $u = x^2 - y^2$, $2x - y - 3 = 0$.

4) $u = xy^2$, $x + 2y - 1 = 0$.

5) $u = \cos^2 x + \cos^2 y$, $x - y - \pi/4 = 0$.

**5.20.** Относительно уравнения связи $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$:

1) $u = xy$. 2) $u = x^2 + y^2$.

3) $u = x^2 - y^2$. 4) $u = xy^2$.

**5.21.** Найти условные экстремумы функции $u=f(x;\ y)$ относительно заданного уравнения связи:

1) $u=5-3x-4y,\ x^2+y^2=25.$

2) $u=1-4x-8y,\ x^2-8y^2=8.$

3) $u=x^2+xy+y^2,\ x^2+y^2=1.$

4) $u=2x^2+12xy+y^2,\ x^2+4y^2=25.$

5) $u=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b},\ x^2+y^2=r^2,\ r>0.$

**5.22.** Исследовать функцию $u=f(x;\ y)$ на условный экстремум при заданных уравнениях связи (выяснить, можно ли при этом использовать метод Лагранжа?):

1) $u=(x-1)^2+(y+1)^2,$

а) $x^2+y^2-2xy=0,$ б) $x-y=0.$

2) $u=x^4+y^4,\ (x-1)^3-y^2=0.$

**5.23.** Исследовать функцию $u=f(x;\ y)$ на условный экстремум при заданных уравнениях связи:

1) $u=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\quad \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{8}.$

2) $u=\ln xy,\quad x^3+xy+y^3=0.$

**5.24.** Верно ли для непрерывно дифференцируемых функций $f(x;\ y)$, $\varphi(x;\ y)$ следующее утверждение: точка условного локального экстремума функции $f(x;\ y)$ относительно уравнения связи $\varphi(x;\ y)=0$ является стационарной точкой функции Лагранжа

$$L(x;\ y)=f(x;\ y)+\lambda\varphi(x;\ y)?$$

**5.25.** Найти условные экстремумы функции $u=f(x;\ y;\ z)$ при заданном уравнении связи:

1) $u=2x^2+3y^2+4z^2,\ x+y+z=13.$

2) $u=xy^2z^3,\ x+y+z=12,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

3) $u=x^2y^3z^4,\ 2x+3y+4z=18,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

4) $u=\sin x\sin y\sin z,\ x+y+z=\pi/2,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

5) $u=x-2y+2z,\ x^2+y^2+z^2=9.$

6) $u=x-y+2z,\ x^2+y^2+2z^2=16.$

7) $u=xyz,\ x^2+y^2+z^2=3.$

8) $u=xy+2xz+2yz,\ xyz=108.$

9) $u=x^2+y^2+z^2,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ a>b>c>0.$

10) $u=x+y+z,\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=1,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$

**5.26.** Найти условные экстремумы функции $u=f(x;\ y;\ z)$ при заданных уравнениях связи:

1) $u=xyz,\ x+y-z=3,\ x-y-z=8.$

2) $u=xyz,\ xy+yz+zx=8,\ x+y+z=5.$

3) $u=xy+yz,\ x^2+y^2=2,\ y+z=2,\ y>0.$

4) $u=x^2+y^2+z^2,\ \dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0.$

5) $u=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2,\ x^2+y^2+z^2=21,$
$3x+2y+z=0.$

6) $u=\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2,\ x^2+y^2+z^2=1,\ x+2y+3z=0.$

**5.27.** Найти условные экстремумы функции $u=f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $n>1$, при заданном уравнении связи:

1) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^2,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1,\ a_i>0.$

2) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{a_i}=1,\ a_i>0.$

3) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha},\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=a,\ \alpha>0,\ a>0.$

4) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i}{x_i},\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i=1,\ a_i>0,\ b_i>0,\ x_i>0.$

5) $u=\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i},\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i=a,\ \alpha_i>0,\ a>0.$

6) $u=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=1.$

---

**3. Наибольшее и наименьшее значения функции.** Для функции, непрерывной на ограниченном замкнутом множестве, существуют на этом множестве точка, в которой функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение (*теорема Вейерштрасса*). Функция, дифференцируемая в ограниченной области и непрерывная на ее границе, достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо в стационарных точках, либо в граничных точках области.

---

Найти наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения функции $u$ на заданном множестве (5.28—5.33):

**5.28.** 1) $u=xy+x+y,\ -2\leqslant x\leqslant 2,\ -2\leqslant y\leqslant 4.$

2) $u=x^2-xy+y,\ |x|\leqslant 2,\ |y|\leqslant 3.$

3) $u = x^2 + y^2 - 4x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant y \leqslant 3.$

4) $u = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2.$

5) $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad |y| \leqslant 1.$

6) $u = x + |x - y|, \quad |x| \leqslant 1, \quad |y| \leqslant 2.$

7) $u = x^2 - xy + y^2, \quad |x| + |y| \leqslant 1.$

8) $u = (x + y) e^{xy}, \quad -2 \leqslant x + y \leqslant 1.$

**5.29.** 1) $u = 1 + x + 2y, \quad x + y \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

2) $u = x + 3y, \quad x + y \leqslant 6, \quad x + 4y \geqslant 4, \quad y \leqslant 2.$

3) $u = x^2 - 2y + 3, \quad y - x \leqslant 1, \quad x \leqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

4) $u = x^2 + y^2 - xy - x - y, \quad x + y \leqslant 3, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

5) $u = xy(6 - x - y), \quad x + y \leqslant 12, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

6) $u = \sin x + \sin y - \sin(x + y), \quad x + y \leqslant 2\pi, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

**5.30.** 1) $u = 3 + 2xy,$ а) $x^2 + y^2 \leqslant 1;$ б) $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9.$

2) $u = (x - 6)^2 + (y + 8)^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 25.$

3) $u = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2x.$

4) $u = x^2 y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$

5) $u = y^4 - x^4, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9.$

6) $u = (y^2 - x^2) e^{1 - x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant 4.$

**5.31.** 1) $u = x + 2y + 3z, \quad x + y \leqslant 3, \quad x + y \leqslant z,$

$$3x + 3y \geqslant z, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

2) $u = 3z - y - 2x, \; x + y \geqslant 2, \; 3x + y \leqslant 6, \; 0 \leqslant z \leqslant 3, \; x \geqslant 0.$

3) $u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1.$

4) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100.$

**5.32.** $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2, \; \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 \leqslant 1.$

**5.33.** 1) $u = x + y - z, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad y + z = 1.$

2) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; x + 2y + 3z = 0.$

3) $u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

4) $u = y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 4yz, \quad 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1.$

**5.34.** Найти наибольшее $M$ и наименьшее $m$ значения функции $u$:

1) $u = (xy - 1)^2 + y^2.$

2) $u = |x + y| - \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

3) $u = (2x^2 + y^2) e^{1 - x^2 - y^2}$

4) $u = (x^2 + y^2 + z^2) e^{-(x^2 + 2y^2 + 3z^2)}.$

**5.35.** Верно ли утверждение: если $P(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — многочлен, то $|P(x)|$ достигает в $\mathbb{R}^n$ своего наименьшего значения?

**5.36.** Доказать, что наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki},$$

на сфере $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ равны наибольшему и наименьшему корню характеристического уравнения матрицы $(a_{ik})$.

**5.37.** Найти расстояние между кривой и прямой:

1) $y = x^2, \quad x - y - 5 = 0$.

2) $x^2 - y^2 = 3, \quad y - 2x = 0$.

3) $9x^2 + 4y^2 = 36, \quad 3x + y - 9 = 0$.

4) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0, \quad 9x - 7y + 16 = 0$.

**5.38.** Найти точку, для которой сумма квадратов расстояний от прямых $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 16 = 0$ наименьшая.

**5.39.** Найти наименьшую площадь треугольника, описанного около эллипса с полуосями $a$ и $b$ так, что одна из сторон треугольника параллельна большой оси эллипса.

**5.40.** Найти полуоси эллипса $7x^2 - 6xy + 7y^2 = 8$.

**5.41.** Найти наибольшее расстояние от центра эллипса с полуосями $a$ и $b$ до его нормалей.

**5.42.** На плоскости $x + y - 2z = 0$ найти точку, сумма квадратов расстояний которой от плоскостей $x + 3z - 6 = 0$ и $y + 3z - 2 = 0$ была бы наименьшей.

**5.43.** Найти расстояние от точки $(0; 3; 3)$ до кривой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

**5.44.** Найти расстояние между поверхностями

$$\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 12z = 288.$$

**5.45.** Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если:

1) поверхность его равна $S$;

2) сумма длин ребер равна $a$.

**5.46.** Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, вписанный:

1) в полусферу радиуса $R$;

2) в прямой круговой конус, радиус основания которого равен $r$, а высота — $H$;

3) в эллипсоид, полуоси которого равны $a$, $b$, $c$;

4) в сегмент эллиптического параболоида

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = h, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad h > 0.$$

**5.47.** Определить наибольшую вместимость цилиндрического ведра, поверхность которого (без крышки) равна $S$.

**5.48.** Определить наибольшую вместимость конической воронки, поверхность которой равна $S$.

**5.49.** Определить наибольшую вместимость цилиндрической ванны с полукруглым поперечным сечением, если поверхность ванны равна $S$.

**5.50.** Найти наибольший объем тела, образованного вращением треугольника с периметром $p$ вокруг одной из его сторон.

**5.51.** Найти наименьшую поверхность, которую может иметь прямоугольный параллелепипед, если его объем равен $V$.

**5.52.** Определить наименьшее количество материала, необходимого для изготовления шатра, заданного объема $V$ и имеющего форму цилиндра с конической крышей.

**5.53.** Тело представляет собой две пирамиды и прямоугольный параллелепипед, основания которого совмещены с основаниями двух одинаковых правильных пирамид. При каком угле наклона боковых граней пирамид к их основаниям поверхность такого тела будет наименьшей, если его объем равен $V$?

**5.54.** Определить размеры открытого прямоугольного аквариума с заданной толщиной стенок $d$ и емкостью $V$, на изготовление которого потребуется наименьшее количество материала.

**5.55.** Найти площадь плоской фигуры, ограниченной эллипсом ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$):

$$1) \left\{ \begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1. \end{aligned} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{aligned} Ax + By + Cz &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1. \end{aligned} \right.$$

**5.56.** Число $a > 0$ разложено на $n$ положительных множителей так, что:

1) сумма их кубов наименьшая;
2) сумма их обратных величин наименьшая.

Найти значения суммы.

**5.57.** Пусть физические величины $x$ и $y$ связаны неизвестной линейной зависимостью $y = ax + b$. В результате $n$ измерений получены с некоторой погрешностью следующие пары значений: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$. Согласно принципу наименьших квадратов, наиболее вероятными значениями коэффициентов $a$ и $b$ считаются те, при которых

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

достигает наименьшего значения. Найти наиболее вероятные значения $\bar{a}$, $\bar{b}$ для коэффициентов $a$ и $b$.

**5.58.** В результате последовательных центральных соударений абсолютно упругих шаров с массами $M > m_n > m_{n-1} > \ldots$ $\ldots > m_1 > m$ тело с массой $m$ приобретает скорость

$$v = \frac{m_1}{m + m_1} \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdots \frac{m_n}{m_{n-1} + m_n} \frac{M}{m_n + M} 2^{n+1} V,$$

где $V$ — скорость тела с массой $M$. Как следует выбрать массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, чтобы тело массы $m$ приобрело наибольшую скорость? Найти значение наибольшей скорости.

**5.59.** Для системы материальных точек $(x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, \ldots, m_n$, найти точку $x; y)$, относительно которой момент инерции системы будет наименьшим.

**5.60.** Решить задачу 5.59 при дополнительном условии: точка $(x; y)$ должна лежать на окружности $x^2+y^2=1$.

**5.61.** Для системы материальных точек $(x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$ с массами, соответственно равными $m_1, \ldots, m_n$, найти прямую

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

относительно которой момент инерции системы будет наименьшим.

**5.62.** Если в электрической цепи, имеющей сопротивление $R$, течет ток $I$, то количество тепла $Q$, выделяющееся в единицу времени, определяется законом Джоуля — Ленца: $Q=Q_0I^2R$, $Q_0$ — const. Как следует разветвить ток $I$ на токи $I_1, \ldots, I_n$ при помощи $n$ проводов, сопротивления которых $R_1, \ldots, R_n$, чтобы выделение тепла было наименьшим? Найти наименьшее значение $Q$.

---

## § 6. Геометрические приложения

**1. Касательная плоскость и нормаль.** *Касательной плоскостью* к поверхности в некоторой ее точке называют плоскость, содержащую все касательные к кривым (см. [1], § 17), проведенным на поверхности через эту точку (*точку касания*). Прямую, проходящую через точку касания и перпендикулярную касательной плоскости, называют *нормальной прямой* (или *нормалью*) к поверхности в этой точке.

Если гладкая поверхность (см., например, [3], **50.4**, или [4], **7.19, 7.20**) задана уравнением

$$z=f(x; y),$$

то уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(x_0; y_0; z_0)$ поверхности имеют вид

$$z-z_0=f'_x(x_0; y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0; y_0)(y-y_0), \tag{1}$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0; y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0; y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{2}$$

Если гладкая поверхность задана неявно уравнением

$$F(x; y; z)=0,$$

то уравнения касательной плоскости и нормали в точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ поверхности записываются следующим образом:

$$F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)(y-y_0)+$$
$$+F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)(z-z_0)=0, \quad (3)$$

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)}. \quad (4)$$

В случае, когда гладкая поверхность задана параметрически уравнениями

$$x=x(u;\ v), \quad y=y(u;\ v), \quad z=z(u;\ v),$$

уравнения касательной плоскости и нормали в точке

$$x_0=x(u_0;\ v_0), \quad y_0=y(u_0;\ v_0), \quad z_0=z(u_0;\ v_0)$$

поверхности имеют вид

$$\begin{vmatrix} x-x(u_0;\ v_0) & y-y(u_0;\ v_0) & z-z(u_0;\ v_0) \\ x'_u(u_0;\ v_0) & y'_u(u_0;\ v_0) & z'_u(u_0;\ v_0) \\ x'_v(u_0;\ v_0) & y'_v(u_0;\ v_0) & z'_v(u_0;\ v_0) \end{vmatrix}=0, \quad (5)$$

$$\frac{x-x(u_0;\ v_0)}{\begin{vmatrix} y'_u(u_0;\ v_0) & z'_u(u_0;\ v_0) \\ y'_v(u_0;\ v_0) & z'_v(u_0;\ v_0) \end{vmatrix}}=\frac{y-y(u_0;\ v_0)}{\begin{vmatrix} z'_u(u_0;\ v_0) & x'_u(u_0;\ v_0) \\ z'_v(u_0;\ v_0) & x'_v(u_0;\ v_0) \end{vmatrix}}=$$
$$=\frac{z-z(u_0;\ v_0)}{\begin{vmatrix} x'_u(u_0;\ v_0) & y'_u(u_0;\ v_0) \\ x'_v(u_0;\ v_0) & y'_v(u_0;\ v_0) \end{vmatrix}}. \quad (6)$$

Направляющий вектор прямой (6) иногда записывают в виде

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad (7)$$

считая, что для такого «определителя» верна формула разложения по элементам первой строки.

*Углом между двумя поверхностями* в точке их пересечения называют угол между касательными плоскостями, проведенными к поверхностям в этой точке.

Поверхности называют *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом в каждой их точке пересечения.

Пример 1. Найти уравнения касательных плоскостей к поверхности

$$x^2+y^2-z^2+1=0$$

в точках пересечения ее с прямой $x=y=2$.

△ Прямая пересекает поверхность в точках $(2; 2; 3)$ и $(2; 2; -3)$. Находим частные производные функции $F=x^2+y^2-z^2+1$ в этих точках:

$$F'_x(2;\ 2;\ 3)=4,\qquad F'_y(2;\ 2;\ 3)=4,\qquad F'_z(2;\ 2;\ 3)=-6;$$

$$F'_x(2;\ 2;\ -3)=4,\quad F'_y(2;\ 2;\ -3)=4,\quad F'_z(2;\ 2;\ -3)=6.$$

По формуле (3) получаем

$$4(x-2)+4(y-2)-6(z-3)=0,$$

$$4(x-2)+4(y-2)+6(z+3)=0,$$

или

$$2x+2y-3z+1=0,\quad 2x+2y+3z+1=0. \ ▲$$

Пример 2. Написать уравнение нормали к винтовой поверхности

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v$$

в точке с параметрами $u=u_0$, $v=v_0$.

△ Так как

$$x'_u=\cos v,\qquad y'_u=\sin v,\quad z'_u=0;$$

$$x'_v=-u\sin v,\ y'_v=u\cos v,\quad z'_v=1,$$

то по формуле (6) получаем

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{\begin{vmatrix}\sin v_0 & 0\\ u_0\cos v_0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{y-u_0\sin v_0}{\begin{vmatrix}0 & \cos v_0\\ 1 & -u_0\sin v_0\end{vmatrix}}=\frac{z-v_0}{\begin{vmatrix}\cos v_0 & \sin v_0\\ -u_0\sin v_0 & u_0\cos v_0\end{vmatrix}},$$

т. е.

$$\frac{x-u_0\cos v_0}{\sin v_0}=\frac{y-u_0\sin v_0}{-\cos v_0}=\frac{z-v_0}{u_0}. \ ▲$$

---

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке (**6.1—6.3**):

**6.1.** 1) $z=xy$, $(2;\ 1;\ 2)$. 2) $z=x^2+y^2$, $(1;\ 1;\ 2)$.

3) $z=2x^2-4y^2$, $(-2;\ 1;\ 4)$.

4) $z=(x-y)^2-x+2y$, $(1;\ 1;\ 1)$.

5) $z=x^3-3xy+y^3$, $(1;\ 1;\ -1)$.

6) $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $(-3;\ 4;\ 17)$.

7) $z=\sqrt{x^2+y^4}$, $(0;\ 0;\ 0)$.

8) $z=x-y+\sqrt{|xy|}$, $(0;\ 0;\ 0)$.

9) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(0;\ 1;\ 0)$. 10) $z=\sin(x/y)$, $(\pi;\ 1;\ 0)$.

11) $z=e^{x\cos y}$, $(1;\ 0;\ e)$.

12) $z=\operatorname{arctg}(y/x)$, $(1;\ 1;\ \pi/4)$.

**6.2.** 1) $x^2+y^2+z^2=169$, $(3;\ 4;\ -12)$.

2) $xy^2+z^3=12$, $(1;\ 2;\ 2)$.

3) $x^3+y^3+z^3+xyz=6$, $(1;\ 2;\ -1)$.

4) $xyz(z^2-x^2)=5+y^5$, $(1;\ 1;\ 2)$.

5) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x+y+z-4$, $(2;\ 3;\ 6)$.

6) $e^z-z+xy=3$, $(2;\ 1;\ 0)$.

7) $z=y+\ln(x/z)$, $(1;\ 1;\ 1)$.

8) $2^{x/z}+2^{y/z}=8$, $(2;\ 2;\ 1)$.

**6.3.** 1) $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$, $(3;\ 5;\ 9)$.

2) $x=u$, $y=u^2-2uv$, $z=u^3-3u^2v$, $(1;\ 3;\ 4)$.

3) $x=u+\ln v$, $y=v-\ln u$, $z=2u+v$, $(1;\ 1;\ 3)$.

4) $x=\cos u\operatorname{ch} v$, $y=\sin u\operatorname{ch} v$, $z=\operatorname{sh} v$, $\left(\frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2}};\ \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2}};\ \operatorname{sh} 1\right)$.

**6.4.** Написать уравнение касательной плоскости к поверхности в заданной ее точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (*эллипсоид*).

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (*двуполостный гиперболоид*).

3) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ (*гиперболический параболоид*).

**6.5.** Написать уравнения нормали к поверхности в данной ее точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (*однополостный гиперболоид*).

2) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ (*эллиптический параболоид*).

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (*конус*).

**6.6.** Написать уравнение касательной плоскости к поверхности в данной точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ этой поверхности:

1) $x^n+y^n+z^n=a^n$, $n\in\mathbb{N}$, $a>0$.

2) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2+z^2)$, $a\neq 0$.

**6.7.** Написать уравнение касательной плоскости к поверхности:

1) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u$;

2) $x=3\cos u\cos v$, $y=2\cos u\sin v$, $z=\sin u$,

в точке с параметрами $u=u_0$, $v=v_0$. Выразить коэффициенты полученного уравнения через координаты $x_0$, $y_0$, $z_0$ точки касания.

**6.8.** Написать уравнение касательной плоскости к поверхности:

1) $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,$
$$z = a\sin\psi, \quad b \geqslant a > 0;$$

2) $x = \sin\varphi\cos\psi, \quad y = \sin\varphi\sin\psi, \quad z = \ln \operatorname{tg}(\varphi/2) + \cos\varphi$

в точке с параметрами $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$.

**6.9.** Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$$

в точках ее пересечения с прямой $x = 1$, $y = 2$.

**6.10.** Доказать, что поверхности

$$z = xy - x^2 + 8x - 5, \quad z = e^{x+2y+4}$$

касаются друг друга в точке $(2; -3; 1)$, и найти уравнение общей касательной плоскости.

**6.11.** Найти на поверхности точки, в которых касательные плоскости к ней параллельны координатным плоскостям:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$.

2) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$.

3) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$.

**6.12.** Написать уравнения тех касательных плоскостей к поверхности, которые параллельны данной плоскости:

1) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \quad x - y + 2z = 0$.

2) $z^2 + xy + xz = 1, \quad x - y + 2z = 1$.

3) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0, \quad x + 2y = 0$.

**6.13.** Написать уравнение касательной плоскости к поверхности, проходящей через точку $M$ и параллельной данной прямой:

1) $x^2 - y^2 = 3z, \quad M(0;\ 0;\ -1), \quad x = 2y = z$.

2) $90x^2 + 160y^2 + 576z^2 = 2880, \quad M(12;\ -3;\ -1),\ x = 0,\ y = 0$.

**6.14.** Написать для данной поверхности уравнение касательной плоскости, перпендикулярной данной прямой:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x, \quad \begin{cases} x - y - z = 2, \\ 2x - 2y - z = 4. \end{cases}$

2) $z = xy,\ x = y = -2z$.

**6.15.** Для поверхности

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0$$

написать уравнение касательной плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{0}.$$

**6.16.** Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

написать уравнение касательной плоскости, отсекающей на положительных полуосях координат равные отрезки.

**6.17.** Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$xyz=a^3, \quad a>0,$$

образуют с координатными плоскостями тетраэдры постоянного объема. Найти объем тетраэдров.

**6.18.** Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}, \quad a>0,$$

отсекают на координатных осях отрезки, сумма которых равна $a$.

**6.19.** Доказать, что касательные плоскости к поверхности

$$x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}, \quad a>0,$$

отсекают на координатных осях отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна $a^2$.

**6.20.** Найти расстояние от начала координат до касательной плоскости к поверхности

$$z=\operatorname{arctg}(y/x)$$

в ее точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

**6.21.** Доказать, что все плоскости, касательные к поверхности

$$z=xf(y/x),$$

где $f(u)$ — дифференцируемая функция, имеют общую точку.

**6.22.** Для поверхности

$$x^2-z^2-2x+6y-4=0$$

найти уравнения нормали, параллельной прямой

$$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ 3x-5y+3z+9=0. \end{cases}$$

**6.23.** На поверхности

$$x^2+5y^2-z^2-4xz+6x-20y-2z-1=0$$

найти точки, в которых нормаль к поверхности перпендикулярна плоскости $y=0$.

**6.24.** В каких точках эллипсоида

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{15}+\frac{z^2}{14}=1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

**6.25.** Найти углы, которые образует нормаль к поверхности

$$z = \operatorname{arctg}(x/y)$$

в точке $(1/4;\ 1/4;\ \pi/4)$, с осями координат.

**6.26.** Найти точку пересечения нормали в любой точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ поверхности вращения

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где $f(u)$ — дифференцируемая функция, $f'(u) \neq 0$, с осью вращения.

**6.27.** Определить, под каким углом пересекаются поверхности:

1) $z^2 = xy,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

2) $xy = az,\ x^2 + y^2 = b^2,\ b > 0.$

3) $xy = az,\ \sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{y^2+z^2} = b,\ b > 0.$

**6.28.** Доказать ортогональность поверхностей

$$xyz = a^3 \quad \text{и} \quad 2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2),$$

где $f(u)$ — дифференцируемая функция.

**6.29.** Найти углы между нормалями в точках, принадлежащих всем трем поверхностям

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} + z^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \quad \frac{x^2}{2} - y^2 - \frac{z^2}{6} = 1.$$

**6.30.** Доказать попарную ортогональность поверхностей:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2by,$
$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0.$

2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = bx, \quad x^2 + y^2 = c^2z^2,\ a > 0,\ c > 0.$

3) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad xy = bz^2, \quad 2x^2 + z^2 = c(2y^2 + z^2),$
$a > 0,\ c > 0.$

**6.31.** Доказать, что через каждую точку $(x;\ y;\ z)$, не лежащую на координатной плоскости, проходят три попарно ортогональные поверхности вида

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

— эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды.

**6.32.** К эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,$$

провести какую-либо касательную плоскость так, чтобы:

1) Сумма длин отрезков, отсекаемых ею на координатных осях, была наименьшей.

2) Центр тяжести треугольника, высекаемого на ней плоскостями координат, находился на наименьшем расстоянии от центра эллипсоида.

3) Тетраэдр, ограниченный ею и координатными плоскостями, имел наименьший объем.

---

**2. Особые точки плоских кривых.** Под *кривой, заданной уравнением*

$$F(x;\ y) = 0, \tag{8}$$

где $F$ — непрерывно дифференцируемая функция, будем понимать множество точек плоскости, координаты $x$, $y$ которых удовлетворяют этому уравнению.

Заметим, что это множество не обязательно будет являться непрерывным образом отрезка, и тем самым «кривая, заданная уравнением $F(x;\ y) = 0$», может не быть кривой в обычном смысле (см. [1], § 24, п. 2).

Точку $(x_0;\ y_0)$ будем называть *особой точкой уравнения* (8), если ее координаты удовлетворяют системе трех уравнений:

$$F(x;\ y) = 0, \quad F'_x(x;\ y) = 0, \quad F'_y(x;\ y) = 0. \tag{9}$$

Если в особой точке $(x_0;\ y_0)$ уравнения (8) все частные производные функции до $(k-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль, а среди производных $k$-го порядка по крайней мере одна отлична от нуля, то точку $(x_0;\ y_0)$ называют *особой точкой $k$-го порядка*.

Особая точка уравнения (8) может быть особой точкой кривой, заданной этим уравнением, т. е. такой точкой, в окрестности которой ни в одной системе координат кривая не является графиком непрерывно дифференцируемой функции. Для того чтобы точка $(x_0;\ y_0)$ была особой точкой кривой, заданной уравнением (8), необходимо, чтобы она была особой точкой этого уравнения, т. е. необходимо, чтобы ее координаты удовлетворяли системе (9). Это условие не является достаточным. Например, для уравнения $F = y^2 = 0$ точка $(0;\ 0)$ является особой, но кривая, определяемая этим уравнением (прямая $y = 0$), особых точек не имеет.

Поведение кривой (8) в окрестности особой точки второго порядка зависит от знака определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

в этой точке.

Если $\Delta > 0$, то точку называют *изолированной*. В некоторой окрестности изолированной особой точки нет других точек кривой (рис. 2, точка $(0;\ 0)$).

Если $\Delta < 0$, то точку называют *узловой* (*двойной*) *точкой* (рис. 3, точка $(0; 0)$).

Если в особой точке второго порядка определитель $\Delta = 0$, то характер поведения кривой (8) в окрестности такой точки

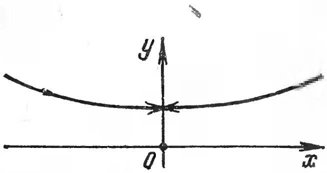


Рис. 2

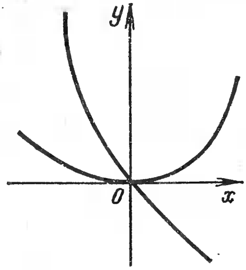


Рис. 3

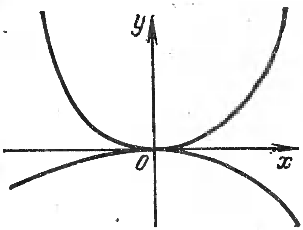


Рис. 4

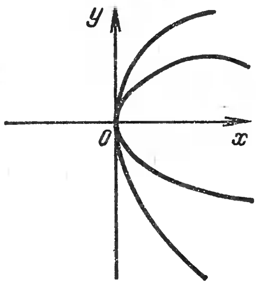


Рис. 5

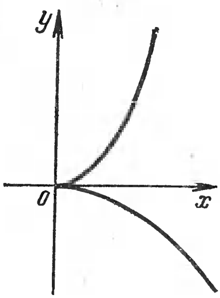


Рис. 6

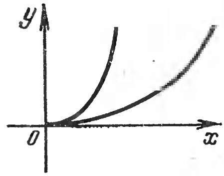


Рис. 7

может быть различный. Такая точка может быть *изолированной точкой* кривой, точкой *самоприкосновения* (рис. 4 и 5), *точкой возврата первого рода* (рис. 6), *точкой возврата второго рода* (рис. 7). Для определения типа особой точки в случае $\Delta = 0$ нужно изучить расположение точек кривой в некоторой ее окрестности.

Направления ($l$; $k$) касательных к кривой (8) в двойной особой точке ($x_0$; $y_0$) второго порядка находятся из уравнения

$$F''_{xx}(x_0;\ y_0)\,l^2+2F''_{xy}(x_0;\ y_0)\,lk+F''_{yy}(x_0;\ y_0)\,k^2=0. \qquad (10)$$

В случае, когда функция $F(x;\ y)$ не является дважды непрерывно дифференцируемой, кривая (8) может иметь особые точки и других типов, например *угловые точки* или *точки прекращения*.

Пример 3. Исследовать особые точки кривой, заданной уравнением

$$ax^2+x^3-y^2=0.$$

△ В данном случае $F(x;\ y)=ax^2+x^3-y^2$. Так как

$$F'_x=2ax+3x^2, \quad F'_y=-2y,$$

то система (9) для определения координат особых точек кривой имеет вид

$$ax^2+x^3-y^2=0, \quad 2ax+3x^2=0, \quad -2y=0.$$

Эта система при любом $a$ имеет единственное решение $x=0$, $y=0$. Следовательно, данная кривая может иметь только одну

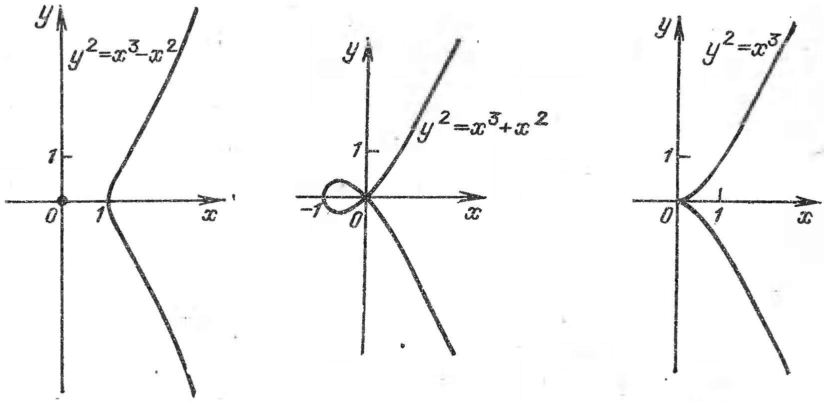


Рис. 8 Рис. 9 Рис. 10

особую точку (0; 0). Вычислим частные производные второго порядка функции $F$ в точке (0; 0):

$$F''_{xx}=2a, \quad F''_{xy}=0, \quad F''_{yy}=-2.$$

Так как $F''_{yy}\neq 0$, то при любом $a$ точка (0; 0) является особой точкой 2-го порядка. В точке (0; 0) определитель $\Delta=-4a$. Поэтому, если $a<0$, то $\Delta>0$, и, следовательно, точка (0; 0) является изолированной точкой кривой (рис. 8); если $a>0$, то $\Delta<0$, т. е. точка (0; 0) является узловой точкой (рис. 9). Если $a=0$, то $\Delta=0$. В этом случае у кривой $y^2=x^3$ в начале координат точка возврата первого рода (рис. 10). Уравнение (10) для данной кривой имеет вид $2al^2-2k^2=0$. При $a>0$

получаем, что касательные в узловой точке имеют направления $(1;\ \pm\sqrt{a})$. При $a=0$ касательная к кривой в точке возврата совпадает с осью $x$. При $a<0$ уравнение не имеет решений (кривая в изолированной точке не имеет касательной). ▲

---

Исследовать особые точки кривых, заданных уравнениями (**6.33**—**6.35**). Найти касательные в особых точках.

**6.33.** 1) $x^3+y^3-3xy=0$. 2) $x^3-2x^2y-y^2=0$.

3) $x^3+y^3-3x^2=0$. 4) $x^3-2x^2+x-y^2=0$.

5) $x^3-2x^2y+2xy^2+2x^2-2xy+x=0$.

6) $x^4+xy-y^4=0$. 7) $y^4+x^2y^2-4x^2=0$.

8) $x^4+y^4-x^2-y^2=0$. 9) $x^2y^2-(y+1)^2(4-y^2)=0$.

10) $x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0$.

11) $x^5-(y-2x^2)^2=0$. 12) $y^5+5y^4-4x^2=0$.

13) $x^6-(y-2)^4-x^2=0$. 14) $y^6-y^4+x^2=0$.

**6.34.** 1) $y^2=ax^2+x^5$.

2) $x(x^2+y^2)+a(y^2-x^2)=0,\quad a\neq 0$.

3) $(2a-x)y^2=x(x-a)^2,\quad a\neq 0$.

4) $(x^2+y^2)(y-a)^2-b^2y^2=0,\quad a>0,\ b>0$.

5) $y^2=x^3+ax+b$.

6) $y^2=(x-a)(x-b)(x-c),\quad a\leqslant b\leqslant c$.

**6.35.** 1) $x^{2/3}+y^{2/3}=2^{2/3}$. 2) $y^2=\sin x^2$.

3) $y^2=\sin^3 x$. 4) $y^2=1-e^{-x^2}$.

5) $y^2=1-e^{-x^3}$.

6) $y=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$

7) $y=\begin{cases} x\ln x, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0. \end{cases}$ 8) $y^x=x^y$.

**6.36.** Определить порядок $n$ особой точки $(0;\ 0)$ кривой и построить кривую в окрестности этой точки:

1) $x^4+2x^2y-xy^2+y^2=0$.

2) $x^4-6x^2y+25y^2-16x^2=0$.

3) $(x^2+y^2-6x)^2-(x^2+y^2)=0$.

4) $x^4+y^4-6y^3+8x^2y=0$.

5) $x^4+2y^3-4x^2y=0$. 6) $x^5+y^5-xy^2=0$.

7) $y^3-x^2y+x^5=0$. 8) $(x^2+y^2)^3-27x^2y^2=0$.

**6.37.** Определить порядок $n$ особой точки $(0;\ 0)$ уравнения

$$(y/3)^3 + (x/5)^5 = 0.$$

Имеет ли кривая, определяемая этим уравнением, особые точки?

---

**3. Огибающая.** Пусть семейство плоских кривых задано уравнением

$$F(x;\ y;\ C) = 0, \tag{11}$$

где $F$ — непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^3$ функция, $C$ — параметр семейства.

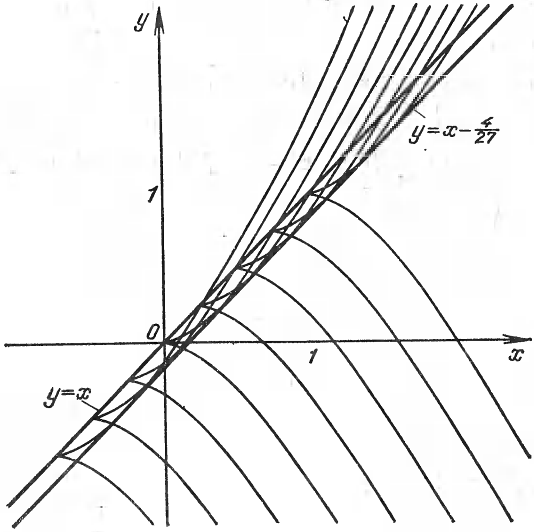


Рис. 11

*Огибающей семейства* (11) называют кривую, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной кривой семейства.

Если семейство кривых (11) имеет огибающую, то координаты ее точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x;\ y;\ C) = 0, \\ F'_C(x;\ y;\ C) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Системе (12), помимо точек огибающей, могут удовлетворять и другие точки кривых семейства (11).

*Дискриминантной кривой* семейства (11) называют кривую $D(x;\ y) = 0$, полученную из системы (12) исключением параметра $C$.

Аналогично определяется и находится огибающая семейства поверхностей.

Пример 4. Найти огибающую семейства кривых

$$(y-C)^2=(x-C)^3.$$

△ Система (12) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} (y-C)^2-(x-C)^3=0, \\ -2(y-C)+3(x-C)^2=0. \end{cases}$$

Исключая параметр $C$, получаем дискриминантную кривую

$$4(y-x)+27(y-x)^2=0,$$

т. е.

$$(y-x)(y-x+4/27)=0.$$

Прямая $y=x-4/27$ (рис. 11) является огибающей данного семейства кривых, прямая $y=x$ дает множество особых точек кривых семейства (точек возврата первого рода). ▲

---

**6.38.** Найти огибающую семейства прямых:

1) $y=Cx-C^2$. 2) $y=Cx+1/C$.

3) $y=Cx-\ln C$. 4) $y=Cx+\cos C$, $|C|<\pi/2$.

5) $y=Cx+f(C)$, $f$ — непрерывно дифференцируемая функция.

6) $x\cos C+y\sin C=p$, $p>0$.

7) $3(Cx-y)=C^3$. 8) $2C^2(y-Cx)=1$.

**6.39.** Найти огибающую семейства прямых, образующих с координатными осями треугольники постоянной площади $S$.

**6.40.** Найти огибающую семейства прямых, содержащих отрезок постоянной длины $a$, концы которого скользят по осям координат.

**6.41.** Доказать, что огибающая нормалей плоской кривой есть эволюта этой кривой.

**6.42.** На дугу окружности $x^2+y^2=a^2$, $x>0$, падает пучок параллельных лучей, направленных вдоль оси $x$. Найти катакаустику, т. е. огибающую отраженных лучей.

**6.43.** Найти огибающую семейства окружностей:

1) $(x-C)^2+y^2=R^2$. 2) $(x-C)^2+y^2=C^2/2$.

3) $(x-C)^2+(y-C)^2=C^2$.

4) $(x-C)^2+y^2=R^2-C^2$, $|C|\leqslant R/\sqrt{2}$.

**6.44.** Найти огибающую семейства окружностей, имеющих центры на параболе $y^2=2x$ и проходящих через ее вершину.

**6.45.** Найти огибающую семейства окружностей, построенных как на диаметрах на фокальных хордах параболы $y^2=8x$.

**6.46.** Найти огибающую семейства эллипсов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если сумма полуосей каждого эллипса постоянна и равна $d$.

**6.47.** Найти огибающую семейства парабол:

1) $y=\frac{(x+C-1)^2}{C}$. 2) $x=C+\frac{y^2}{C}$.

3) $y=x^2-2Cx-3C^2$. 4) $y^2=2Cx+C^2$; $C\neq 0$.

5) $y=C^2(x-C)^2$, $C\neq 0$. 6) $Cx^2+C^2y=1$.

**6.48.** Найти параболу безопасности, т. е. огибающую траекторий снарядов, выпущенных с начальной скоростью $v_0$ в вертикальной плоскости, при всевозможных углах бросания $\alpha$ (сопротивлением воздуха пренебречь).

**6.49.** Найти огибающую семейства кривых:

1) $y=\frac{C^2}{x-C}$. 2) $y=\frac{C}{x}-C^2$.

3) $x=\frac{y^4}{4C}+C$, $C>0$. 4) $\left(\frac{y-C}{3}\right)^3+\left(\frac{x+C}{5}\right)^5=0$.

5) $y=Ce^{x/C}$. 6) $y=Ce^{2x}+\frac{1}{C}$.

7) $y=x+\sin(x+C)$. 8) $y=C\cdot\operatorname{tg}x-C^2$.

**6.50.** Найти и исследовать дискриминантную кривую семейства кривых:

1) $C^2y=4(C+1)x$. 2) $y=(x-C)^3$.

3) $y^2=(x-C)^3$. 4) $y^3=(x-C)^2$.

5) $y-C=\left(\frac{x-C}{3}\right)^3$. 6) $\left(\frac{y+C}{5}\right)^5=\left(\frac{x+C}{7}\right)^7$.

7) $y=3Cx^{4/3}-C^3$. 8) $(2-x)(y-C)^2=x^2(2+x)$.

9) $x^3+(y-C)^3=3x(y-C)$. 10) $(y-(x-C)^2)^2=(x-C)^5$.

**6.51.** Найти огибающую семейства поверхностей:

1) $z=(x-1)\cos C+(y-2)\sin C$.

2) $x^2+y^2+(z-C)^2=R^2$.

3) $(x-C)^2+(y-C)^2+(z-C)^2=R^2$.

4) $(x-C)^2+(y-C)^2+(z-C)^2=C^2$, $C\neq 0$.

**6.52.** Найти огибающую сфер радиуса $R$, центры которых лежат:

1) на окружности $x^2+y^2=r^2$, $z=0$;

2) на конусе $x^2+y^2=z^2$.

**6.53.** Найти огибающую эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, имеющих постоянный объем $V$.

ГЛАВА II

# КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 7. Мера Жордана. Измеримые множества

*Разбиением* (иногда *сетью*) *ранга* $k$ пространства $\mathbb{R}^n$ называют совокупность всех замкнутых кубов вида

$$Q = \{x\colon m_i/10^k \leqslant x_i \leqslant (m_i+1)/10^k,\ i=1, \ldots, n\},$$

где $m_i$ — любые целые числа, $i = 1, \ldots, n$; сами эти кубы называют *кубами ранга* $k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Кубы в $\mathbb{R}^1$ являются отрезками, в $\mathbb{R}^2$ — *квадратами*.

Если два куба рангов $k_1$ и $k_2$ имеют общую точку, то либо один из этих кубов (большего ранга) содержится в другом, либо пересечение кубов является гранью одного из них или общей гранью обоих (при $k_1 = k_2$), в частности вершиной.

Число $10^{-kn}$ называют *мерой* куба ранга $k$ (*длиной* в $\mathbb{R}^1$, *площадью* в $\mathbb{R}^2$, *объемом* в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$) и обозначают $\mu(Q)$, т. е.

$$\mu(Q) = 10^{-kn}. \tag{1}$$

Вместо $\mu(Q)$ используют также обозначение $\operatorname{mes} Q$.

Мера объединения $S$ конечной совокупности $N$ кубов $Q_j$, $j = 1, \ldots, N$, одного ранга $k$ есть

$$\mu(S) = N \cdot 10^{-kn}. \tag{2}$$

Для объединения $S$ счетной совокупности кубов одного ранга полагают $\mu(S) = +\infty$.

Меру пустого множества считают равной нулю, т. е. $\mu(\varnothing) = 0$.

Для произвольного множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ объединение всех кубов ранга $k$, $k = 0, 1, \ldots,$ лежащих в $X$, будем обозначать $s_k(X)$, а объединение всех кубов ранга $k$, имеющих с X непустое пересечение, $S_k(X)$. Эти множества могут быть, в частности, и пустыми. Множество $S_k(X)$ иногда называют *покрытием* $X$ кубами ранга $k$. Верны включения

$$s_k(X) \subseteq X \subseteq S_k(X), \tag{3}$$

$$s_k(X) \subseteq s_{k+1}(X), \tag{4}$$

$$S_k(X) \supseteq S_{k+1}(X), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Обозначим для краткости $s_k = s_k(X)$ и $S_k = S_k(X)$. Из (4), (5), (2) следуют неравенства

$$\mu(s_k) \leqslant \mu(s_{k+1}), \quad \mu(S_k) \geqslant \mu(S_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Члены последовательностей $\mu(s_k)$ и $\mu(S_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, либо неотрицательные числа, либо $+\infty$. Если эти последовательности числовые, то в силу монотонности и неотрицательности они имеют пределы — неотрицательные числа или $+\infty$. Если среди членов последовательности $\mu(S_k)$ или $\mu(S_k)$ есть $+\infty$, то считают, что и ее предел есть $+\infty$.

Конечный или бесконечный предел последовательности $\mu(s_k(X))$ называют *внутренней* (или *нижней*) *мерой Жордана* множества $X$ и обозначают $\mu_*(X)$ или $\underline{\mu}(X)$, т. е.

$$\mu_*(X) \equiv \underline{\mu}(X) = \lim_{k \to +\infty} \mu(s_k(X)). \tag{7}$$

Конечный или бесконечный предел последовательности $\mu(S_k(X))$ называют *внешней* (или *верхней*) *мерой Жордана* множества $X$ и обозначают $\mu^*(X)$ или $\bar{\mu}(X)$, т. е.

$$\mu^*(X) \equiv \bar{\mu}(X) = \lim_{k \to +\infty} \mu(S_k(X)). \tag{8}$$

Определение меры Жордана. Если внутренняя и внешняя меры Жордана множества $X$ конечны и равны, т. е.

$$\mu_*(X) = \mu^*(X) = \mu(X), \tag{9}$$

то число $\mu(X)$ называют *мерой Жордана* множества $X$, а само множество называют *измеримым по Жордану*.

Мера Жордана пустого множества, как следует из этого определения, равна нулю, т. е. $\mu(\varnothing) = 0$.

Меру Жордана множества в $\mathbb{R}^1$ называют *длиной*, в $\mathbb{R}^2$ — *площадью*, в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — *объемом*.

Вместо термина «измеримое» в $\mathbb{R}^2$ употребляют также термин «*квадрируемое*», а в $\mathbb{R}^3$ — «*кубируемое*». Для указания размерности пространства меру Жордана множества $X$ в $\mathbb{R}^n$ иногда обозначают $\mu_n(X)$.

Для краткости часто будем говорить «мера» и «измеримое множество», подразумевая, если нет дополнительного указания, «мера Жордана» и «измеримое по Жордану множество».

Непосредственно из определения вытекают следующие простейшие свойства меры.

Мера всякого измеримого множества неотрицательна.

Всякое измеримое множество ограничено.

Если $\mu(X) = 0$, а $X_1 \subset X$, то и $\mu(X_1) = 0$.

Если $\mu(X) = 0$, $\bar{X}$ — замыкание $X$, то и $\mu(\bar{X}) = 0$.

Если $X_1$ и $X_2$ измеримы и $X_1 \subset X_2$, то $\mu(X_1) \leqslant \mu(X_2)$ (*монотонность меры*).

Справедлив следующий

Критерий измеримости. Для того чтобы множество $X$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы мера его границы была равна нулю, т. е. $\mu(\partial X)=0$, где *$\partial X$ — граница $X$.*

Верны следующие утверждения о мере Жордана.

Объединение и пересечение конечной совокупности измеримых множеств, а также разность двух измеримых множеств являются измеримыми множествами.

Мера объединения конечной совокупности попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств (*аддитивность меры*).

Пусть $X' \subseteq \mathbb{R}^m$, $X'' \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$. Множество

$$\{x=(x';\ x'')\in\mathbb{R}^n:\ x'=(x_1;\ \ldots;\ x_m)\in X',\ \ x''=(x_{m+1};\ \ldots;\ x_n)\in X''\}$$

называют *произведением множеств $X'$ и $X''$* и обозначают $X'\times X''$.

Если множество $X'$ измеримо в $\mathbb{R}^m$, а множество $X''$ измеримо в $\mathbb{R}^{n-m}$, то множество $X'\times X''$ измеримо в $\mathbb{R}^n$ и

$$\mu_n(X'\times X'')=\mu_m(X')\cdot\mu_{n-m}(X'').$$

В частности, если $X'$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$, то всякий цилиндр $X=X'\times[a;\ b]$ с основанием $X'$ измерим в $\mathbb{R}^n$ и

$$\mu_n(X)=(b-a)\cdot\mu_{n-1}(X').$$

Если $X'$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, а мера множества $X''$ в $\mathbb{R}^{n-m}$ равна нулю, то и $\mu_n(X'\times X'')=0$. В частности, если мера основания цилиндра равна нулю, то и мера цилиндра в $\mathbb{R}^n$ равна нулю.

График любой непрерывной на компакте*) функции измерим, и его мера равна нулю.

Всякая спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^n$ измерима, и ее мера равна нулю.

Разбиения измеримого множества. Пусть $X$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Конечную совокупность

$$\tau(X)=\{X_j,\ j=1,\ \ldots,\ N\}$$

непустых измеримых множеств называют *разбиением* $X$, если

1) $\mu(X_k\cap X_l)=0,\quad k\neq l,\quad k,\ l=1,\ \ldots,\ N;$

2) $\bigcup\limits_{j=1}^{N}X_j=X.$

Для всякого разбиения $\tau(X)$ верно равенство

$$\sum_{j=1}^{N}\mu(X_j)=\mu(X).$$

Число

$$|\tau(X)|=\max_j \operatorname{diam} X_j,$$

*) *Компакт* — ограниченное замкнутое множество.

где $\operatorname{diam} X_j$ — диаметр множества $X_j$, $j=1, \ldots, N$, называют *мелкостью* разбиения $\tau(X)$.

Пусть $\tau(X)$ и $\tau'(X)$ — разбиения измеримого множества $X$ и для каждого множества $X'_j \in \tau'(X)$, $j=1, \ldots, N'$, существует множество $X_{k_j} \in \tau(X)$, $1 \leqslant k_j \leqslant N$, такое, что $X'_j \subseteq X_{k_j}$, тогда разбиение $\tau'(X)$ называют *вписанным в разбиение* $\tau(X)$ и пишут $\tau'(X) \succ \tau(X)$ или $\tau(X) \prec \tau'(X)$.

Если $\tau(X) \prec \tau'(X)$ и $\tau'(X) \prec \tau''(X)$, то $\tau(X) \prec \tau''(X)$.

Для любых двух разбиений $\tau'(X)$ и $\tau''(X)$ измеримого множества $X$ существует такое разбиение $\tau(X)$ этого множества, что $\tau(X) \succ \tau'(X)$ и $\tau(X) \succ \tau''(X)$.

Для всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.

Для любого открытого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру.

Пример 1. Доказать, что куб $Q$ ранга $k_0$ в $\mathbb{R}^n$ измерим по Жордану и его мера Жордана совпадает с введенной в (1) мерой, т. е. равна $10^{-k_0 n}$.

$\triangle$ Если $k < k_0$, то никакой куб ранга $k$ не лежит в $Q$; поэтому $s_k(Q) = \varnothing$, $\mu(s_k(Q)) = 0$. Если $k = k_0$, то $s_{k_0}(Q) = Q$, $\mu(s_{k_0}(Q)) = 10^{-k_0 n}$. Если $k > k_0$, то опять-таки $s_k(Q) = Q$ и $\mu(s_k(Q)) = 10^{-k_0 n}$.

Значит,

$$\mu_*(Q) = \lim_{k \to \infty} \mu(s_k(Q)) = 10^{-k_0 n}.$$

Данный куб $Q$ есть множество

$$Q = \{x\colon m_i/10^{k_0} \leqslant x_i \leqslant (m_i+1)/10^{k_0},\ i=1, \ldots, n\},$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$, $i=1, \ldots, n$. При $k \leqslant k_0$ $\mu(S_k(Q))$ — некоторые положительные числа. Пусть $k > k_0$. Объединение $S_k(Q)$ всех кубов ранга $k$, имеющих с $Q$ непустое пересечение, есть множество

$$S_k(Q) = \left\{x\colon \frac{m_i}{10^{k_0}} - \frac{1}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i+1}{10^{k_0}} + \frac{1}{10^k}\right\}.$$

Этот куб с ребром длины

$$\frac{1}{10^{k_0}} + \frac{2}{10^k} = \frac{10^{k-k_0}+2}{10^k}$$

содержит $(10^{k-k_0}+2)^n$ кубов ранга $k$. Поэтому

$$\mu(S_k(Q)) = (10^{k-k_0}+2)^n \cdot 10^{-kn} = 10^{-k_0 n}\left(1 + \frac{2}{10^{k-k_0}}\right)^n$$

и

$$\mu^*(Q) = \lim_{k \to \infty} \mu(S_k(Q)) = 10^{-k_0 n}.$$

Таким образом,

$$\mu_*(Q) = \mu^*(Q) = \mu(Q) = 10^{-k_0 n}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 2. Доказать, что на отрезке есть открытое множество, неизмеримое по Жордану.

$\triangle$ Укажем такое множество на отрезке $[0;\ 1]$, следуя идее Г. Кантора.

Сначала отметим, что если $a$ и $b$ — концы отрезков ранга $k$, то середина отрезка $[a;\ b]$ является концом отрезка ранга $k+1$. Действительно, $a = m/10^k$, $b = n/10^k$, где $m,\ n \in \mathbb{Z}$, и $\frac{1}{2}(a+b) = \frac{5(m+n)}{10^{k+1}}$, а каждое число такого вида есть конец отрезка ранга $k+1$.

Опишем процесс индуктивного построения требуемого множества. Будем называть *интервалом ранга $k$* интервал, получаемый из отрезка ранга $k$ исключением его концов.

П е р в ы й ш а г. Интервал 1-го ранга, имеющий меньший конец в середине отрезка $[0;\ 1]$, обозначим $A_1$. Удалив $A_1$ из $[0;\ 1]$, получим два отрезка, совокупность которых обозначим $\beta_1$. Концы каждого из них являются концами отрезков 1-го ранга, следовательно, середины отрезков из $\beta_1$ являются концами отрезков 2-го ранга.

В т о р о й ш а г. В каждом отрезке из $\beta_1$ возьмем интервал 2-го ранга, имеющий меньший конец в середине отрезка. Таких интервалов будет 2, их объединение обозначим $A_2$. Удалив $A_2$ из имевшихся двух отрезков, получим 4 отрезка, совокупность которых обозначим $\beta_2$. Длина каждого отрезка из $\beta_2$ не больше $1/2^2$. Их концы являются концами отрезков 2-го ранга, поэтому их середины — концы отрезков 3-го ранга.

Допустим, что на $n$-м шаге получены множество $A_n$ — объединение $2^{n-1}$ интервалов ранга $n$, и совокупность $\beta_n$ из $2^n$ отрезков, образующаяся после удаления $A_n$ из $2^{n-1}$ отрезков, составляющих $\beta_{n-1}$. Длина каждого отрезка из $\beta_n$ не больше $1/2^n$, их концы являются концами отрезков ранга $n$. Тогда $(n+1)$-й шаг состоит в следующем. Середина каждого отрезка из $\beta_n$ является концом отрезка ранга $n+1$. В каждом отрезке из $\beta_n$ выберем интервал ранга $n+1$, имеющий меньший конец в середине этого отрезка. Объединение выбранных $2^n$ интервалов обозначим $A_{n+1}$. После удаления из отрезков $\beta_n$ этих интервалов получим совокупность $2^{n+1}$ отрезков, которую обозначим $\beta_{n+1}$. Длина каждого из этих отрезков не больше $1/2^{n+1}$, их концы являются концами отрезков ранга $n+1$. Тем самым индуктивный процесс задан полностью.

В результате этого процесса получаем последовательность множеств $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Каждое из них открыто, как объединение $2^{n-1}$ интервалов ранга $n$.

Множество $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ открыто и неизмеримо по Жордану.

Первое выполнено потому, что $A$ есть объединение открытых множеств $A_n$. Докажем второе, вычислив внешнюю и внутреннюю меры $A$.

Установим, что $\mu^*(A)=1$, доказав, что каждый отрезок $Q_k \subset [0;\ 1]$ ранга $k$, $k=0, 1, 2, \ldots$, имеет с $A$ непустое пересечение. Обозначим $B_1=[0;\ 1] \setminus A_1$, $B_n=B_{n-1} \setminus A_n$, $n=2, 3, \ldots$, т. е. $B_n$ — *объединение* непересекающихся отрезков совокупности $\beta_n$.

Допустим, что $Q_k \cap A=\varnothing$, т. е. $Q_k \cap A_n=\varnothing$ для любого $n$. При $n=1$ из того, что $Q_k \cap A_1=\varnothing$, следует, что $Q_k \subset B_1$. Из того, что $Q_k \subset B_n$ для $n \geqslant 1$ и $Q_k \cap A_{n+1}=\varnothing$, следует, что $Q_k \subset B_{n+1}=B_n \setminus A_{n+1}$. Методом индукции доказано, что $Q_k \subset B_n$ для любого $n$. Поскольку $B_n$ есть объединение *непересекающихся* отрезков совокупности $\beta_n$, отрезок $Q_k$ содержится в одном из них, и, значит, его длина не превосходит $1/2^n$, т. е. $1/10^k \leqslant 1/2^n$ для любого $n$. Это неверно, поэтому неверно и допущение $Q_k \cap A=\varnothing$.

Объединение $S_k$ всех отрезков $Q_k \subset [0;\ 1]$ фиксированного ранга $k$ совпадает с $[0;\ 1]$, поэтому $\mu(S_k)=1$ при любом $k$, а значит, и $\mu^*(A)=1$.

Найдем внутреннюю меру $A$. Интервал ранга $n$ не содержит ни одного отрезка ранга $k$, если $k \leqslant n$. Если же $k>n$, то интервал ранга $n$ содержит $10^{k-n}-2$ отрезков ранга $k$. Множество $A_n$ состоит из $2^{n-1}$ непересекающихся интервалов ранга $n$, поэтому оно не содержит отрезков ранга $k$ при $k \leqslant n$, а если $k>n$, то $A_n$ содержит $2^{n-1}(10^{k-n}-2)$ отрезков ранга $k$. В объединении $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ только множества $A_1, \ldots, A_{k-1}$ содержат отрезки ранга $k$, остальные их не содержат. Поэтому

$$\mu(s_k)=\sum_{n=1}^{k-1} 2^{n-1}\left(10^{k-n}-2\right) \cdot 10^{-k}=\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{5^n}-\frac{1}{10^k} \sum_{n=1}^{k-1} 2^n=$$
$$=\frac{1}{8}\left(1-1/5^{k-1}\right)-\frac{2}{10^k}\left(2^{k-1}-1\right)=\frac{1}{8}-\frac{13}{8} \cdot \frac{1}{5^k}+\frac{2}{10^k},$$

откуда $\mu_*(A)=\lim\limits_{k \rightarrow \infty} \mu(s_k)=1/8$. Следовательно, $\mu_*(A)<\mu^*(A)$ и $A$ неизмеримо.

Используя описанное здесь множество $A$, можно указать в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, открытые множества и даже области, неизмеримые по Жордану. ▲

---

**7.1.** Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ куб ранга $k$ содержит $(10^{l-k}-2)^n$ кубов ранга $l<k$, не пересекающихся с его границей.

**7.2.** Доказать, что для куба $Q$ ранга $k$ в $\mathbb{R}^n$ имеется:

1) $3^n-1$ кубов ранга $k$, имеющих с $Q$ непустое пересечение, но не совпадающих с $Q$.

2) $(10^{l-k}+2)^n$ кубов ранга $l \geqslant k$, имеющих с $Q$ непустое пересечение.

**7.3.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Доказать: что:

1) Если для некоторого $k_0$ $S_{k_0}(X)$ есть объединение счетной совокупности кубов ранга $k_0$, то и для любого $k=0, 1, \ldots$ $S_k(X)$ является объединением счетной совокупности кубов ранга $k$ (т. е. если в последовательности $\mu(S_k)$ один из членов есть $+\infty$, то и все ее члены есть $+\infty$).

2) Последовательность $s_k(X)$ не обладает свойством, указанным в 1) для последовательности $S_k(X)$.

**7.4.** Доказать, что открытый куб ранга $k$ в $\mathbb{R}^n$ измерим по Жордану и его мера равна мере замкнутого куба ранга $k$, т. е. $10^{-kn}$.

**7.5.** Доказать, пользуясь определением меры Жордана, измеримость и найти меру:

1) Отрезка $[a; b]$ в $\mathbb{R}^1$.

2) Интервала $(a; b)$ в $\mathbb{R}^1$.

3) Замкнутого прямоугольника в $\mathbb{R}^2$, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины $a$ и $b$.

4) Открытого прямоугольника в $\mathbb{R}^2$ с такими же сторонами, как и в 3).

5) Замкнутого параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, ребра которого параллельны координатным осям и имеют длины $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

6) Открытого параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с такими же ребрами, как и в 5).

**7.6.** Пользуясь определением меры Жордана, доказать измеримость множеств:

1) $\{(x_1; x_2): x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant 1\}$.

2) $\left\{(x_1; x_2): -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{1-x_1^2}\right\}$.

3) $\{(x_1; x_2): 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant e^{x_1}\}$.

4) $\{(x_1; x_2): 1 \leqslant x_1 \leqslant e,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \ln x_1\}$.

5) $\{(x_1; x_2): 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant \sin x_1\}$.

**7.7.** Доказать, что внутренняя и внешняя меры Жордана ограниченного множества конечны.

**7.8.** 1) Доказать, что множество с конечной внешней мерой Жордана ограничено.

2) Указать неограниченное множество с конечной внутренней мерой.

**7.9.** Доказать, что измеримое по Жордану множество ограничено.

**7.10.** Доказать, что:

1) Внутренняя мера множества, имеющего хотя бы одну внутреннюю точку, либо положительное число, либо $+\infty$.

2) Множество с положительной внутренней мерой имеет внутренние точки.

3) Мера измеримого по Жордану множества, не имеющего внутренних точек, равна нулю.

**7.11.** Доказать, что непустое пересечение замкнутого $n$-мерного куба с открытым множеством в $\mathbb{R}^n$ имеет положительную внутреннюю меру.

**7.12.** Пусть $X$ — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, $S_k(X)$ — его покрытие кубами ранга $k$. Доказать, что каждая точка $X$ является внутренней точкой множества $S_k(X)$.

**7.13.** Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{R}^n$. Доказать, что $\mu_*(X_1) \leqslant \mu_*(X_2)$ и $\mu^*(X_1) \leqslant \mu^*(X_2)$.

**7.14.** Пусть $X$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $X_1 \subset X$. Доказать, что:

1) $S_k(X \setminus X_1) = S_k(X) \setminus s_k(X_1)$.

2) $s_k(X \setminus X_1) = s_k(X) \setminus S_k(X_1)$.

**7.15.** Пусть $X$ ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $X_1 \subset X$. Доказать, что:

1) $\mu^*(X \setminus X_1) = \mu^*(X) - \mu_*(X_1)$.

2) $\mu_*(X \setminus X_1) = \mu_*(X) - \mu^*(X_1)$.

**7.16.** Указать два таких непересекающихся множества $X_1$ и $X_2$ из $\mathbb{R}^n$, что

$$\mu^*(X_1 \cup X_2) \neq \mu^*(X_1) + \mu^*(X_2).$$

**7.17.** Пусть $X_1$ и $X_2$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) \leqslant \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

**7.18.** Указать два таких множества $X_1$ и $X_2$ из $\mathbb{R}^n$, что

$$\mu_*(X_1 \cup X_2) > \mu_*(X_1) + \mu_*(X_2).$$

**7.19.** Доказать, что если $\mu^*(X) = 0$, то $X$ измеримо и $\mu(X) = 0$.

**7.20.** Доказать, что данное выше определение меры Жордана в частном случае множества меры нуль равносильно следующему:

Множество $X$ имеет меру нуль по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие натуральное $k$ и конечное покрытие $S_k(X)$ множества $X$ кубами ранга $k$, что $\mu(S_k(X)) < \varepsilon$.

**7.21.** Доказать, что конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

**7.22.** Последовательность точек $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к точке из $\mathbb{R}^n$. Доказать, что множество $\{x^k;\ k \in \mathbb{N}\}$ имеет меру нуль.

**7.23.** Пусть $\alpha$ — $k$-мерная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ (прямая при $k = 1$); $X$ — ограниченное подмножество $\alpha$. Доказать, что $\mu(X) = 0$.

**7.24.** Множество имеет меру нуль. Пользуясь определением меры Жордана, доказать, что:

1) Любое его подмножество имеет меру нуль.

2) Мера его замыкания равна нулю.

**7.25.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует совокупность из $N$ измеримых по Жордану множеств $X_j$ такая, что $X \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} X_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu(X_j) < \varepsilon$ ($N$ и $X_j$, вообще говоря, зависят от $\varepsilon$). Доказать, что $X$ измеримо и $\mu(X) = 0$.

**7.26.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $\partial X$ — граница $X$, $\sigma_k(X)$ — объединение всех кубов ранга $k$, содержащихся в $S_k(X)$, но не входящих в $s_k(X)$, $k = 0, 1, \ldots$ Доказать, что $\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X)$.

**7.27.** Доказать критерий измеримости: для измеримости множества по Жордану необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и чтобы его граница имела меру нуль по Жордану.

**7.28.** Доказать, что измеримым по Жордану является:

1) Объединение конечной совокупности измеримых по Жордану множеств.

2) Пересечение конечной совокупности измеримых по Жордану множеств.

3) Разность двух измеримых по Жордану множеств.

**7.29.** Доказать монотонность меры.

**7.30.** Доказать аддитивность меры.

**7.31.** Пусть $X_1$ и $X_2$ — измеримые по Жордану множества в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что:

1) $\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1 \setminus X_2) + \mu(X_2 \setminus X_1) + \mu(X_1 \cap X_2)$.

2) $\mu(X_1 \cup X_2) = \mu(X_1) + \mu(X_2) - \mu(X_1 \cap X_2)$.

**7.32.** Доказать, что замыкание $\bar{X}$ измеримого по Жордану множества $X$ измеримо по Жордану и $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$.

**7.33.** Пусть $X$ — измеримое множество, $\operatorname{in} X$ — множество всех его внутренних точек. Доказать, что $\operatorname{in} X$ измеримо и $\mu(\operatorname{in} X) = \mu(X)$.

**7.34.** Пусть $X$ — измеримое множество, $\operatorname{in} X$ — множество всех его внутренних точек. Доказать, что если $X_1 \subset X \setminus \operatorname{in} X$, то $\mu(X_1) = 0$.

**7.35.** Пусть $X_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(X_1) = 0$. Доказать, что для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ множества $X$, $X \cup X_1$, $X \setminus X_1$ одновременно либо неизмеримы, либо измеримы и в последнем случае

$$\mu(X) = \mu(X \cup X_1) = \mu(X \setminus X_1).$$

**7.36.** Пусть множества $X_1$ и $X_2$ измеримы по Жордану в $\mathbb{R}^n$, $X_1 \subset X_2$ и $\mu(X_1) = \mu(X_2)$. Доказать, что любое множество $X$ такое, что $X_1 \subset X \subset X_2$, измеримо по Жордану в $\mathbb{R}^n$ и $\mu(X) = \mu(X_1) = \mu(X_2)$.

**7.37.** Пусть измеримое по Жордану множество $X \subset \mathbb{R}^n$ рассечено $(n-1)$-мерной гиперплоскостью $\alpha$ на две части $X_1$ и $X_2$, т. е. все точки $X_1$ лежат по одну сторону от $\alpha$, все точки $X_2$ — по другую и $X = X_1 \cup \alpha_0 \cup X_2$, где $\alpha_0 = \alpha \cap X$, $X_1 \cap \alpha_0 = X_2 \cap \alpha_0 = \varnothing$. Доказать, что $X_1$ и $X_2$ измеримы по Жордану и $\mu(X_1) + \mu(X_2) = \mu(X)$.

**7.38.** Доказать, что:

1) Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu_*(X) = \sup_{X' \subset X} \mu(X'),$$

где $X'$ — всевозможные измеримые множества, содержащиеся в $X$.

2) Для любого ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\mu^*(X) = \inf_{X' \supset X} \mu(X'),$$

где $X'$ — всевозможные измеримые множества, содержащие $X$.

**7.39.** Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ таково, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют два измеримых по Жордану множества $X'$ и $X''$ таких, что $X' \subset X \subset X''$ и $\mu(X'') - \mu(X') < \varepsilon$. Доказать, что множество $X$ измеримо по Жордану и

$$\mu(X) = \sup_{X' \subset X} \mu(X') = \inf_{X'' \supset X} \mu(X''),$$

где $X'$ и $X''$ — всевозможные измеримые множества, содержащиеся в $X$ и содержащие $X$ соответственно.

**7.40.** Доказать неизмеримость по Жордану множества:

1) Рациональных точек отрезка $[0; 1]$ в $\mathbb{R}^1$.

2) Точек квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, обе координаты которых рациональны.

3) Точек квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$, одна из координат которых рациональна, а другая нерациональна.

**7.41.** Указать в $\mathbb{R}^3$ неизмеримое по Жордану множество.

**7.42.** Пусть $\{X_j\}$ — последовательность измеримых по Жордану множеств в $\mathbb{R}^n$, не имеющих попарно общих внутренних точек, и пусть $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ — ограниченное множество. Доказать, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(X_j)$ сходится и

$$\mu_*(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_j).$$

**7.43.** Доказать, что для любого открытого ограниченного непустого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ есть такая последовательность кубов $Q_j$ рангов $k_j$, $j \in \mathbb{N}$, не имеющих общих внутренних точек, что $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j$ и

$$\mu_*(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(Q_j).$$

**7.44.** Пусть $X_n$ — измеримые по Жордану множества меры нуль, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ — измеримое по Жордану множество. Доказать, что $\mu(X) = 0$.

**7.45.** Указать счетную совокупность множеств жордановой меры нуль, объединение которых не является множеством меры нуль по Жордану.

**7.46.** Указать неизмеримое по Жордану множество, замыкание которого измеримо по Жордану.

**7.47.** Доказать, что объединение двух непересекающихся множеств, одно из которых измеримо, а другое неизмеримо по Жордану, есть множество, неизмеримое по Жордану.

**7.48.** Указать два неизмеримых множества, объединение которых измеримо.

**7.49.** Доказать, что всякое замкнутое счетное ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану и его мера равна нулю. Указание. Можно воспользоваться леммой Бореля о покрытиях.

**7.50.** Пусть $X'$ — измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что цилиндр $X = X' \times [a;\ b]$ измерим по Жордану в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mu_{n+1}(X) = (b-a)\cdot\mu_n(X')$.

**7.51.** Каждая из проекций множества $X \subset \mathbb{R}^2$ на оси координат — измеримое множество в $\mathbb{R}^1$. Обязательно ли само множество $X$ будет измеримым в $\mathbb{R}^2$?

**7.52.** Указать в $\mathbb{R}^2$ ограниченное неизмеримое множество, у которого сечение любой прямой, параллельной одной из осей координат, измеримое в $\mathbb{R}^1$ множество.

**7.53.** 1) Доказать, что мера Жордана графика непрерывной на компакте функции равна нулю.

2) Указать функцию, определенную на компакте, график которой неизмерим по Жордану.

3) Указать непрерывную на области определения функцию, график которой неизмерим по Жордану.

**7.54.** Доказать измеримость всякого ограниченного множества, граница которого есть объединение конечной совокупности множеств, каждое из которых является либо графиком непрерывной на компакте функции, либо частью цилиндра с основанием меры нуль.

**7.55.** Доказать измеримость по Жордану:

1) Круга в $\mathbb{R}^2$.
2) Параллелограмма в $\mathbb{R}^2$.
3) Эллипсоида в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.
4) Параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$.

**7.56.** Пусть

$$X = \left\{(x_1;\ x_2):\ (x_1-1)^2 + x_2^2 \leqslant 1\right\},$$

$$X_n = \{(x_1;\ x_2):\ (x_1 - 1/n)^2 + x_2^2 \leqslant 1/4^{2n}\},\quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказать измеримость множества $X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ и найти его меру.

**7.57.** Доказать измеримость множества

$$\{(x_1;\ x_2):\ 0 < x_1 \leqslant 1/\pi,\quad 0 \leqslant x_2 \leqslant |\sin(1/x_1)|\}.$$

**7.58.** Доказать, что спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^n$ имеет жорданову меру нуль.

**7.59.** Пусть $\Omega$ — замкнутое ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$, функции $\varphi_i(y)$, $i=1, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы на $\Omega$. Доказать, что $m$-мерная поверхность, заданная параметрически в виде $x_i=\varphi_i(y)$, $i=1, \ldots, n$, $y \in \Omega$, имеет в $\mathbb{R}^n$ нулевую меру Жордана.

**7.60*.** Указать непрерывную кривую $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, имеющую в $\mathbb{R}^2$ положительную меру.

**7.61.** Указать измеримое по Жордану множество $X$ и непрерывную на нем функцию $f$ такие, что множество

$$X_+=\{x \in X\colon f(x)>0\}$$

неизмеримо по Жордану.

**7.62*.** Указать область в $\mathbb{R}^2$, неизмеримую по Жордану.

**7.63.** Пусть функция $f$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Доказать, что криволинейная трапеция

$$\Phi=\{(x_1;\ x_2)\colon a \leqslant x_1 \leqslant b,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant f(x_1)\}$$

измерима по Жордану и

$$\mu(\Phi)=\int_a^b f(x_1)\, dx_1.$$

**7.64.** Пусть функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha; \beta]$, $0 \leqslant \alpha<\beta<2\pi$. Доказать, что сектор

$$\Phi=\{(r;\ \varphi)\colon \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$$

измерим по Жордану и

$$\mu(\Phi)=\frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

**7.65.** Пусть $X$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, и

$$X_a=\{x\colon x=a+x',\ x' \in X\}$$

— множество, полученное сдвигом $X$ на $a$. Доказать, что $X_a$ измеримо и $\mu(X_a)=\mu(X)$.

**7.66.** Пусть $X$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $A$ — $(n \times n)$-ортогональная матрица,

$$X_A=\{x\colon x=Ax',\ x' \in X\}$$

— множество, полученное ортогональным преобразованием $A$ множества $X$ (поворотом, симметриями, их композициями). Доказать, что $X_A$ измеримо и $\mu(X_A)=\mu(X)$.

**7.67*.** Доказать, что мера Жордана не зависит от выбора декартовой системы координат.

**7.68.** Доказать, что для всякого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости.

**7.69.** Доказать, что для всякого открытого измеримого множества существуют разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру.

**7.70.** Пусть $X$ — открытое измеримое множество, $\partial X$ — его граница, $X_1 \subseteq \partial X$. Доказать, что для множества $X \cup X_1$ существуют разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру.

**7.71.** Указать в $\mathbb{R}^n$ множество положительной меры, для которого не существует разбиений сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру.

**7.72.** Доказать, что для любого измеримого множества $X$ существует последовательность вложенных разбиений $\{\tau_n(X)\}$, $\tau_{n+1}(X) \succ \tau_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, с мелкостями, стремящимися к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} |\tau_n(X)| = 0.$$

**7.73.** Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль *по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ есть не более чем счетная совокупность замкнутых прямоугольных параллелепипедов $\{P_j\}$ такая, что $X \subset \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) < \varepsilon$.

1) Доказать, что если множество имеет меру нуль по Жордану, то оно имеет меру нуль и по Лебегу.

2) Доказать, что если множество $X$ имеет меру нуль по Лебегу, то для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная совокупность открытых параллелепипедов $\{P_j\}$ такая, что

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) < \varepsilon.$$

3) Доказать, что если компакт $X$ имеет меру нуль по Лебегу, то он имеет меру нуль и по Жордану.

**7.74.** Доказать, что множество всех рациональных точек отрезка $[0; 1]$, неизмеримое по Жордану в $\mathbb{R}^1$ (см. зад. **7.40.** 1)), имеет в $\mathbb{R}^1$ меру нуль по Лебегу.

**7.75.** Доказать, что множество

1) из задачи **7.40**. 2) имеет меру нуль по Лебегу;

2) из задачи **7.40**. 3) имеет меру нуль по Лебегу.

**7.76.** Доказать, что объединение счетной совокупности множеств нулевой меры Лебега также имеет нулевую меру Лебега.

**7.77.** Указать множество $X$ нулевой меры Лебега, замыкание $\bar{X}$ которого не является множеством меры нуль по Лебегу (что, отметим, невозможно для множеств нулевой меры Жордана).

---

## § 8. Кратный интеграл Римана и его свойства

**1. Определение интеграла Римана, его свойства.** Пусть на измеримом по Жордану множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ определена функция $f$, $\tau = \tau(X) = \{X_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ — разбиение $X$, $\Xi_\tau = \{\xi^{(i)},\ i = 1, \ldots, N\}$ — произвольный набор точек $\xi^{(i)} \in X_i$,

$i=1, \ldots, N$. Величину

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi^{(i)})\,\mu(X_i) \tag{1}$$

называют *интегральной суммой Римана* от $f$ по $X$.

Определение. Число $I$ называют *интегралом Римана от* $f$ *по* $X \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau(X)\ \forall \Xi_\tau\ (|\tau(X)| < \delta \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau)| < \varepsilon), \tag{2}$$

и записывают

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau) = I. \tag{3}$$

Функцию $f$ называют в этом случае *интегрируемой по Риману на множестве* $X$ (или по множеству $X$) (далее для краткости — *интегрируемой на* $X$ (по $X$)). Для указания размерности $\mathbb{R}^n$ иногда употребляют термин «*n-кратный интеграл Римана*». Двукратный интеграл часто называют двойным, трехкратный — тройным.

Интеграл Римана от $f$ по $X$ обозначают

$$\int_X f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int \ldots \int_X f(x_1;\ \ldots;\ x_n)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

а иногда и

$$\int f(x)\,dX.$$

В $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ часто используют обозначения

$$\iint_D f(x;\ y)\,dx\,dy; \quad \iiint_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz.$$

В терминах последовательностей определение интеграла, равносильное данному ранее, таково: число $I$ называют *интегралом Римана от* $f$ *по* $X \subset \mathbb{R}$, если *для любой* последовательности разбиений $\tau_m(X)$, у которой $\lim\limits_{m\to\infty} |\tau_m(X)| = 0$, и *для любой* последовательности наборов точек $\Xi_{\tau_m}$

$$\lim_{m \to \infty} \sigma_{\tau_m}(f;\ \Xi_{\tau_m}) = I. \tag{4}$$

Критерий Коши интегрируемости функции $f$ по множеству $X$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau_1(X)\ \forall \tau_2(X)\ \forall \Xi_{\tau_1} \forall \Xi_{\tau_2}$$
$$(|\tau_1(X)| < \delta,\ |\tau_2(X)| < \delta \Rightarrow |\sigma_{\tau_1}(f;\ \Xi_{\tau_1}) - \sigma_{\tau_2}(f;\ \Xi_{\tau_2})| < \varepsilon). \tag{5}$$

Интеграл Римана определен лишь по множествам, измеримым по Жордану; поэтому далее указание на это свойство множеств иногда не повторяется.

Пусть $X_0 \subset X$, $X$ — измеримое по Жордану множество, $\tau(X)$ — разбиение $X$. Обозначим

$$\tau_0 = \tau_0(X) = \{X_i \in \tau(X): \overline{X}_i \cap X_0 = \varnothing\}, \tag{6}$$

$$\sigma_{\tau_0}(f;\ \Xi_\tau) = \sum_{i:\ X_i \in \tau_0} f(\xi^{(i)})\,\mu(X_i). \tag{7}$$

Теорема 1. Если функция $f$ ограничена на измеримом множестве $X$, $X_0 \subset X$ и $\mu(X_0) = 0$, то интеграл Римана от $f$ по $X$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_{\tau_0}(f;\ \Xi_\tau)$, и если этот предел существует, то

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_{\tau_0}(f;\ \Xi_\tau). \tag{8}$$

Из теоремы следует, что если функция $f$ определена и ограничена на измеримом множестве $X$, то при нахождении предела ее интегральных сумм можно исключать из них слагаемые, соответствующие тем элементам разбиений, замыкания которых содержат точки фиксированного множества меры нуль. Таким множеством является, например, граница измеримого множества. Из теоремы следует также, что если две ограниченные функции, определенные на измеримом множестве $X$, различны лишь на множестве меры нуль, то они обе либо неинтегрируемы по $X$, либо интегрируемы и интегралы от них по $X$ равны.

Теорема 2. Если $f$ интегрируема на $X$, то существует такое подмножество $X_0 \subset X$, $\mu(X_0) = 0$, что $f$ ограничена на $X \setminus X_0$. (См. также задачу **8.50**.)

Теорема 3. Если функция интегрируема на открытом множестве, то она ограничена на нем. (См. также задачу **8.47**.)

Определение сумм и интегралов Дарбу. Пусть функция $f$ определена и ограничена на измеримом множестве $X$, $\tau(X) = \{X_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ — его разбиение,

$$m_i = \inf_{X_i} f, \quad M_i = \sup_{X_i} f, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Суммы

$$s_\tau \equiv s_\tau(f) = \sum_{i=1}^N m_i \mu(X_i), \quad S_\tau \equiv S_\tau(f) = \sum_{i=1}^N M_i \mu(X_i) \tag{9}$$

называют соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу*, а

$$I_* \equiv I_*(f) \equiv I_*(f;\ X) = \sup_{\tau(X)} s_\tau(f), \tag{10}$$

$$I^* \equiv I^*(f) \equiv I^*(f;\ X) = \inf_{\tau(X)} S_\tau(f) \tag{11}$$

— соответственно *нижним и верхним интегралами Дарбу от $f$ по $X$*.

Критерии интегрируемости ограниченных функций. Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве $X$ функция $f$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно выполнение одного из условий:

I. $$\lim_{|\tau(X)|\to 0} (S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0.$$

II. $$\lim_{|\tau(X)|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \omega(f;\ X_i)\,\mu(X_i) = 0,$$

где $\omega(f;\ X_i) = \sup\limits_{x',\,x''\in X_i} |f(x') - f(x'')|$ — колебание $f$ на элементе $X_i$, $i = 1, \ldots, N$, разбиения $\tau(X)$.

III. $I_*(f) = I^*(f)$ (*критерий Дарбу*).

IV. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\tau(X)$: $S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon$.

При выполнении для ограниченной на измеримом множестве $X$ функции $f$ хотя бы одного из этих условий для интеграла от $f$ по $X$ справедливы формулы

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \sigma_{\tau_m}(f;\ \Xi_{\tau_m}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} s_{\tau_m}(f) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} s_{\tau_m}(f) = \inf_{m\in\mathbb{N}} S_{\tau_m}(f) = \lim_{m\to\infty} S_{\tau_m}(f), \quad (12)$$

где $\tau_m(X)$, $m\in\mathbb{N}$, — какая-либо последовательность разбиений с условием $\lim\limits_{m\to\infty} |\tau_m(X)| = 0$, $\Xi_{\tau_m}$ — какая-либо последовательность наборов, соответствующих этим разбиениям.

Достаточное условие интегрируемости. Ограниченная на замкнутом измеримом множестве $X$ функция, у которой множество точек разрыва имеет меру нуль по Жордану, интегрируема на X. (Более общее условие интегрируемости функции дает теорема Лебега.) В частности,

Непрерывная на замкнутом измеримом множестве функция интегрируема на этом множестве.

Свойства*) кратного интеграла Римана.

1) Пусть $X$ — измеримое множество; тогда

$$\int_X 1\,dx = \mu(X).$$

2) Пусть функция интегрируема по множеству $X$; тогда она интегрируема и по любому измеримому подмножеству $X$.

3) Пусть $X$, $X_1$, $X_2$ — измеримые множества, $X = X_1 \cup X_2$, $\mu(X_1\cap X_2) = 0$; тогда для интегрируемости функции $f$ по $X$ необходимо, а при ограниченности $f$ на $X$ и достаточно, чтобы $f$

*) В учебниках и учебных пособиях ряд этих свойств доказывают для ограниченных функций. В задаче 8.52 предложено найти доказательство их без этого ограничения.

была интегрируема по $X_1$ и по $X_2$, при этом

$$\int_X f(x)\,dx = \int_{X_1} f(x)\,dx + \int_{X_2} f(x)\,dx$$

(*аддитивность интеграла по множествам*).

4) Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы по $X$; тогда для любых чисел $\alpha$ и $\beta$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по $X$ и

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_X f(x)\,dx + \beta \int_X g(x)\,dx$$

(*линейность интеграла*).

5) Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы по $X$; тогда

а) произведение $fg$ интегрируемо по $X$;

б) если $\inf\limits_X |g(x)| > 0$, то частное $f/g$ интегрируемо по $X$.

6) Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы по $X$ и $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in X$; тогда

$$\int_X f(x)\,dx \leqslant \int_X g(x)\,dx.$$

7) Пусть функция $f$ интегрируема по $X$; тогда и функция $|f|$ интегрируема по $X$ и

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leqslant \int_X |f(x)|\,dx.$$

8) Пусть функция $f$ интегрируема на $X$, неотрицательна на $X$, $X_1$ — измеримое подмножество $X$; тогда

$$\int_{X_1} f(x)\,dx \leqslant \int_X f(x)\,dx.$$

9) Пусть функция $f$ интегрируема на множестве $X$, имеющем внутреннюю точку $x_0$, $f$ неотрицательна на $X$, непрерывна в точке $x_0$ и $f(x_0) > 0$; тогда

$$\int_X f(x)\,dx > 0.$$

10) Пусть функция $f$ интегрируема по $X$; $X_k$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность таких измеримых множеств, что $X_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(X_k) = \mu(X)$; тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx$$

(*полная аддитивность интеграла по множествам*).

11) Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы по множеству $X$ положительной меры, $\operatorname{in} X$ — множество всех внутренних точек $X$, $g$ не меняет знака на $\operatorname{in} X$; тогда

а) существует такое число $\lambda$, что $\inf\limits_{\text{in } X} f \leqslant \lambda \leqslant \sup\limits_{\text{in } X} f$ и

$$\int\limits_X f(x)\, g(x)\, dx = \lambda \int\limits_X g(x)\, dx;$$

б) если к тому же $X$ — линейно-связное *) множество или замыкание линейно связного множества и $f$ непрерывна на $\text{in}\, X$, то существует такая точка $\xi \in \text{in}\, X$, что

$$\int\limits_X f(x)\, g(x)\, dx = f(\xi) \int\limits_X g(x)\, dx$$

(*теорема о среднем*).

Теорема Лебега. Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве функция была интегрируема по Риману на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы множество всех ее точек разрыва имело меру нуль по Лебегу **).

Пример 1. Найти с погрешностью не более 0,1 приближенное значение интеграла

$$I = \iint\limits_X \frac{dx_1\, dx_2}{1 + 0{,}25 x_1 x_2},$$

где $X$ — квадрат $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$.

$\triangle$ Искомое приближенное значение возьмем равным $I^* = \frac{1}{2}(S_\tau + s_\tau)$, где $S_\tau$ и $s_\tau$ — суммы Дарбу от данной функции по $X$. Поскольку $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$, для погрешности справедлива оценка $|I - I^*| \leqslant \frac{1}{2}(S_\tau - s_\tau)$. Разбиение $\tau$ получим делением данного квадрата $X$ на $n^2$ равных квадратов прямыми

$$x_1 = i/n, \quad x_2 = j/n, \quad i,\ j = 1, \ldots, n-1.$$

Число $n$ определим из условия

$$\frac{1}{2}(S_\tau - s_\tau) < 0{,}1. \tag{13}$$

Нетрудно установить, что на каждом квадрате разбиения

$$X_{ij} = [(i-1)/n;\ i/n] \times [(j-1)/n;\ j/n], \quad i,\ j = 1, \ldots, n,$$

для данной функции $f(x_1;\ x_2) = (1 + 0{,}25 x_1 x_2)^{-1}$

$$m_{ij} = \left(1 + \frac{ij}{4n^2}\right)^{-1}, \quad M_{ij} = \left(1 + \frac{(i-1)(j-1)}{4n^2}\right)^{-1}.$$

По теореме Лагранжа

$$M_{ij} - m_{ij} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{4n}\,\frac{\xi_1 + \xi_2}{(1 + 0{,}25\xi_1\xi_2)^2},$$

---

*) Множество называют *линейно-связным*, если любые его две точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

**) Определение множества меры нуль по Лебегу см. в задаче **7.73**.

где $\xi = (\xi_1;\ \xi_2)$ — некоторая точка квадрата $X_{ij}$. Исследование функции $(\xi_1 + \xi_2)(1 + 0{,}25\xi_1\xi_2)^{-2}$ на экстремум в этом квадрате показывает, что она имеет максимум в граничной точке $\xi_1 = i/n,\ \xi_2 = j/n,\ i, j = 1, \ldots, n$. Значит, для любых $i, j = 1, \ldots, n$

$$M_{ij} - m_{ij} \leqslant \frac{1}{4n} \cdot \frac{32}{25} = \frac{8}{25n}.$$

Используя эти неравенства, получаем

$$\frac{1}{2}(S_\tau - s_\tau) = \frac{1}{2n^2} \sum_{i,\,j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij}) \leqslant \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{8}{25n} \cdot n^2 = \frac{4}{25n},$$

и теперь, исходя из (13), находим $4/25n < 0{,}1$, $n > 1{,}6$, т. е. достаточно взять $n = 2$. В этом случае

$$|I - I^*| \leqslant \frac{1}{2}(S_\tau - s_\tau) < \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Отсюда видно, что погрешность вычислений $s_\tau$ и $S_\tau$ не должна превышать 0,02. Это условие заведомо будет выполнено, если, например, вычисление $m_{ij}$ и $M_{ij}$ вести с тремя знаками после запятой с последующим округлением до двух знаков.

Вычисления (например, с помощью мини-ЭВМ, таблиц и др.) дают

$$s_\tau = \frac{1}{4} \sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{1}{1 + ij/16} = \sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{4}{16 + ij} = \frac{4}{17} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{5} \approx$$
$$\approx 0{,}235 + 2 \cdot 0{,}222 + 0{,}200 = 0{,}879,$$

$$S_\tau = \frac{1}{4} \sum_{i,\,j=1}^{2} \frac{1}{1 + (i-1)(j-1)/16} = \sum_{i,\,j=0}^{1} \frac{4}{16 + ij} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{17} \approx 3 \cdot 0{,}25 + 0{,}235 = 0{,}985.$$

$$I^* = \frac{1}{2}(0{,}879 + 0{,}985) = 0{,}932 \approx 0{,}9.$$

Учитывая погрешность последнего округления и то, что погрешность вычислений $s_\tau$ и $S_\tau$ не превышает 0,005, оцениваем истинную погрешность $I^*$:

$$|I - I^*| \leqslant \frac{1}{2}(0{,}985 - 0{,}879) + 0{,}005 + 0{,}033 = 0{,}091 < 0{,}1.$$

Ответ: $I \approx 0{,}9$. ▲

Пример 2. Пусть $X_n = [n-1;\ n] \times [0;\ n]$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{X_n} e^{-x_1 x_2^2}\, dx_1\, dx_2 = 0. \qquad (14)$$

△ Пусть $0<\delta<1$; $X_{n,\delta}=[n-1;\ n]\times[0;\ \delta]$, $n\in\mathbb{N}$; $X'_n=X_n\setminus X_{n,\delta}$, $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, $\mu(X_{n,\delta})=\delta$, $\mu(X'_n)=n-\delta$ и $0<e^{-x_1x_2^2}\leqslant 1$ при $(x_1;\ x_2)\in X_{n,\delta}$, а $x_1x_2^2\geqslant(n-1)\delta^2$ и $e^{-x_1x_2^2}\leqslant$ $\leqslant e^{-(n-1)\delta^2}$ при $(x_1;\ x_2)\in X'_n$. В силу аддитивности интеграла

$$I_n=\iint\limits_{X_{n,\delta}} e^{-x_1x_2^2}\,dx_1\,dx_2+\iint\limits_{X'_n} e^{-x_1x_2^2}\,dx_1\,dx_2,\quad n\in\mathbb{N},$$

где $I_n$ — интеграл из (14). По свойствам 6), 1) и 4) интеграла имеем

$$\iint\limits_{X_{n,\delta}} e^{-x_1x_2^2}\,dx_1\,dx_2\leqslant\iint\limits_{X_{n,\delta}} 1\,dx_1\,dx_2=\delta,\quad n\in\mathbb{N},\tag{15}$$

$$\iint\limits_{X'_n} e^{-x_1x_2^2}\,dx_1\,dx_2\leqslant\iint\limits_{X'_n} e^{-(n-1)\delta^2}\,dx_1\,dx_2=(n-\delta)\,e^{-(n-1)\delta^2},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что

$$I_n\leqslant\delta+(n-\delta)\,e^{-(n-1)\delta^2}=\delta\left(1-e^{-(n-1)\delta^2}\right)+ne^{-(n-1)\delta^2}<$$
$$<\delta+ne^{-(n-1)\delta^2},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Возьмем $\delta<\varepsilon/2$, а $n_0$ выберем так, что для любого $n>n_0$

$$ne^{-(n-1)\delta^2}<\varepsilon/2.$$

Это возможно, так как для фиксированного $\delta$

$$\lim_{n\to\infty} ne^{-(n-1)\delta^2}=0.$$

Тогда для любого $n>n_0$

$$I_n<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. ▲

Пример 3. На квадрате $X=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$ определена функция $f$ так, что

$$f(x)=f(x_1;\ x_2)=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},$$

если $x_1$ и $x_2$ рациональны и $x_1=p_1/q_1$, $x_2=p_2/q_2$, где $p_1/q_1$ и $p_2/q_2$ — несократимые дроби, $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2\in\mathbb{N}$,

$$f(x)=0$$

в остальных точках $X$. Доказать, что $f$ интегрируема на $X$, и вычислить интеграл от $f$ по $X$.

△ Пусть $\tau=\{X_{ij},\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n\}$ — разбиение $X$ на равные квадраты $X_{ij}$ прямыми

$$x_1=i/n,\quad x_2=j/n,\quad i,\ j\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Пусть $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant 2$. Сначала обратим внимание на точки вида $(p_1/q_1;\ p_2/q_2)$ из квадрата $X$, в которых

$$f(p_1/q_1;\ p_2/q_2)=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geqslant\frac{1}{N}.$$

Покажем, что хотя таких точек и бесконечно много, но мера объединения квадратов разбиения $\tau$, содержащих такие точки, будет достаточно малой при достаточно больших $n$. Со знаменателем $q_1\leqslant N$ имеется не более чем $q_1-1$ рациональных чисел $x_1=p_1/q_1\in(0;\ 1)$. Учитывая еще $x_1=1$, получаем, что всего рациональных чисел $x_1$ со знаменателями $q_1\leqslant N$ имеется не более чем

$$1+\sum_{q_1=2}^{N}(q_1-1)=1+\frac{1}{2}N(N-1).$$

Каждое из таких чисел принадлежит не более чем двум отрезкам вида $[(i-1)/n;\ i/n]$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Значит, мера объединения всех этих отрезков содержащих точки $x_1=p_1/q_1$ с $q_1\geqslant N$, не превосходит

$$2\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{2}N(N-1)\right)=\frac{1}{n}(2+N(N-1)).$$

Из разбиения $\tau$ выделим совокупность $Q$ всех квадратов, содержащих точки вида $(p_1/q_1;\ x_2)$, где $q_1\leqslant N$ (каждый из указанных выше отрезков дает полоску длины 1 из таких квадратов). Мера объединения квадратов этой совокупности не превосходит

$$\frac{1}{n}(2+N(N-1)).$$

В каждом оставшемся квадрате из разбиения $\tau$ для точек вида $(p_1/q_1;\ x_2)$ будет выполнено неравенство $q_1>N$.

Из этих оставшихся квадратов выделим совокупность $Q_2$ всех квадратов, содержащих точки вида $(x_1;\ p_2/q_2)$ с $q_2\leqslant N$. Рассуждая аналогично, получим, что мера их объединения также не превосходит

$$\frac{1}{n}(2+N(N-1)).$$

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число. Возьмем $N\in\mathbb{N}$ так, чтобы $N\geqslant 2$, $N>4/\varepsilon$, а затем возьмем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{1}{n}(2+N(N-1))<\varepsilon/4.$$

Оценим верхнюю сумму Дарбу от $f$ по $X$ для выбранного выше разбиения $\tau$. На каждом квадрате разбиения, входящем в $Q_1$ или $Q_2$, $\sup f\leqslant 1$. Совокупность всех оставшихся квадратов $\tau$

обозначим $\tau' = \tau \setminus (Q_1 \cup Q_2)$. На каждом из них по условию $f(x) = 0$, если $x_1$ или $x_2$ — нерациональное число, а в точке вида $(p_1/q_1;\ p_2/q_2)$ имеем

$$f(p_1/q_1;\ p_2/q_2) = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N},$$

и, значит,

$$\sup f < 2/N.$$

Мера объединения квадратов из $\tau'$ не превосходит 1. Отсюда

$$S_\tau(f) = \sum_{i,\, j=1}^{n} M_{ij}\mu(X_{ij}) = \sum_{X_{ij} \in Q_1} M_{ij}\mu(X_{ij}) +$$

$$+ \sum_{X_{ij} \in Q_2} M_{ij}\mu(X_{ij}) + \sum_{X_{ij} \in \tau'} M_{ij}\mu(X_{ij}) <$$

$$< \sum_{X_{ij} \in Q_1} \mu(X_{ij}) + \sum_{X_{ij} \in Q_2} \mu(X_{ij}) + \frac{2}{N} \sum_{X_{ij} \in \tau'} \mu(X_{ij}) <$$

$$< \frac{1}{n}(2 + N(N-1)) + \frac{1}{n}(2 + N(N-1)) + \frac{2}{N} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Учитывая, что (как очевидно) $s_\tau(f) = 0$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau(X):\ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

Значит, по критерию IV функция $f$ интегрируема на $X$, и так как $s_\tau = 0$ для любого $\tau$, то и $\int\limits_X f(x)\,dx = 0$. ▲

Замечание. Функция $f$ из этого примера непрерывна только в точках вида $(x_1;\ x_2)$, $(0;\ x_2)$, $(x_1;\ 0)$, где $x_1$ и $x_2$ — нерациональные числа, во всех остальных точках квадрата $X$ эта функция разрывна. Значит, множество точек разрыва функции $f$ не является множеством жордановой меры нуль. Тем не менее $f$ интегрируема по $X$ (сравни с указанным выше достаточным условием интегрируемости).

---

**8.1.** Пусть

$$X = [0;\ a] \times [0;\ b], \quad X_{ij} = [(i-1)a/n;\ ia/n] \times [(j-1)b/n;\ jb/n],$$

$\xi^{(i,\, j)}$ — центр прямоугольника $X_{ij}$, $\quad i, j = 1, \ldots, n$,

$$\tau_n = \{X_{ij},\quad i, j = 1, \ldots, n\}$$

— разбиение $X$,

$$\Xi_{\tau_n} = \{\xi^{(i,\, j)},\quad i, j = 1, \ldots, n\}.$$

Вычислить

$$\iint\limits_X f(x)\,dx$$

как предел сумм Римана $\sigma_{\tau_n}(f;\ \Xi_{\tau_n})$, если $(x=(x_1;\ x_2))$:

1) $f(x)=px_1+qx_2,\quad x\in X.$

2) $f(x)=x_1x_2,\quad x\in X.$

3) $f(x)=e^{px_1+qx_2},\quad x\in X,\ pq\neq 0.$

4) $f(x)=px_1^2+qx_2^2,\quad x\in X.$

**8.2.** Пусть $X=[-2;\ 2]\times[-1;\ 1]$, $\tau_n$ — разбиение $X$ на равные прямоугольники прямыми $x_1=2i/n$, $x_2=j/n$, $i, j\in\mathbb{Z}$. Найти нижнюю $s_{\tau_n}$ и верхнюю $S_{\tau_n}$ суммы Дарбу от $f$ по $X$ и их предел $I$ при $n\to\infty$, если $(x=(x_1;\ x_2))$:

1) $f(x)=2x_1-x_2,\ x\in X.$ 2) $f(x)=e^{x_1-x_2},\ x\in X.$

3) $f(x)=x_1x_2,\ x\in X.$ 4) $f(x)=x_1^2+x_2^2,\ x\in X.$

**8.3.** Пусть

$$X=\{(x_1;\ x_2):\ 0\leqslant x_1\leqslant 1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1,\ 0\leqslant x_1+x_2\leqslant 1\},$$

разбиение $\tau(X)$ состоит из четырех равных треугольников, полученных разделением $X$ прямыми $x_1=1/2$, $x_2=1/2$, $x_1+x_2=1/2$, набор $\Xi_\tau$ состоит из точек пересечения медиан этих треугольников. Найти приближенное значение интеграла $\int\limits_X f(x)\,dx$ (вычисления вести с тремя знаками после запятой), приняв за него: а) сумму Римана $\sigma=\sigma_\tau(f;\ \Xi_\delta)$; б) полусумму $S$ верхней и нижней сумм Дарбу, и оценить погрешность $\Delta$ результатов, если $(x=(x_1;\ x_2))$:

1) $f(x)=8^{x_1+x_2},\ x\in X;\ (2{,}228).$

2) $f(x)=\cos\pi(x_1+x_2),\ x\in X;\ (-0{,}203).$

3) $f(x)=\ln(1+x_1+x_2),\ x\in X;\ (0{,}250).$

4) $f(x)=\sqrt{x_1+x_2},\ x\in X;\ (0{,}400).$

Сравнить результаты со значением интеграла, указанным в скобках (с тремя знаками после запятой).

**8.4.** Выполнить такое же задание, как в задаче **8.3**, если $(x=(x_1;\ x_2))$

$$X=\{(x_1;\ x_2):\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_1^2+x_2^2\leqslant 1\},$$

разбиение $\tau$ получено разделением $X$ на четыре части окружностями радиусов $1/4$, $1/2$ и $3/4$ с центром в начале координат, точка набора $\Xi_\tau$, соответствующая элементу из $\tau$, является серединой отрезка, по которому прямая $x_2=x_1$ пересекает этот элемент, и

1) $f(x)=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\ x\in X;\ (0{,}524).$

2) $f(x)=(1+x_1^2+x_2^2)^{-1};\ x\in X;\ (0{,}544).$

3) $f(x)=e^{-x_1^2-x_2^2},\ x\in X;\ (0{,}496).$

Сравнить результаты со значением интеграла, указанным в скобках (с тремя знаками после запятой).

**8.5.** Пусть $X=\{(x_1;\ x_2):\ x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$, $\tau$ — разбиение $X$, $\Xi_\tau$ — соответствующий ему набор точек, $\varepsilon>0$. Указать такое $\delta>0$, чтобы для любого разбиения с мелкостью $|\tau|<\delta$ и любого набора $\Xi_\tau$

$$\left|\sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau)-\iint\limits_X f(x)\,dx\right|<\varepsilon,$$

если $(x=(x_1;\ x_2))$:

1) $f(x)=\sin(px_1+qx_2)$, $x\in X$.

2) $f(x)=e^{px_1+qx_2}$, $x\in X$.

3) $f(x)=\ln(2+px_1+qx_2)$, $x\in X$, где $\sqrt{p^2+q^2}<2$.

4) $f(x)=e^{x_1^2-x_2^2}$, $x\in X$.

5) $f(x)=\left(1+3x_1^2+x_2^2\right)^{-1}$, $x\in X$.

**8.6.** 1) Пусть $X=[a;\ b]\times[c;\ d]$, $F(x)=f(x_1)$, $x\in X, x=(x_1;\ x_2)$, где функция $f(x_1)$ интегрируема на $[a;\ b]$: Доказать, что $F$ интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X F(x)\,dx=(d-c)\int\limits_a^b f(x_1)\,dx_1.$$

2) Пусть $X'$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$x=(x_1;\ \ldots;\ x_n),\quad x'=(x_1;\ \ldots;\ x_{n-1}),$$
$$X=X'\times[c;\ d]\subset\mathbb{R}^n,\quad F(x)=F(x';\ x_n)=f(x'),\quad x\in X,$$

где $f(x')$ — ограниченная и интегрируемая на $X'$ функция. Доказать, что $F$ интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X F(x)\,dx=(d-c)\int\limits_{X'} f(x')\,dx'.$$

3) Пусть $X'$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^k$, $X''$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^l$,

$$x'=(x_1;\ \ldots;\ x_k),\quad x''=(x_{k+1};\ \ldots;\ x_{k+l}),$$
$$X=X'\times X''=\{x=(x';\ x'')\in\mathbb{R}^{k+l}:\ x'\in X',\ x''\in X''\}.$$

Пусть $F(x)=F(x';\ x'')=f(x')$, $x\in X$, где $f(x')$ — ограниченная и интегрируемая на $X'$ функция. Доказать, что $F$ интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X F(x)\,dx=\mu_l(X'')\int\limits_{X'} f(x')\,dx'.$$

**8.7.** 1) Пусть функция $f(x_1)$ интегрируема на $[a;\ b]$, функция $g(x_2)$ интегрируема на $[c;\ d]$, $X=[a;\ b]\times[c;\ d]$,

$$F(x)=F(x_1;\ x_2)=f(x_1)\,g(x_2),\quad x\in X.$$

Доказать, что $F$ интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X F(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x_1)\,dx_1\int\limits_c^d g(x_2)\,dx_2.$$

2) Пусть $X'$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^k$, $X''$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^l$, $x'=(x_1;\ \ldots;\ x_k)$, $x''=(x_{k+1};\ \ldots;\ x_{k+l})$, $X'\times X''=X$. Пусть функция $f(x')$ ограничена и интегрируема на $X'$, функция $g(x'')$ ограничена и интегрируема на $X''$,

$$F(x)=F(x';\ x'')=f(x')\,g(x''),\quad x\in X.$$

Доказать, что $F$ интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X F(x)\,dx=\int\limits_{X'} f(x')\,dx'\int\limits_{X''} g(x'')\,dx''.$$

**8.8.** Сформулировать отрицание критерия Коши интегрируемости функции по измеримому множеству.

**8.9.** 1) Сформулировать критерий интегрируемости I:

а) в терминах $\varepsilon-\delta$;

б) в терминах последовательностей.

2) Доказать равносильность утверждений из а) и б) в п. 1).

**8.10.** 1) Сформулировать критерий интегрируемости II:

а) в терминах $\varepsilon-\delta$;

б) в терминах последовательностей.

2) Доказать равносильность утверждений из а) и б) в п. 1).

**8.11.** 1) Сформулировать критерий интегрируемости IV в терминах последовательностей.

2) Доказать равносильность утверждения из п. 1) критерию IV.

**8.12.** Доказать равносильность определений кратного интеграла Римана в терминах $\varepsilon-\delta$ и в терминах последовательностей.

**8.13.** Доказать критерий Коши интегрируемости функции.

**8.14.** Пусть функция $f$ определена и ограничена на измеримом множестве $X$. Доказать, что:

1) Для любых двух разбиений $\tau_1(X)$ и $\tau_2(X)$

$$s_{\tau_1}(f)\leqslant S_{\tau_2}(f).$$

2) Для любой суммы Римана $\sigma_\tau(f;\ \Xi)$

$$s_\tau(f)\leqslant\sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau)\leqslant S_\tau(f).$$

3) Для любого разбиения $\tau(X)=\{X_i,\ i=1,\ \ldots,\ N\}$

$$S_\tau(f)-s_\tau(f)=\sum_{i=1}^N\omega(f;\ X_i)\,\mu(X_i),$$

где

$$\omega(f;\ X_i)=\sup_{x',\ x''\in X_i}|f(x')-f(x'')|$$

— колебание $f$ на $X_i$, $i=1,\ \ldots,\ N$.

4) Для любого разбиения $\tau(X)=\{X_i,\ i=1,\ \ldots,\ N\}$

$$s_\tau(f)=\inf_{\Xi_\tau}\sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau),\quad S_\tau(f)=\sup_{\Xi_\tau}\sigma_\tau(f;\ \Xi_\tau).$$

5) $I_*(f)\leqslant I^*(f)$.

6) $I_*(f)=\lim\limits_{|\tau(X)|\to 0}s_\tau(f)$, $\quad I^*(f)=\lim\limits_{|\tau(X)|\to 0}S_\tau(f)$.

**8.15.** Доказать, что определение $n$-кратного интеграла Римана в случае $n=1$ и $X=[a;\ b]\subset\mathbb{R}^1$ равносильно определению интеграла Римана от функции одного переменного по отрезку $[a;\ b]$ (см. [2], § 6, с. 65—66).

**8.16.** Пусть $X\in\mathbb{R}^n$, $\mu(X)=0$. Доказать, что любая функция, определенная на $X$, интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X f(x)\,dx=0,\quad x=(x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

**8.17.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$, $X_0$ — подмножество $X$ нулевой меры. Доказать, что $f$ интегрируема на $X\setminus X_0$ и

$$\int\limits_{X\setminus X_0} f(x)\,dx=\int\limits_X f(x)\,dx.$$

**8.18.** Пусть $\Omega$ — измеримое открытое множество, $\overline{\Omega}$ — его замыкание, $\Omega\subset X\subset\overline{\Omega}$. Доказать, что функция, интегрируемая на $X$, ограничена на $X$.

**8.19.** Доказать, что $I_*(f;\ X)<I^*(f;\ X)$, если $X=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$, $x=(x_1;\ x_2)\in X$, а

1) $f(x)=1$, если $x_1$ и $x_2$ рациональны, $f(x)=0$ в остальных случаях.

2) $f(x)=1$, если $x_1+x_2$ — рациональное число, $f(x)=0$ в остальных случаях.

**8.20.** Доказать, что функция $f$ интегрируема по $X$, если $(x=(x_1;\ x_2))$:

1) $X=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$; $f(x)=(-1)^n$ при $1/(n+1)<x_1<1/n$, $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$; $f(0;\ x_2)=1$ при $0\leqslant x_2\leqslant 1$.

2) $X=\{(x_1;\ x_2):\ |x_1|+|x_2|\leqslant 1\}$; $f(x)=(-1)^n$ при $1-\dfrac{1}{n}\leqslant$ $\leqslant|x_1|+|x_2|<1-\dfrac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$; $f(x)=0$ при $|x_1|+|x_2|=1$.

3) $X=\{(x_1;\ x_2):\ x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$; $f(x)=1/n$ при $1/(n+1)<$ $<\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqslant 1/n$, $n\in\mathbb{N}$; $f(0;\ 0)=0$.

**8.21.** Доказать, что функция $f$ интегрируема по $X$, и вычислить интеграл от $f$ по $X$, если $(x=(x_1;\ x_2)\in X)$:

1) $X=[-1;\ 1]\times[-1;\ 1]$; $f(x)=\operatorname{sign} x_1x_2$.

2) $X=\{(x_1;\ x_2):\ 0\leqslant x_1\leqslant 1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1-x_1\}$; $f(x)=(-1)^{n-1}$ при $1/2^n<x_1+x_2\leqslant 1/2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$; $f(0;\ 0)=0$.

3) $X=\{(x_1;\ x_2):\ x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$; $f(x)=1/2^{n-1}$ при $1-\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2}<1-\frac{1}{2^n}$, $n\in\mathbb{N}$; $f(x)=1$ при $\sqrt{x_1^2+x_2^2}=1$.

4) $X=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$; $f(x)=1/(q_1+q_2)$, если $x_i=p_i/q_i$, где $p_i/q_i$ — несократимые дроби, $p_i\in\mathbb{N}$, $q_i\in\mathbb{N}$, $i=1,\ 2$; $f(x)=0$ в остальных точках $X$.

5) $X=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$; $f(x)=1/q_1q_2$, если $x_i=p_i/q_i$, где $p_i/q_i$ — несократимые дроби, $p_i\in\mathbb{N}$, $q_i\in\mathbb{N}$, $i=1,\ 2$; $f(x)=0$ в остальных точках $X$.

**8.22.** Доказать, что функция $f$ неинтегрируема по $X=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$, если $(x=(x_1;\ x_2)\in X)$:

1) $f(x)=1$, если $x_1$ и $x_2$ — рациональные числа; $f(x)=0$ в остальных точках.

2) $f(x)=1$, если $x_1$ — рациональное число; $f(x)=0$ в остальных точках $X$.

3) $f(x)=1$, если $x_2$ — нерациональное число; $f(x)=x_1$ в остальных точках $X$.

4) $f(x)=1$, если $x_1=p_1/q$, $x_2=p_2/q$, где $p_1/q$ и $p_2/q$ — несократимые дроби, $p_1,\ p_2,\ q\in\mathbb{N}$; $f(x)=0$ в остальных точках $X$.

5) $f(x)=1/q_1q_2$, если $x_i=p_i/q_i$, где $p_i/q_i$ — несократимые дроби, $p_i,\ q_i\in\mathbb{N}$, $i=1,\ 2$; $f(x)=1$ в остальных точках $X$.

**8.23.** Указать функцию, непрерывную на измеримом множестве, но не интегрируемую на этом множестве (для сравнения см. достаточное условие интегрируемости).

**8.24.** Пусть функция $f$ непрерывна на открытом множестве $X$. Доказать, что $f$ интегрируема на любом измеримом множестве $X_1$, лежащем строго внутри $X$ (в том смысле, что каждая точка замыкания $\bar{X}_1$ является внутренней для $X$).

**8.25.** Пусть функция $f$ непрерывна на открытом множестве $X$ и для любого измеримого открытого множества $X_1$, лежащего строго (см. задачу 8.24) внутри $X$,

$$\int\limits_{X_1} f(x)\,dx=0.$$

Доказать, что $f(x)=0$ на $X$.

**8.26.** Доказать, что функция, равномерно непрерывная на измеримом множестве, интегрируема по этому множеству.

**8.27.** 1) Пусть функция $f$ определена на измеримом по Жордану множестве $X$ и множество всех ее точек разрыва имеет положительную меру Жордана. Доказать (не используя теорему Лебега), что $f$ не интегрируема по Риману на $X$.

2) Указать интегрируемую на множестве $X$ (измеримом по Жордану) функцию, множество точек разрыва которой (лежащих в $X$) не является множеством меры нуль по Жордану.

**8.28.** Указать функцию, определенную и неограниченную на множестве $X$ положительной меры Жордана, но интегрируемую на $X$.

**8.29.** 1) Пусть множество $X$ измеримо, функция $f$ определена и ограничена на его замыкании $\bar{X}$ и интегрируема на $X$. Доказать, что $f$ интегрируема на $\bar{X}$ и

$$\int_{\bar{X}} f(x)\,dx = \int_{X} f(x)\,dx.$$

2) Указать функцию, определенную на замыкании $\bar{X}$ измеримого множества $X$, интегрируемую на $X$, но не интегрируемую на $\bar{X}$.

**8.30.** Пусть $X$ — измеримое множество, $\bar{X}$ — его замыкание, функция $f$ интегрируема на $\bar{X}$. Доказать, что $f$ интегрируема на $X$ и

$$\int_{X} f(x)\,dx = \int_{\bar{X}} f(x)\,dx.$$

**8.31.** 1) Пусть функции $f$ и $g$ определены и ограничены на измеримом множестве $X$ и различны лишь на множестве жордановой меры нуль. Доказать, что если $f$ интегрируема на $X$, то и $g$ интегрируема на $X$ и

$$\int_{X} g(x)\,dx = \int_{X} f(x)\,dx.$$

2) Указать функции $f$ и $g$, определенные на измеримом множестве $X$, различающиеся лишь на множестве меры нуль, но такие, что $f$ интегрируема на $X$, а $g$ не интегрируема на $X$.

**8.32.** Пусть функция $f$ интегрируема по множеству $X$, $\operatorname{in} X$ — множество всех внутренних точек $X$, $X_1$ — измеримое подмножество $\operatorname{in} X$, $X_2 = X \setminus X_1$. Доказать, что $f$ интегрируема на $X_1$ и на $X_2$ и

$$\int_{X} f(x)\,dx = \int_{X_1} f(x)\,dx + \int_{X_2} f(x)\,dx.$$

**8.33.** Указать множество $X$ положительной меры и функцию, определенную и неограниченную на $X$, но интегрируемую и на $X$, и на любом измеримом подмножестве $X$.

**8.34.** Указать непересекающиеся множества $X_1$ и $X_2$ положительной меры и функцию, интегрируемую на $X_1$ и на $X_2$, но не интегрируемую на $X_1 \cup X_2$ (см. свойство 3)).

**8.35.** Указать множество $X$ положительной меры и функции $f$ и $g$, неограниченные и интегрируемые на $X$ и такие, что

1) произведение $f \cdot g$ интегрируемо на $X$;

2) $\inf\limits_X |g(x)| > 0$ и частное $f/g$ интегрируемо на $X$ (см. свойство 5)).

**8.36.** 1) Указать измеримое множество $X$ и определенную на нем функцию $f$ такие, что функция $|f|$ интегрируема на $X$, а $f$ не интегрируема на $X$ (см. свойство 7)).

2) Указать множество $X$ положительной меры и интегрируемую неограниченную на $X$ функцию $f$ такую, что функция $|f|$ интегрируема на $X$ и

$$\left| \int\limits_X f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,dx.$$

**8.37.** Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на множестве $X$, непрерывны в его внутренней точке $x_0$ и $f(x_0) < g(x_0)$, $f(x) \leqslant g(x)$, $x \in X$. Доказать, что $\int\limits_X f(x)\,dx < \int\limits_X g(x)\,dx$.

**8.38.** Функция $f$ непрерывна и интегрируема на множестве $X$ и $\int\limits_X f(x)\,dx > 0$. Доказать, что существует куб $Q \subset X$ такой, что $f(x) > 0$ на $Q$.

**8.39.** Пусть $X$ — измеримое множество положительной меры, функция $f$ интегрируема на $X$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in X$. Доказать, что

$$\int\limits_X f(x)\,dx > 0.$$

**8.40.** Пусть $X_1$ — линейно-связное измеримое множество, $X_0$ — множество меры нуль, $X = X_1 \cup X_0$, и пусть функция $f$ ограничена и интегрируема на $X$ и непрерывна на $X_1$. Доказать, что существует такая точка $\xi \in X$, что

$$\int\limits_X f(x)\,dx = f(\xi)\,\mu(X_1).$$

**8.41.** Доказать неравенства ($x = (x_1;\ x_2)$):

1) $$1{,}96 < \int\limits_X (100 + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2)^{-1}\,dx < 2,$$

где $X = \{(x_1;\ x_2)\colon |x_1| + |x_2| \leqslant 10\}$.

2) $$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi < \int\limits_X \frac{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}{4 + x_1^4 + x_2^4}\,dx < \frac{3}{4}\pi,$$

где $X = \{(x_1;\ x_2)\colon 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$.

3) $$\frac{4-\sqrt{2}}{7\ln 2} < \int\limits_X \frac{2^{x_1-x_2}}{1+2^{x_1+x_2}}\,dx < \frac{16-2\sqrt{2}}{31\ln 2},$$

где $X=[2{,}5;\ 3]\times[-1;\ -0{,}5]$. (Указание. Можно воспользоваться результатом задачи 8.6.)

**8.42.** Пусть $X_n=[0;\ n]\times[0;\ n]$, $Y_n=X_{n+1}\setminus X_n$, $n\in\mathbb{N}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{Y_n} f(x)\,dx=0,$$

если для $x\in Y_n$, $n\in\mathbb{N}$, $x=(x_1;\ x_2)$:

1) $f(x)=\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\alpha}$, $\alpha<-1/2$. 2) $f(x)=\dfrac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^4}$.

3) $f(x)=(1+x_1x_2)^{-2}$. 4) $f(x)=e^{-\left|x_1^2-x_2^2\right|}$.

**8.43.** Пусть $Y_n$ — множества из задачи 8.42. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{Y_n} f(x)\,dx=+\infty,$$

если для $x\in Y_n$, $n\in\mathbb{N}$, $x=(x_1;\ x_2)$:

1) $f(x)=(2x_1+x_2)^{-1/2}$.

2) $f(x)=(1+|x_1-x_2|)^{-1}$.

**8.44.** Пусть $Y_n$ — множества из задачи 8.42. Доказать, что ($x=(x_1;\ x_2)$)

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{Y_n}\frac{dx}{1+x_2\ln(x_1+x_2)}=1.$$

**8.45.** Пусть функция $f$ непрерывна, неотрицательна и интегрируема на $X$, $M=\sup\limits_X f$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_X (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}=M.$$

**8.46.** Пусть функция $f$ интегрируема по $X$, $X_0$ — множество всех таких точек замыкания $\bar{X}$, в любой окрестности каждой из которых функция $f$ не ограничена. Доказать, что существует такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\tau(X)$ с мелкостью $|\tau(X)|<\delta$ мера любого его элемента, замыкание которого имеет с $X_0$ общую точку, равна нулю.

**8.47.** Пусть измеримое множество таково, что существуют его разбиения сколь угодно малой мелкости, все элементы которых имеют положительную меру. Доказать, что всякая интегрируемая на этом множестве функция ограничена на нем.

**8.48.** Пусть функция $f$ интегрируема по множеству $X$ положительной меры, $X_0$ — множество всех точек замыкания $\bar{X}$, в любой окрестности каждой из которых функция $f$ не ограничена, $\operatorname{in} X$ — множество всех внутренних точек $X$. Доказать, что расстояние между $X_0$ и $\operatorname{in} X$ положительно.

**8.49.** 1) Пусть функция $f$ интегрируема по множеству $X$ положительной меры, $\operatorname{in} X$ — множество всех внутренних точек $X$. Доказать, что $f$ интегрируема и ограничена на множестве $X \cap \overline{\operatorname{in} X}$ и

$$\int\limits_{X \cap \overline{\operatorname{in} X}} f(x)\,dx = \int\limits_X f(x)\,dx.$$

2) Указать множество $X$ положительной меры и определенную на нем функцию $f$, которая интегрируема на $X \cap \overline{\operatorname{in} X}$, но не интегрируема на $X$.

**8.50.** Пусть функция $f$ интегрируема по множеству $X$ положительной меры, $\operatorname{in} X$ — множество всех внутренних точек $X$. Доказать, что существует такое подмножество $X_0 \subset X$ нулевой меры, что $f$ ограничена на $X \setminus X_0$ и расстояние между $X_0$ и $\operatorname{in} X$ положительно.

**8.51.** Пусть $X$ — множество положительной меры, $\operatorname{in} X$ — множество всех его внутренних точек, $X_0 \subset X$, $\mu(X_0) = 0$, $\rho(X_0; \operatorname{in} X) > 0$. Доказать, что если функция $f$ определена на $X$, ограничена на $X \setminus X_0$ и интегрируема на $X \cap \overline{\operatorname{in} X}$, то $f$ интегрируема на $X$ и

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_{X \cap \overline{\operatorname{in} X}} f(x)\,dx.$$

**8.52.** 1) Доказать свойства 2), 3), 5), 7), 8), 10) кратного интеграла Римана.

2) Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на множестве $X$ положительной меры, $\operatorname{in} X$ — множество всех внутренних точек $X$, $g$ не меняет знака на $\operatorname{in} X$. Доказать:

а) Существует такое число $\lambda$, что

$$\inf_{\operatorname{in} X} f \leqslant \lambda \leqslant \sup_{\operatorname{in} X} f$$

и

$$\int\limits_X f(x)\,g(x)\,dx = \lambda \int\limits_X g(x)\,dx.$$

б) Если к тому же $X$ — линейно связное множество или замыкание линейно связного множества и $f$ непрерывна на $\operatorname{in} X$, то существует такая точка $\xi \in \operatorname{in} X$, что

$$\int\limits_X f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi) \int\limits_X g(x)\,dx.$$

**8.53.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ есть такое $\delta > 0$, что для любого измеримого подмножества $X_1 \subset X$ такого, что $\mu(X_1) < \delta$,

$$\left| \int\limits_{X_1} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

**8.54*.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$, и пусть $f(x) = 0$ в каждой точке $x \in X$, в которой она непрерывна. Доказать, что

$$\int\limits_X f(x)\, dx = 0.$$

**8.55.** Пусть функция $f$ непрерывно дифференцируема на квадрате $X = [0;\ 1] \times [0;\ 1]$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} n \left( \int\limits_X f(x)\, dx - \frac{1}{n^2} \sum_{i,\, j=1}^{n} f(i/n;\ j/n) \right).$$

**8.56.** Пусть линии уровня непрерывной функции $f(x;\ y)$ — простые гладкие замкнутые кривые, пусть $v_0$ — фиксированное значение $f$, $\Omega(v)$ — область, ограниченная линиями уровня $f(x; y) = v_0$ и $f(x; y) = v$, $S(v)$ — площадь этой области. Доказать, что

$$\iint\limits_{\Omega(v)} f(x;\ y)\, dx\, dy = \int\limits_{v_0}^{v} uS'(u)\, du.$$

(Указание. Рассмотреть разбиение $\Omega(v)$ линиями уровня $f(x; y) = u_j$, где $\{u_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, — разбиение отрезка $[v_0;\ v]$.)

**8.57.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$ и $a \leqslant f(x) \leqslant b$, $x \in X$, функция $g$ непрерывна на $[a;\ b]$. Доказать, что композиция $g \circ f$ интегрируема на $X$.

**8.58.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$ и $a \leqslant f(x) \leqslant b$, $x \in X$, функция $g$ выпукла (вверх или вниз) на $[a;\ b]$. Доказать, что композиция $g \circ f$ интегрируема на $X$.

**8.59.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$. Доказать, что для любого $p > 0$ функция $|f|^p$ интегрируема на $X$.

**8.60.** Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на $X$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказать, что

$$\int\limits_X |f(x)\, g(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_X |f(x)|^p\, dx + \frac{1}{q} \int\limits_X |g(x)|^q\, dx.$$

(Указание. Доказать *неравенство Юнга* $|ab| < \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} |a|^q$ и воспользоваться им.)

**8.61.** Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на $X$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказать *неравенство Гёльдера*

$$\int\limits_X |f(x)\,g(x)|\,dx \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

(Указание. Применить результат задачи **8.60** к функциям $\alpha f$ и $\frac{1}{\alpha} g$, подобрав $\alpha$.)

**8.62.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказать, что

$$\int\limits_X |f(x)|\,dx \leqslant (\mu(X))^{1/q} \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

**8.63.** Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы на $X$. Доказать *неравенства Минковского*:

1) Если $p \geqslant 1$, то

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

2) Если $0 < p < 1$, то

$$\left(\int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \geqslant \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_X |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

**8.64.** Пусть функция $f$ интегрируема на $X$ и $f(x) = 0$ вне $X$, пусть $h \in \mathbb{R}^n$.

1) Указать такие $X$, $f$ и $h$, что функция $f(x+h)$, $x \in X$, не интегрируема на $X$.

2) Пусть дополнительно $f$ ограничена на $X$. Доказать, что функция $f(x+h)$, $x \in X$, интегрируема на $X$ для любого $h \in \mathbb{R}^n$.

3) При тех же условиях, что и в 2), доказать, что

$$\lim_{h \to 0} \int\limits_X |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0.$$

4) Не предполагая ограниченности $f$ на $X$, доказать, что существует такое $\delta > 0$, что для любого $h \in \mathbb{R}^n$ такого, что $|h| < \delta$, функция $f(x+h)$, $x \in X$, интегрируема на $X$.

5) При тех же условиях, что и в 4), доказать равенство из 3).

**8.65.** 1) Пусть функция $f$ интегрируема и ограничена на $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y$ — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $Y \supset X$. Пусть $\tilde{f}$ — продолжение $f$ нулем на $Y$ *). Доказать, что $\tilde{f}$ интегрируема на $Y$ и

$$\int\limits_Y \tilde{f}(x)\,dx = \int\limits_X f(x)\,dx.$$

---

*) Это значит, что $\tilde{f} = f$ на $X$, $\tilde{f} = 0$ на $Y \setminus X$.

2) Указать измеримые множества $X$ и $Y$ из $\mathbb{R}^n$, $X \subset Y$, и функцию $f$, интегрируемую на $X$, такие, что $\tilde{f}$ — продолжение $f$ нулем на $Y$ (см. 1)), не интегрируема на $Y$.

**8.66.** Пусть $X$ и $Y$ — измеримые множества в $\mathbb{R}^n$, $X \subset Y$, $Y$ — открытое множество или замыкание открытого множества. Пусть функция $f$ интегрируема на $X$, а ее продолжение нулем на $Y$ интегрируемо на $Y$. Доказать, что $f$ ограничена на $X$.

**8.67.** Одно из возможных определений интеграла Римана таково ($x = (x_1; \ldots; x_n)$). Пусть

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n: a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

— прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ с ребрами, параллельными координатным осям (говорят также — промежуток, брус). Мерой $\mu(I)$ такого параллелепипеда называют произведение

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

что совпадает с мерой Жордана (§ 7) прямоугольного параллелепипеда. Рассматривают разбиения данного параллелепипеда $I$ на параллелепипеды же плоскостями, параллельными координатным. Используя только такие разбиения, определяют интеграл по $I$ от функции $f$, определенной на $I$, посредством сумм Римана так же, как и в определении (2) в начале этого параграфа.

1) Доказать, что для параллелепипеда $I$ такое определение интеграла от $f$ по $I$ равносильно определению (2).

Далее, пусть функция $f$ определена на ограниченном множестве $X$, $I$ — параллелепипед, содержащий $X$, $X \subset I$. Пусть $\chi_X$ — характеристическая функция $X$ *). Если существует интеграл **)

$$\int_I f\chi_X(x)\,dx,$$

то его называют *интегралом Римана от $f$ по $X$* и обозначают $\int_X f(x)\,dx$, т. е.

$$\int_X f(x)\,dx = \int_I f\chi_X(x)\,dx. \tag{18}$$

2) Доказать, что существование интеграла (18) и его величина не зависят от выбора параллелепипеда $I$, содержащего $X$.

Отметим, что в определении (18) множество $X$ не предполагают измеримым по Жордану.

3) Доказать, что если $X$ неизмеримо по Жордану и $f = \mathrm{const} \neq 0$ на $X$, то $f$ не интегрируема на $X$ в смысле определения (18).

---

*) Это значит, $\chi_X(x) = 1$ для $x \in X$, $\chi_X(x) = 0$ вне $X$.

**) Считают по определению $f\chi_X = f$ на $X$ и $f\chi_X = 0$ вне $X$.

*Мерой* ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называют число

$$\mu(X) = \int\limits_X 1\,dx,$$

если этот интеграл в смысле (18) существует.

4) Доказать, что такое определение меры равносильно определению из § 7 меры Жордана, а сами меры совпадают.

5) Доказать, что если функция $f$ интегрируема на $X$ в смысле (18), то $f$ ограничена на $X$.

6) Указать такое множество $X$ и определенную на нем функцию $f$, что $f$ интегрируема на $X$ в смысле (18), но $X$ неизмеримо по Жордану и, следовательно, интеграл от $f$ по $X$ в смысле определения (2) не существует.

7) Указать измеримое по Жордану множество $X$ и определенную на нем функцию $f$, которая интегрируема на $X$ в смысле определения (2), но не интегрируема на $X$ в смысле (18).

8) Доказать, что на классах измеримых по Жордану множеств и ограниченных функций определения интеграла (2) и (18) равносильны.

**8.68.** Пусть семейство измеримых в $\mathbb{R}^n$ множеств $X(\lambda)$, $\lambda \in [0;\ 1]$, таково, что функция $\mu(\lambda) = \mu(X(\lambda))$ непрерывна на $[0;\ 1]$ и $X(\lambda_1) \subset X(\lambda_2)$ для любых $\lambda_1$ и $\lambda_2$ из $[0;\ 1]$ таких, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Пусть функция $f$ интегрируема на $X(1)$.

1) Доказать, что функция

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{X(\lambda)} f(x)\,dx$$

непрерывна на $[0;\ 1]$.

2) Пусть $\mu(0) = 0$, $f(x) > 0$ для любого $x \in X(1)$. Доказать, что для любого $\theta \in [0;\ 1]$ найдется $\lambda(\theta) \in [0;\ 1]$ такое, что

$$\theta \int\limits_{X(1)} f(x)\,dx = \int\limits_{X(\lambda(\theta))} f(x)\,dx.$$

3) Пусть дополнительно к условиям 2) функция $\mu(\lambda)$ строго возрастает на $[0;\ 1]$. Доказать, что для любого $\theta \in [0;\ 1]$ уравнение относительно $\lambda(\theta)$ из 2) имеет только одно решение.

4) Пусть дополнительно к условиям 2) и 3) $X(0) = \{x_0\}$ — точка в $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam} X(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$, функция $f$ непрерывна в точке $x_0$. Найти

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\mu(\lambda(\theta))}{\theta}.$$

**8.69.** Пусть функция $f$ интегрируема по $X$, $x_0 \in X$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. Пусть $Q_\lambda$ — куб с центром $x_0$ и ребрами длины $\lambda$, $X_\lambda = X \cap Q_\lambda$ и $\mu(X_\lambda) > 0$ для любого $\lambda > 0$. Доказать, что

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\mu(X_\lambda)} \int\limits_{X_\lambda} f(x)\,dx = a.$$

**8.70.** 1) Пусть $\Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность открытых шаров с центрами в начале координат и с радиусами $R_n > 0$, $\lim\limits_{n\to} R_n = +\infty$. Пусть функция $f$ определена на $\mathbb{R}^n$, интегрируема по любому шару $\Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} f(x)\,dx = a.$$

2) Доказать предыдущий результат, заменив последовательность шаров $\Omega_n$ такой произвольной последовательностью измеримых открытых множеств $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, что $\mu(X_n) > 0$, $X_n \subset X_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbb{R}^n$.

**8.71.** Пусть $X = [0;\ 1] \times [0;\ 1]$, $x = (x_1;\ x_2)$, функция $f$ непрерывна на $X$. Найти

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f\left(x_1^n;\ x_2^n\right) dx.$$

**8.72.** Указать измеримое множество $X$ и интегрируемую на нем функцию, у которой множество содержащихся в $X$ точек разрыва неизмеримо по Жордану, но имеет нулевую меру по Лебегу.

**8.73.** Пусть функция $f$ интегрируема на множестве $X$, $\tau(X) = \{X_j,\ j = 1,\ \ldots,\ N\}$ — разбиение $X$. Пусть $\sigma > 0$, а $X_\sigma$ — объединение всех элементов $X_j \in \tau(X)$, на каждом из которых колебание $\omega(f;\ X_j) \geqslant \sigma$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ существует такое разбиение $\tau(X)$ с мелкостью $|\tau(X)| < \delta$, что $\mu(X_\sigma) < \varepsilon$.

**8.74*.** Доказать критерий Лебега интегрируемости ограниченных функций.

---

**2. Связь между кратными и повторными интегралами.** На плоскости множество $X$ вида

$$X = \{(x;\ y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\} \tag{19}$$

называют *элементарным относительно оси* $Oy$ (рис. 12). Здесь функции $\varphi$ и $\psi$ непрерывны на $[a;\ b]$ и $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ на $[a;\ b]$.

Аналогично определяют множество *элементарное относительно оси* $Ox$ (рис. 13).

Теорема 4. Если функция $f$ интегрируема на множестве $X$ вида (19), элементарном относительно оси $Oy$, то

$$\iint\limits_X f(x;\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ y)\,dy. \tag{20}$$

Правая часть в (20) является *повторным интегралом*, т. е. результатом последовательного вычисления сначала интеграла по $y$ при фиксированном $x$, а затем интеграла по $x$ от получившейся функции. Если функция $f(x;\ y)$ непрерывна на множестве $X$, то каждый из этих интегралов существует. О более общем случае см. [3].

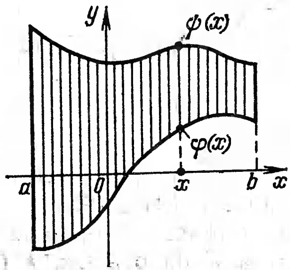


Рис. 12

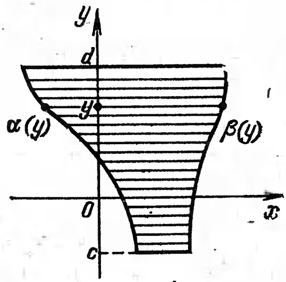


Рис. 13

Если множество $X$ элементарно относительно оси $Ox$ (рис. 13), то для интегрируемой по $X$ функции $f(x;\ y)$ верно равенство

$$\iint_X f(x;\ y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;\ y)\,dx. \qquad (21)$$

Множество $X$, элементарное относительно каждой из осей $Ox$ и $Oy$, называют *элементарным*. Для него верно каждое из равенств (20) и (21), в частности

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ y)\,dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x;\ y)\,dx. \qquad (22)$$

Это равенство используют для перемены порядка интегрирования в повторном интеграле.

В пространстве множество $X$ вида

$$X = \{(x;\ y;\ z):\ (x;\ y) \in X',\ \alpha(x;\ y) \leqslant z \leqslant \beta(x;\ y)\} \qquad (23)$$

называют *элементарным относительно оси* $Oz$. Здесь множество $X'$ — проекция $X$ на плоскость $Oxy$ — измеримо, $\alpha(x;\ y) \leqslant \beta(x;\ y)$ на $X'$. Аналогично определяют множество, элементарное относительно оси $Oy$ или $Ox$. Множество, элементарное относительно каждой из координатных осей, называют *элементарным*.

Теорема 5. Если функция $f$ интегрируема на множестве $X$ вида (23), элементарном относительно оси $Oz$, то

$$\iiint_X f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{X'} dx\,dy \int_{\alpha(x;\ y)}^{\beta(x;\ y)} f(x;\ y;\ z)\,dz. \qquad (24)$$

Повторный интеграл в правой части (24) является результатом последовательного вычисления сначала интеграла по $z$ при фиксированных $x$ и $y$, а затем двойного интеграла по $x$, $y$.

Если множество $X'$ на плоскости $Oxy$ элементарно, например, относительно оси $Oy$, т. е. имеет вид (19), то вычисление тройного интеграла от $f$ по $x$, $y$, $z$ сводится к вычислению трех однократных интегралов:

$$\iiint\limits_X f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\alpha(x;\ y)}^{\beta(x;\ y)} f(x;\ y;\ z)\,dz. \quad (25)$$

При соответствующих предположениях тройной интеграл может быть вычислен и как повторный интеграл, в котором порядок интегрирования отличен от указанного в (24), (25).

Возможен и другой способ сведения тройного интеграла к повторному. Пусть $I$ — проекция множества $X$ на ось $Oz$, $X'(z)$ — сечение $X$ плоскостью $z = \mathrm{const} \in I$ (рис. 14).

Теорема 6. Пусть измеримы по Жордану множества $X$ в $\mathbb{R}^3$, $I$ в $\mathbb{R}^1$ и $X'(z)$ в $\mathbb{R}^2$ для любого $z \in I$, пусть функция $f(x;\ y;\ z)$ интегрируема на множестве $X$, а как функция от $(x;\ y)$ интегрируема на множестве $X'(z)$ для любого $z \in I$. Тогда

$$\int\limits_X f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_I dz \int\limits_{X'(z)} f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy. \quad (26)$$

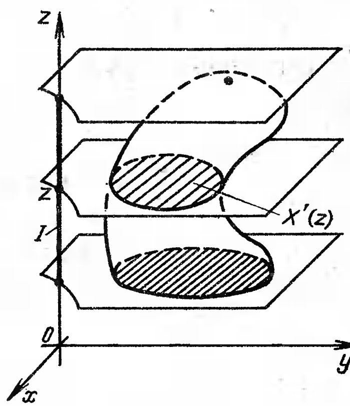

Рис. 14

Аналогичное равенство при соответствующих предположениях можно получить, если вместо оси $Oz$ выделить другую координатную ось.

Равенства, подобные (24)—(26), имеют место и для $n$-кратных интегралов.

Пример 4. Вычислить

$$I_j = \iint\limits_{X_j} f_j(x;\ y)\,dx\,dy,$$

если

1) $f_1(x;\ y) = (1 + x + y)^{-2}$, $X_1$ — треугольник, ограниченный прямыми $x = 2y$, $y = 2x$, $x + y = 6$;

2) $f_2(x;\ y) = y^2$, множество $X_2$ ограничено линиями $x = y^2$, $y = x - 2$;

3) $f_3(x;\ y) = x$, множество $X_3$ задано неравенствами $2rx \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 < 2r < R$.

△ 1) Треугольник $X_1$ изображен на рис. 15. Отрезком $AB$ разделим $X_1$ на два треугольника $\Delta_1$ и $\Delta_2$, элементарных относительно оси $Oy$. Тогда

$$I_1=\iint\limits_{\Delta_1} f_1(x;\ y)\,dx\,dy+\iint\limits_{\Delta_2} f_1(x;\ y)\,dx\,dy.$$

По формуле (20) находим

$$\iint\limits_{\Delta_1} f_1(x;\ y)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{2x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_0^2\left(-\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_{x/2}^{2x}dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(-\frac{1}{1+3x}+\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln 7+\frac{2}{3}\ln 4,$$

$$\iint\limits_{\Delta_2} f_1(x;\ y)\,dx\,dy=\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x/2}^{6-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=$$

$$=\int\limits_2^4\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}\right)dx=-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}(\ln 7-\ln 4);$$

следовательно, $I_1=\frac{1}{3}\ln 7-\frac{2}{7}$.

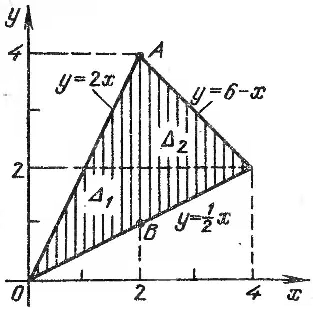


Рис. 15

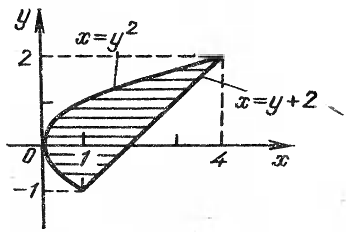


Рис. 16

2) Множество $X_2$ изображено на рис. 16. Оно элементарно относительно оси $Ox$:

$$X_2=\{-1\leqslant y\leqslant 2,\ y^2\leqslant x\leqslant y+2\}.$$

Вычисляем $I_2$ по формуле (21):

$$I_2=\int\limits_{-1}^{2} dy\int\limits_{y^2}^{y+2} y^2\,dx=\int\limits_{-1}^{2} y^2\left(x\,\Big|_{y^2}^{y+2}\right)dy=\int\limits_{-1}^{2} y^2(y+2-y^2)\,dy=\frac{63}{20}.$$

3) Множество $X_3$ — неконцентричное кольцо, изображено на рис. 17. Вычисления $I_3$ производим следующим образом. Обо-

значим $K_1$ — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $K_2$ — круг $x^2+y^2<2rx$. Тогда $X_3 = K_1 \diagdown K_2$. Продолжим функцию $f_3$ с $X_3$ на $K_2$, полагая $f_3(x;y)=x$ для $(x;y)\in K_2$. Тогда

$$I_3=\iint\limits_{K_1} x\,dx\,dy-\iint\limits_{K_2} x\,dx\,dy,$$

первый интеграл здесь обозначим $A_1$, второй — $A_2$. Круги $K_1$ и $K_2$ зададим в виде

$$K_1=\{-R\leqslant y\leqslant R,\quad -\sqrt{R^2-y^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{R^2-y^2}\},$$
$$K_2=\{-r\leqslant y\leqslant r,\quad r-\sqrt{r^2-y^2}\leqslant x\leqslant r+\sqrt{r^2-y^2}\}.$$

По формуле (21) находим

$$A_1=\int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} x\,dx=0,$$

так как функция $x$ во внутреннем интеграле нечетна,

$$A_2=\int\limits_{-r}^{r} dy \int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{r+\sqrt{r^2-y^2}} x\,dx=2r\int\limits_{-r}^{r}\sqrt{r^2-y^2}\,dy=\pi r^3.$$

Следовательно, $I_3=A_1-A_2=-\pi r^3$. ▲

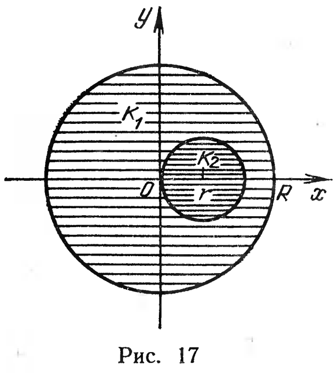


Рис. 17

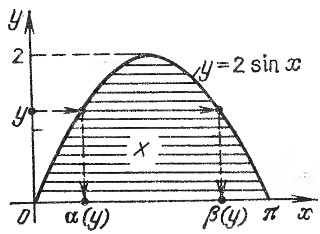


Рис. 18

**Пример 5.** Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{2\sin x} f(x;y)\,dy.$$

△ Неравенства $0\leqslant x\leqslant \pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\sin x$ задают множество $X$, указанное на рис. 18. Проекцией $X$ на ось $Oy$ является отрезок $[0;\ 2]$. Каждая прямая $y=\text{const}\in[0;\ 2)$ пересекает множество $X$ по отрезку с концами $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, которые находим как решения уравнения $y=2\sin x$ из отрезка $[0;\pi]$ : $\alpha(y)=$ $=\arcsin(y/2)$, $\beta(y)=\pi-\arcsin(y/2)$. Таким образом, множество $X$ задается неравенствами

$$0\leqslant y\leqslant 2,\quad \arcsin(y/2)\leqslant x\leqslant \pi-\arcsin(y/2).$$

По формуле (22) имеем

$$\int_0^{\pi} dx\int_0^{2\sin x} f(x;\ y)\,dy=\int_0^2 dy\int_{\arcsin(y/2)}^{\pi-\arcsin(y/2)} f(x;\ y)\,dx. \ \blacktriangle$$

Перемена порядка в повторном интеграле иногда существенно упрощает его вычисление.

Пример 6. Вычислить

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}\,dy.$$

$\triangle$ Внутренний интеграл не является элементарной функцией $x$ (см. [2], с. 39). Пределы интегрирования в данном повторном интеграле определяют треугольник (рис. 19), который можно задать и неравенствами $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant y$. Следовательно,

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y \sqrt[4]{1-y^2}\,dx=$$

$$\int_0^1 \sqrt[4]{1-y^2}\,y\,dy=2/5. \ \blacktriangle$$

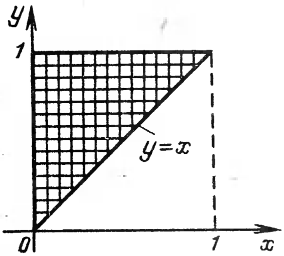

Рис. 19

Пример 7. Доказать, что при $|a|\neq 1$

$$\int_0^{\pi} \ln(a^2+1-2a\cos\varphi)\,d\varphi=\begin{cases} 2\pi\ln|a|, & |a|>1,\\ 0, & |a|<1.\end{cases}$$

$\triangle$ Обозначим данный интеграл $I(a)$. С помощью замены $\varphi=\pi-\psi$ легко проверить, что $I(-a)=I(a)$, т. е. $I(a)$ — четная функция. Очевидно, $I(0)=0$. Пусть $a>1$, тогда

$$\ln(a^2+1-2a\cos\varphi)=2\ln a+\ln(a_1^2+1-2a_1\cos\varphi),$$

$$I(a)=2\pi\ln a+I(a_1),$$

где $a_1=1/a$, $0<a_1<1$. Для вычисления интеграла $I(a)$ при $a\in(0;\ 1)$ используем сведение его к двойному интегралу. Для $a\in(0;\ 1)$ имеем

$$a^2+1-2a\cos\varphi=(a-1)^2+2a(1-\cos\varphi)\geqslant(a-1)^2>0,$$

$$\frac{d}{da}\ln(a^2+1-2a\cos\varphi)=\frac{2(a-\cos\varphi)}{a^2+1-2a\cos\varphi}\equiv f(a;\ \varphi),$$

поэтому

$$I(a)=\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{a} f(t;\ \varphi)\,dt.$$

Функция $f(t;\ \varphi)$ непрерывна на прямоугольнике

$$Q=\{0\leqslant\varphi\leqslant\pi;\ 0\leqslant t\leqslant a<1\},$$

поэтому $f$ интегрируема на $Q$ и двойной интеграл равен любому из повторных. Значит,

$$I(a)=\iint_Q f(t;\ \varphi)\,dt\,d\varphi=\int_0^a dt\int_0^{\pi}\frac{2(t-\cos\varphi)}{t^2+1-2t\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Внутренний интеграл здесь можно вычислить, например, с помощью замены $u=\operatorname{tg}(\varphi/2)$ (см. также задачу **6.186** из [2]). Он равен нулю, поэтому и $I(a)=0$, $0<a<1$. Отсюда следует требуемое. ▲

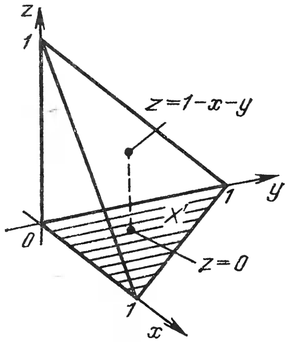


Рис. 20

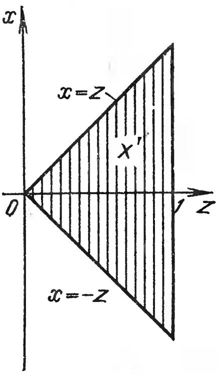


Рис. 21

Пример 8. Вычислить интеграл

$$I_j=\iiint_{X_j} f_j(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz,$$

где

1) $f_1(x;y;z)=x+y+z$, множество $X_1$ ограничено плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

2) $f_2(x;\ y;\ z)=y$, множество $X_2$ задано неравенствами $|x|\leqslant z$, $0\leqslant z\leqslant 1$, $z\leqslant y$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

△ 1) Множество $X_1$ — тетраэдр, который можно задать в виде (23):

$$X_1=\{(x;\ y)\in X',\ 0\leqslant z\leqslant 1-x-y\},$$

где

$$X'=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$$

— треугольник (рис. 20).

По формуле (25) имеем

$$I_1=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(x+y+z)^2\Big|_0^{1-x-y}dy=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-(x+y)^2)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y-\frac{1}{3}(x+y)^3\right)\Big|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x-\frac{1}{3}(1-x^3)\right)dx=1/8.$$

2) Неравенства $|x|\leqslant z$, $0\leqslant z\leqslant 1$ задают треугольник $X'$ на плоскости $Oxz$ (рис. 21). Решим исходную систему неравенств относительно $y$. Из второго и третьего неравенств сле-

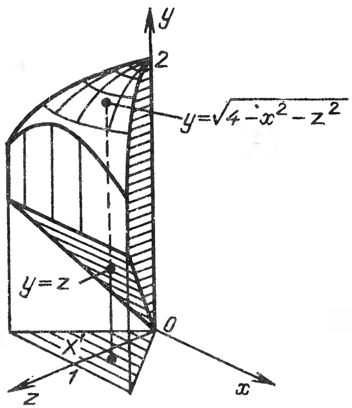


Рис. 22

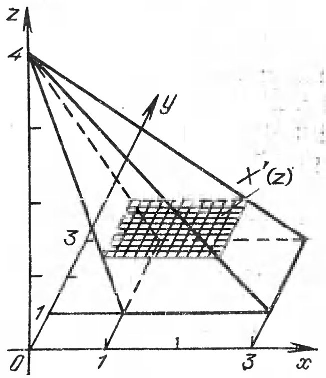


Рис. 23

дует, что $y\geqslant 0$, поэтому третье и четвертое неравенства равносильны системе

$$z\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2-z^2}. \tag{27}$$

Эта система имеет решения, если только $\sqrt{4-x^2-z^2}\geqslant z$. Этому условию удовлетворяют все точки треугольника $X'$, так как для них

$$\sqrt{4-x^2-z^2}\geqslant\sqrt{4-2z^2}\geqslant\sqrt{2}>1\geqslant z.$$

Значит, система (27) имеет решения для любой точки из $X'$. Поэтому множество $X_2$ имеет вид (рис. 22)

$$X_2=\left\{(x;\ z)\in X',\ z\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2-z^2}\right\}.$$

По формуле, аналогичной (25), имеем

$$I_2=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dx\int_{z}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} y\,dy=$$

$$=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}\frac{1}{2}y^2\Big|_z^{\sqrt{4-x^2-z^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 dz\int_{-z}^{z}(4-x^2-2z^2)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left((4-2z^2)\,x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-z}^{z}dz=\int_0^1\left(4z-\frac{7}{3}z^3\right)dz=\frac{17}{12}. \ ▲$$

Пример 9. Вычислить

$$I=\iiint\limits_G\frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z)^3},$$

где $G$ — множество, ограниченное плоскостями

$$4x+3z=12,\quad 4x+z=4,\quad 4y+3z=12,\quad 4y+z=4,\quad z=0.$$

△ Данное множество — пирамида с вершиной в точке $(0; 0; 4)$, основанием которой является квадрат $1\leqslant x\leqslant 3$, $1\leqslant y\leqslant 3$ (рис. 23). Проекцией пирамиды на ось $Oz$ является отрезок $I=[0; 4]$. Сечениями $X'(z)$ пирамиды плоскостями $z=\text{const}\in[0; 4)$ являются квадраты, ограниченные прямыми

$$x=3-\frac{3}{4}z,\quad x=1-\frac{1}{4}z,\quad y=3-\frac{3}{4}z,\quad y=1-\frac{1}{4}z.$$

Иначе говоря, сечение $X'(z)$ задается неравенствами

$$1-\frac{1}{4}z\leqslant x\leqslant 3-\frac{3}{4}z,\quad 1-\frac{1}{4}z\leqslant y\leqslant 3-\frac{3}{4}z.$$

Вычисляем данный интеграл по формуле (26):

$$I=\int_0^4 dz\iint\limits_{X'(z)}\frac{dx\,dy}{(x+y+z)^3}=\int_0^4 dz\int_{1-\frac{1}{4}z}^{3-\frac{3}{4}z}dx\int_{1-\frac{1}{4}z}^{3-\frac{3}{4}z}\frac{dy}{(x+y+z)^3}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^4 dz\int_{1-\frac{1}{4}z}^{3-\frac{3}{4}z}\left(\frac{1}{\left(x+3+\frac{1}{4}z\right)^2}-\frac{1}{\left(x+1+\frac{3}{4}z\right)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4\left(\frac{1}{6-\frac{1}{2}z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}z}\right)dz=\ln 3-1. \ ▲$$

**3. Замена переменных в кратном интеграле.**

Теорема 7. Пусть $X \subset \mathbb{R}_x^n$, $U \subset \mathbb{R}_u^n$ *) — измеримые области, $\varphi$ — отображение $\bar{U}$ на $\bar{X}$ такое, что

1) $\varphi$ взаимно однозначно на $U$;

2) $\varphi$ непрерывно дифференцируемо на $\bar{U}$.

Если функция $f(x)$ интегрируема на $X$, то функция $f(\varphi(u)|J(u)|$ интегрируема на $U$ и

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_U f(\varphi(u))\,|J(u)|\,du. \tag{28}$$

Здесь

$$J(u) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} = \det \varphi'(u) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \tag{29}$$

— *якобиан отображения* $\varphi$, заданного непрерывно дифференцируемыми функциями

$$x_i = \varphi_i(u) \equiv \varphi_i(u_1; \ \ldots; \ u_n), \quad i = 1, \ \ldots, \ n. \tag{30}$$

Замену переменных можно рассматривать и как переход на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ от декартовых координат $(x_1; \ldots; x_n)$ к криволинейным координатам $(u_1; \ldots; u_n)$ по формулам (30).

Если отображение задано обратной системой функций

$$u_i = \psi_i(x) = \psi_i(x_1; \ \ldots; \ x_n), \quad i = 1, \ \ldots, \ n,$$

то якобиан отображения в точке $u^0 = \psi(x^0)$ можно найти по формуле

$$J(u^0) = \left(\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x^0)\right)^{-1} \equiv (\det \psi'(x^0))^{-1}, \tag{31}$$

если $\psi'(x^0)$ существует.

Для полярных координат на плоскости

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad J = r.$$

В пространстве для цилиндрических координат

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad J = r;$$

для сферических координат

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$
$$J = r^2\cos\psi$$

(§ 3, пример 11).

Замену переменных используют как для упрощения подынтегральной функции, так и для упрощения вида области интегрирования.

---

*) Нижние символы $x$ и $u$ указывают на разные обозначения точек $x = (x_1; \ldots; x_n)$ и $u = (u_1; \ldots; u_n)$ из $\mathbb{R}^n$.

Пример 10. Вычислить интегралы

$$I_j = \int\limits_{X_j} f_j(x;\ y)\,dx\,dy,$$

где

1) $f_1(x;\ y) = x,\ X_1 = \{2x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 6x,\ y \leqslant x\}$;

2) $f_2(x;\ y) = 1/y$, множество $X_2$ ограничено прямыми

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = 1 - \frac{1}{2}x, \quad y = 4 - 2x.$$

△ 1) Множество $X_1$ (рис. 24) не является элементарным относительно осей $Ox$, $Oy$; переход к повторному интегралу в декартовых координатах требует разбиения $X_1$ на несколько

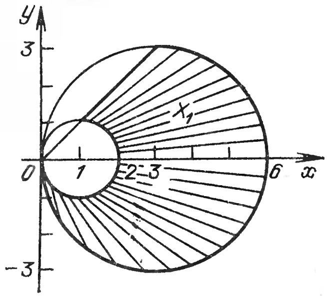


Рис. 24

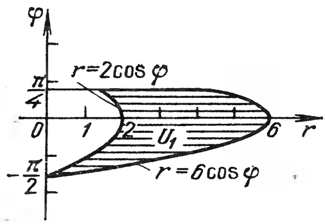


Рис. 25

элементарных множеств. Введение полярных координат упрощает вид области *), а именно (рис. 25)

$$U_1 = \{-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4,\ 2\cos\varphi \leqslant r \leqslant 6\cos\varphi\}.$$

Используя формулу (28), получаем

$$I_1 = \iint\limits_{U_1} r^2 \cos\varphi\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} r^2\,dr = \frac{208}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{13}{6}(9\pi + 8).$$

2) Уравнения линий, ограничивающих данный четырехугольник $X_2$ (рис. 26), запишем в виде $\frac{y}{x} = 1$, $\frac{y}{x} = 2$, $\frac{y}{2-x} = \frac{1}{2}$, $\frac{y}{2-x} = 2$. Заменим переменные по формулам $u = y/x$, $v =$

*) Рисунок области в старых или новых координатах вовсе не обязателен для решения задачи вычисления интеграла с помощью замены переменных.

$= y/(2-x)$, тогда образом $X_2$ будет прямоугольник $U_2$ (рис. 27). Находим

$$x = \frac{2v}{u+v}, \quad y = \frac{2uv}{u+v},$$

$$J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = -\frac{4uv}{(u+v)^3}, \quad |J| = \frac{4uv}{(u+v)^3}.$$

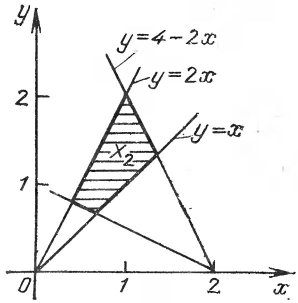


Рис. 26

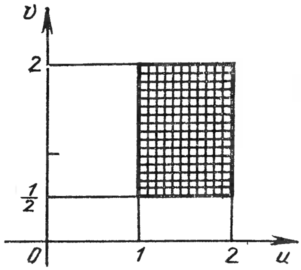


Рис. 27

Вычисляем $I_2$ по формуле (28):

$$I_2 = \iint\limits_{U_2} \frac{u+v}{2uv} \frac{4uv}{(u+v)^3} \, du \, dv = 2 \int\limits_{1/2}^{2} dv \int\limits_{1}^{2} \frac{du}{(u+v)^2} =$$

$$= 2 \int\limits_{1/2}^{2} \left( \frac{1}{1+v} - \frac{1}{2+v} \right) dv = 2 \ln (5/4). \quad \blacktriangle$$

Пример 11. Вычислить интегралы

$$I_j = \iiint\limits_{X_j} f_j (x; \; y; \; z) \, dx \, dy \, dz,$$

где

1) $f_1 (x; \; y; \; z) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \; X_1 = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant a\}.$

2) $f_2 (x; \; y; \; z) = 1, \; X_2 = \{(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leqslant 4xyz, \; x \geqslant 0, \; y \geqslant 0\}.$

3) $f_3 (x; \; y; \; z) = |z|,$
$X_3 = \{(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 \leqslant 4b^2 (x^2 + y^2)\}$ — тор.

4) $f_4 (x; \; y; \; z) = z,$
$X_4 = \{(x-y)^2 + (y-z)^2 \leqslant R^2, \; 0 \leqslant x + y + z \leqslant h\}.$

$\triangle$ 1) Перейдем к цилиндрическим координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Множество интегрирования (конус $X_1$ в декартовых координатах, рис. 28) в этих координатах задается неравенствами $U = \{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant r \leqslant z \leqslant a\}$, т. е. является призмой (рис. 29). Вычисляем интеграл

$$I_1=\iiint\limits_U \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\,r\,dr\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a dz\int\limits_0^z \frac{r^3\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}=$$

$$=2\pi\int\limits_0^a \frac{2-\sqrt{2}}{3}z^3\,dz=\frac{\pi}{6}(2-\sqrt{2})\,a^4.$$

2) Перейдем к сферическим координатам $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$, где $r\geqslant 0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $-\pi/2\leqslant$

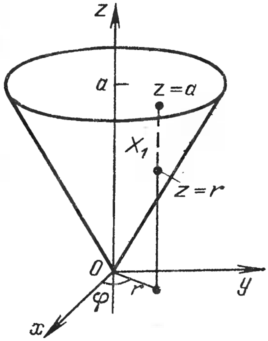


Рис. 28

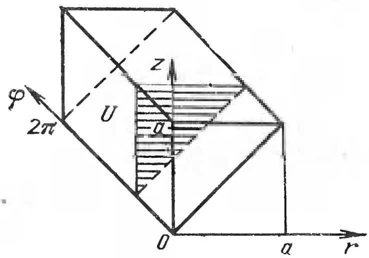


Рис. 29

$\leqslant\psi\leqslant\pi/2$. Подстановка в заданные неравенства дает

$$\begin{cases} r^4\leqslant 4r^3\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi, \\ r\cos\varphi\cos\psi\geqslant 0, \quad r\sin\varphi\cos\psi\geqslant 0. \end{cases}$$

Поскольку $r\geqslant 0$, $\cos\psi\geqslant 0$, эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} r\leqslant 2\sin 2\varphi\cos^2\psi\sin\psi, \\ \cos\varphi\geqslant 0,\ \sin\varphi\geqslant 0. \end{cases}$$

Из второго и третьего неравенств находим $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$. Первое неравенство имеет решения тогда и только тогда, когда $\sin\psi\geqslant 0$, т. е. $0\leqslant\psi\leqslant\pi/2$. Следовательно,

$$U_2=\{0\leqslant r\leqslant 2\sin 2\varphi\cos^2\psi\sin\psi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant\psi\leqslant\pi/2\}.$$

Совершаем замену в интеграле $I_2$ и вычисляем его:

$$I_2=\iiint\limits_{U_2} r^2\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi\int\limits_0^{2\sin 2\varphi\cos^2\psi\sin\psi} r^2\,dr=$$

$$=\frac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos^7\psi\sin^3\psi\,d\psi.$$

Далее, первый интеграл можно вычислить с помощью замены $\cos 2\varphi = t$, а второй — замены $\cos\psi = s$. В результате получим $I_2 = 2/45$.

3) Зададим параметрически плоскость, проходящую через ось $Oz$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \geqslant 0$, $\varphi$ фиксировано. Сечение тора $X_3$ этой плоскостью определяется неравенством

$$(r^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 \leqslant 4b^2r^2.$$

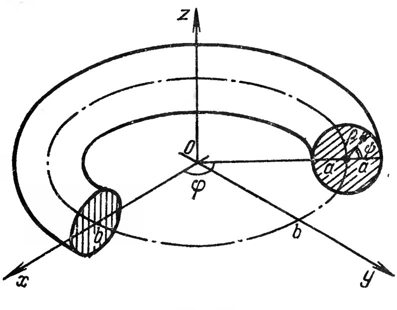


Рис. 30

Оно равносильно следующим:

$$r^2 + z^2 + b^2 - a^2 \leqslant 2br,$$

$$(r - b)^2 + z^2 \leqslant a^2.$$

Значит, сечение — круг радиуса $a$ с центром в точке, где $r = b$, $z = 0$. В этом круге введем полярные координаты

$$r - b = \rho\cos\psi, \quad z = \rho\sin\psi,$$

$$0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

Окончательно совершим замену по формулам

$$x = (b + \rho\cos\psi)\cos\varphi, \quad y = (b + \rho\cos\psi)\sin\varphi, \quad z = \rho\sin\psi,$$

где $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$ (рис. 30).

Прообразом тора является параллелепипед

$$U_3 = \{0 \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \psi < 2\pi\}.$$

Находим якобиан

$$J = \frac{\partial(x;\ y;\ z)}{\partial(\rho;\ \varphi;\ \psi)} = \rho(b + \rho\cos\psi).$$

Вычисляем интеграл

$$I_3 = \iiint\limits_{U_3} |\rho\sin\psi|\,\rho(b + \rho\cos\psi)\,d\rho\,d\varphi\,d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^2\,d\rho \int_0^{2\pi} (b + \rho\cos\psi)|\sin\psi|\,d\psi =$$

$$= 2\pi\int_0^a \rho^2\,d\rho \cdot 2\int_0^{\pi} (b + \rho\cos\psi)\sin\psi\,d\psi = 8\pi b\int_0^a \rho^2\,d\rho = \frac{8}{3}\pi b a^3.$$

4) Сначала введем координаты

$$\xi = x - y, \quad \eta = y - z, \quad \zeta = x + y + z, \tag{32}$$

в которых множество интегрирования является цилиндром

$$\{\xi^2 + \eta^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant \zeta \leqslant h\}.$$

Якобиан этой замены найдем по формуле (31):

$$J_1=\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}=\left(\frac{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial(x,\ y,\ z)}\right)^{-1}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}.$$

Теперь введем цилиндрические координаты

$$\xi=r\cos\varphi,\quad \eta=r\sin\varphi,\quad \zeta=\zeta \tag{33}$$

с якобианом $J_0=r$. Множеством интегрирования в этих координатах будет параллелепипед

$$U_4=\{0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\zeta\leqslant h\}.$$

Якобиан замены $x$, $y$, $z$ на $r$, $\varphi$, $\zeta$ равен произведению $J_1\cdot J_2=\frac{1}{3}r$.

Из (32) и (33) находим

$$f_4(x;\ y;\ z)=z=\frac{1}{3}(\zeta-\xi-2\eta)=\frac{1}{3}(\zeta-r(\cos\varphi+2\sin\varphi)).$$

Теперь вычисляем интеграл

$$I_4=\iiint\limits_{U_4}\frac{1}{3}(\zeta-r(\cos\varphi+2\sin\varphi))\cdot\frac{1}{3}r\,dr\,d\varphi\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^h d\zeta\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}(\zeta-r(\cos\varphi+2\sin\varphi))\,d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{9}\int_0^h\zeta\,d\zeta\int_0^R r\,dr=\frac{\pi}{18}R^2h^2.\ \blacktriangle$$

---

**8.75.** Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^{\pi/2}dx\int\limits_0^x\cos(x+y)\,dy.$ 2) $\int\limits_{-1}^1 dy\int\limits_{2y}^y(x-y)e^y\,dx.$

3) $\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_1^{\cos\varphi}r\sin\varphi\cdot\ln r\,dr.$ 4) $\int\limits_0^{\sin x}du\int\limits_0^u\frac{uv}{\sqrt{u^2-v^2}}\,dv.$

5) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx\int\limits_{\sin x}^{\cos x}dy\int\limits_{y+x}^{y-x}(x+y+z)\,dz.$

**8.76.** Пусть функция $f(y)$ непрерывна на отрезке $[0;\ a]$. Доказать, что:

1) $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x f(y)\,dy=\int\limits_0^a(a-x)f(x)\,dx.$

2) $\int\limits_0^a dx\int\limits_x^a f(y)\,dy=\int\limits_0^a yf(y)\,dy.$

8.77. Пусть функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;\ a]$ и $m \leqslant \psi(x) \leqslant M$ на $[a;\ b]$, пусть функция $f(y)$ непрерывна на отрезке $[c;\ d]$, где $0 \in [c;\ d]$, $[m;\ M] \subset [c;\ d]$. Доказать, что

$$\int_0^a dx \int_0^{\psi(x)} f(y)\,dy = a \int_0^{\psi(0)} f(x)\,dx + \int_0^a (a-x) f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx.$$

В задачах 8.78—8.81 для заданного множества $G$ записать интеграл $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования.

8.78. $G$ — треугольник, ограниченный прямыми:

1) $x=0,\quad y=0,\quad ax+by=c.$
2) $x=0,\quad y=a,\quad mx-ny=b.$
3) $y=0,\quad y=kx,\quad x=a.$
4) $x=2a,\quad y=2a,\quad x+y=a.$
5) $x=a,\ y-kx=0,\quad y+lx=0,\quad a>0,\quad k>0,\quad l>0.$
6) $x=a,\quad y-kx=0,\quad y-lx=0,\quad a>0,\quad l>k.$
7) $y=h,\quad ay=hx,\quad ay=4ah-hx,\quad a>0,\quad h>0.$
8) $y=2kx,\quad y=-kx,\quad 2kx+y=2a,\quad k>0.$
9) $y=lx,\quad y=kx,\quad x+y=(k+1)(l+1),\quad l>k.$

8.79. $G$ — четырехугольник, ограниченный прямыми $(a>0)$:

1) $x=0,\quad y=0,\quad y=a,\quad x+y=2a.$
2) $x=0,\quad x=a,\quad y=x,\quad x+y=3a.$
3) $y=0,\quad y=a,\quad x+y=0,\quad x+y=2a.$
4) $2y=x,\quad 2y=x+6,\quad y=2x,\quad y=2x-3.$
5) $x=0,\quad y=0,\quad x-y=a,\quad x+y=2a.$

8.80. $G$ ограничено линиями:

1) $y=x^2,\quad x+y=2.$
2) $x=0,\quad x=-\sqrt{y},\quad x=-\sqrt{2-y}.$
3) $y=0,\quad x=\sqrt{y},\quad x+y=6.$
4) $x=0,\quad x=\sin y,\quad x=\cos y\quad (0\leqslant y\leqslant \pi/2).$
5) $x=\sqrt{4-y^2},\quad x=\sqrt{4y-y^2},\quad y=2.$
6) $x=0,\quad x=1,\quad x=y^2,\quad y=e^x.$
7) $x=0,\quad x=\pi/2,\quad y=\sin x,\quad y=2+\cos x\quad (0\leqslant x\leqslant \pi/2).$

8.81. $G$ задано неравенствами:

1) $x^2+y^2\leqslant 2ax.$
2) $x^2+y^2\leqslant 2Ry,\quad x\geqslant 0.$
3) $x^2+y^2\leqslant 4x,\quad y\geqslant x.$

4) $x^2+y^2\leqslant R^2,\quad x+y\geqslant R.$

5) $y^2\leqslant 2px+p^2,\quad y\geqslant x.$

6) $x^2+y^2\leqslant R^2,\quad x+y\geqslant 0.$

7) $x^2+y^2\geqslant R^2,\quad x^2+y^2\leqslant 2Rx,\quad y\geqslant 0.$

8) $x^2-y^2\leqslant a^2,\quad x^2+y^2\leqslant 3a^2.$

**8.82.** Записать повторный интеграл или сумму повторных интегралов в виде двойного и нарисовать множество интегрирования:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arccos y} f(x;\ y)\,dx.$ 2) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{x-a}^{3a-x} f(x;\ y)\,dy.$

3) $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{e^x} f(x;\ y)\,dy.$ 4) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x;\ y)\,dx.$

5) $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{-2}^{x} f(x;\ y)\,dy+\int\limits_1^4 dx \int\limits_{2x-4}^{x} f(x;\ y)\,dy.$

6) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{y} f(x;\ y)\,dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x;\ y)\,dx.$

7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x;\ y)\,dx+\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x;\ y)\,dx.$

**8.83.** Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x;\ y)\,dy,\ a>0.$ 2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x;\ y)\,dx.$

3) $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{2x}^{(7x+10)/6} f(x;\ y)\,dy.$ 4) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x;\ y)\,dy.$

5) $\int\limits_{-6}^2 dx \int\limits_{x^2/4-1}^{2-x} f(x;\ y)\,dy.$ 6) $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{y+1}} f(x;\ y)\,dx.$

7) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{2}{3}(x-1)}^{\log_2 x} f(x;\ y)\,dy.$ 8) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x;\ y)\,dy.$

9) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\ln x}^{3x} f(x;\ y)\,dy.$ 10) $\int\limits_{-1}^2 dx \int\limits_{x^2-1}^{3+2x-x^2} f(x;\ y)\,dy.$

11) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{\sqrt{12-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x;\ y)\,dx.$ 12) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x;\ y)\,dy.$

**8.84.** Выразить сумму повторных интегралов через один повторный интеграл, переменив порядок интегрирования:

1) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x;\ y)\,dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x;\ y)\,dx.$

2) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{x/2} f(x;\ y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-3}}^{x/2} f(x;\ y)\,dy.$

3) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^{\log_3 y} f(x;\ y)\,dx + \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^{4-y} f(x;\ y)\,dx.$

4) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} dx \int\limits_{-1}^{\sin x} f(x;\ y)\,dy + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/2} dx \int\limits_{\sin x}^{1} f(x;\ y)\,dy.$

**8.85.** Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2}\,dy,$ 2) $\int\limits_0^{\pi} dy \int\limits_y^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$

3) $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^a (a^2-y^2)^{\alpha}\,dy, \quad a>0, \quad \alpha>0.$

4) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt[3]{|x|}}^{1} (1-y^2)^{\alpha}\,dy, \quad \alpha>0.$

5) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[5]{y}} \sqrt{1-x^3}\,dx.$ 6) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{1} y^2\sqrt{y^4-x^2}\,dy.$

**8.86.** Пусть функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;\ b]$. Доказать, что

$$\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

У к а з а н и е Можно, например, воспользоваться результатами задач 8,6, 8.7 а) и рассмотреть интеграл

$$\iint\limits_G (f(x)-f(y))^2\,dx\,dy,$$

где $G=[a;\ b]\times[a;\ b]$.

**8.87.** Пусть $f(x;\ y)=1/y^2$, если $0<x<y<1$; $f(x;\ y)=$ $=-1/x^2$, если $0<y<x<1$; $f(x;\ y)=0$ в остальных точках квадрата $X = [0;\ 1] \times [0;\ 1]$. Доказать, что существуют оба повторных интеграла

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x;\ y)\, dy \quad \text{и} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x;\ y)\, dx$$

и они не равны друг другу. Доказать, что $f$ не интегрируема на квадрате $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$.

**8.88.** Пусть $f(x;\ y) = y$, если $x$ — рациональное число; $f(x;\ y) = 0$, если $x$ — нерациональное число. Доказать, что $f$ не интегрируема на прямоугольнике $[0;\ 1] \times [-1;\ 1]$ и что существует один из повторных интегралов

$$\int_0^1 dx \int_{-1}^1 f(x;\ y)\, dy, \quad \int_{-1}^1 dy \int_0^1 f(x;\ y)\, dx,$$

а другой не существует.

**8.89.** Пусть $f(x_1;\ x_2) = 1$, если $x_i = p_i/q$, где $p_i < q$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \geqslant 0$, $q \in \mathbb{N}$, $p_i/q$ — несократимые дроби, $i = 1,\ 2$, и $f(x_1;\ x_2) = 0$ в остальных точках. Доказать, что, хотя $f$ не интегрируема на квадрате $[0;\ 1] \times [0;\ 1]$ (задача 8.22, 4) этого параграфа), существуют равные между собой повторные интегралы

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^1 f(x_1;\ x_2)\, dx_2 \quad \text{и} \quad \int_0^1 dx_2 \int_0^1 f(x_1;\ x_2)\, dx_1.$$

Вычислить двойные интегралы (8.90—8.94):

**8.90.** 1) $\iint\limits_G (x \sin y + y \cos x)\, dx\, dy$, $G = [0;\ \pi/2] \times [0;\ \pi/2]$.

2) $\iint\limits_G \frac{y}{x^2}\, dx\, dy$, $G = \{0 < x,\ x^3 \leqslant y \leqslant x^2\}$.

3) $\iint\limits_G x^2 y^2\, dx\, dy$, $G$ ограничено линиями $x = y^2$, $x = 1$.

4) $\iint\limits_G xy^2\, dx\, dy$, $G = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0\}$.

5) $\iint\limits_G (x^3 + y^3)\, dx\, dy$, $G = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ y \geqslant 0\}$.

6) $\iint\limits_G (x + 2y)\, dx\, dy$, $G$ ограничено прямыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

7) $\iint\limits_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, $G$ ограничено прямыми $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$.

8) $\iint\limits_G \sqrt{x-y}\,dx\,dy,\ G=\left\{\frac{4}{5}x\leqslant y\leqslant x,\ 1\leqslant y\leqslant 4\right\}.$

9) $\iint\limits_G \sin\pi(x-y)\,dx\,dy,$ $G$ — треугольник с вершинами $(-4;\ 1)$, $(-1;\ -1/2)$, $(7/2;\ 17/2)$.

**8.91.** 1) $\iint\limits_G e^{x-y}\,dx\,dy$, $G$ ограничено прямыми $x=-1$, $x=1$, $y=x$, $y=2x$.

2) $\iint\limits_G (x+y)\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant R^2,\ y\geqslant x\}.$

3) $\iint\limits_G xy\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant 25,\ 3x+y\geqslant 5\}.$

4) $\iint\limits_G x\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant 2,\ x^2-y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$

5) $\iint\limits_G y\,dx\,dy,\ G=\{0\leqslant y\leqslant 6,\ x<6,\ xy>3,\ y-x-2<0\}.$

6) $\iint\limits_G (2y-x)\,dx\,dy,\ G=\{y(y-x)\leqslant 2,\ x(x+y)\leqslant 3\}.$

7) $\iint\limits_G x^2y^2\,dx\,dy,\ G=\{y>0,\ xy<1,\ x^2-3xy+2y^2<0\}.$

**8.92.** 1) $\iint\limits_G \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, $G$ ограничено линиями $y=x\operatorname{tg}x$, $y=x$, $0\leqslant x<\pi/2$.

2) $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy.$ 3) $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3-1)\,dx\,dy.$

4) $\int\limits_0^1\int\limits_{(x-1)/2}^0 \operatorname{tg}(y^2+y)\,dy\,dx.$ 5) $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-y} e^{2x-x^2}\,dx\,dy.$

6) $\iint\limits_G \sqrt{y^2-x^2}\,dx\,dy$; $G$ ограничено прямыми $y=1$, $y=x$, $y=-x$.

**8.93.** 1) $\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy,\ G=\{a\leqslant|x|\leqslant b,\ a\leqslant|y|\leqslant b\},$

$0\leqslant a\leqslant b.$

2) $\iint\limits_G |y|\,dx\,dy,\ G=\left\{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1,\ x^2+y^2\geqslant 1\right\}.$

3) $\iint\limits_G (2-x-y)\,dx\,dy,\ G=\{2y\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}.$

4) $\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy,\ G=\{a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\},\ 0<a<b.$

5) $\iint\limits_G \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy,\ G=[-1;\ 1]\times[0;\ 2].$

**8.94.** 1) $\iint\limits_G \min\{x,\ y\}\,dx\,dy,\ G=[0;\ a]\times[0;\ a],\ a>0.$

2) $\iint\limits_G \max\{\sin x,\ \sin y\}\,dx\,dy,\ G=[0;\ \pi]\times[0;\ \pi].$

3) $\iint\limits_G \operatorname{sign}(2a-2x-y)\,dx\,dy,\ G=[0;\ a]\times[0;\ a],\ a>0.$

4) $\iint\limits_G \operatorname{sign}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant 4\}.$

**8.95.** 1) Пусть функция $y=\varphi(x)$, $x\in[a;\,b]$, задана параметрически:

$$x=\alpha(t),\quad y=\beta(t),\quad t\in[t_1;\ t_2],$$

где $\alpha(t)$ возрастает и непрерывно дифференцируема на $[t_1;\,t_2]$,

$$\alpha(t_1)=a,\ \alpha(t_2)=b,\quad \beta(t)\geqslant 0 \text{ на } [t_1;\ t_2].$$

Пусть

$$G=\{x\in[a;\ b],\ 0\leqslant y\leqslant\varphi(x)\},$$

а функция $f(x;\,y)$ непрерывна на $G$. Доказать, что

$$\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha'(t)\,dt\int\limits_0^{\beta(t)} f(\alpha(t);\ y)\,dy.$$

2) Доказать, что если в дополнение к условиям 1) функция $\beta(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_1;\,t_2]$ и $\beta(t_1)=0$, то

$$\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy=\int\limits_{t_1}^{t_2}\alpha'(t)\,dt\int\limits_{t_1}^{t} f(\alpha(t);\ \beta(s))\,\beta'(s)\,ds.$$

**8.96.** Вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dx\,dy$, $G$ ограничено линиями $x=0$, $y=0$ и $x=a\sin t$, $y=b\cos t$, $t\in[0;\ \pi/2]$.

2) $\iint\limits_G (x-y)\,dx\,dy$, $G$ ограничено осями координат и дугой астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

3) $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, $G$ ограничено аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;\ 2\pi]$ и осью $Ox$.

4) $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, $G$ ограничено кривой $x=a\sin t$, $y=b\sin 2t$, $t\in[0;\ \pi]$.

5) $\iint\limits_G xy\,dx\,dy$, $G$ ограничено осью $Oy$ и кривой $x=3t-\frac{1}{3}t^3$, $y=2t-t^2$, $t\in[0;3]$.

6) $\iint\limits_G (x+y)\,dx\,dy$, $G$ ограничено осью $Ox$ и кривой $x=2t(1-t)$, $y=4t-t^3$, $t\in[0;\ 2]$.

7) $\iint\limits_G y^2\,dx\,dy$, $G$ ограничено осью $Ox$ и кривой $x=\sin(3t/2)$, $y=\sin t$, $t\in[0;\ \pi]$.

**8.97.** Пусть множество $G$ ограничено осью $Ox$ и аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0;\ 2\pi]$. Доказать, что

$$\iint\limits_G xy^n\,dx\,dy=\pi a\iint\limits_G y^n\,dx\,dy,\quad n\geqslant 0.$$

**8.98.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна на квадрате $Q=[0;\ 1]\times[0;\ 1]$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{J_\alpha^2}\iint\limits_Q (xy(1-x)(1-y))^\alpha f(x;\ y)\,dx\,dy=f(1/2;\ 1/2).$$

где $J_\alpha=\int\limits_0^1 (x(1-x))^\alpha\,dx$.

**8.99.** Доказать, что формула замены переменного в интеграле по отрезку (см. [2], § 6) является частным случаем формулы замены переменных в кратном интеграле.

В интеграле $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторных интегралов, расставив пределы интегрирования в разных порядках, если (**8.100—8.102**; все параметры положительны):

**8.100.** 1) $G=\{a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$, $0<a<b$.

2) $G=\{x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant x\}$.

3) $G=\{a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4a^2,\ |x|-y\geqslant 0\}$.

4) $G=\{x^2+y^2\leqslant 2ay\}$.

5) $G=\{(x^2+y^2)^2\leqslant a^2(x^2-y^2),\ x\geqslant 0\}$.

6) $G=\{x^2+y^2\leqslant 2ax,\ y\geqslant x\}$.

7) $G=\{a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 2ay\}$.

8) $G=\{(x^2+y^2)^2\leqslant ay(3x^2-y^2),\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

9) $G=\{x^2+y^2\leqslant a^2,\ x+y+a\leqslant 0\}$.

10) $G=\{x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant\sqrt{|x|}\}$.

**8.101.** 1) $G=\{x^2+y^2\leqslant 2ax,\ x^2+y^2\leqslant 2by\}$.

2) $G=\{(x-a)^2+y^2\leqslant 4a^2\}$.

3) $G=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$.

4) $G=\{-2\leqslant x\leqslant 0,\ x^2\leqslant y\leqslant 2-x\}$.

5) $G=\{x\geqslant y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 2a\}$.

6) $G=\{0\leqslant y\leqslant 1,\ y-2\leqslant x\leqslant -\sqrt{y}\}$.

7) $G=\{x^2+y^2\leqslant 2;\ y\leqslant x^2,\ x\geqslant 0\}$.

**8.102.** 1) $G=[0;\ a]\times[0;\ a]$.

2) $G=\{x^2+y^2\leqslant 2ay\leqslant 2a^2,\ x\geqslant 0\}$.

3) $G=\{0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant a-x\}$.

4) $G=\{x^2+y^2\leqslant a^2,\ x^2+y^2\leqslant 2ax\}$.

5) $G=\{2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$.

6) $G=\{2ay\leqslant x^2+y^2\leqslant 4ay,\ y\geqslant|x|\}$.

7) $G=\left\{\frac{1}{4}x^2-1\leqslant y\leqslant x\right\}$.

Перейдя к полярным координатам, свести интегралы к однократным (**8.103—8.104**):

**8.103.** 1) $\iint\limits_G f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant x,\ x^2+y^2\leqslant y\}$.

2) $\iint\limits_G f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)dx\,dy,\ G=\{\sqrt{|x|}\leqslant y\leqslant 1\}$.

3) $\iint\limits_G f(x^2+y^2)\,dx\,dy,\ G=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ x/\sqrt{3}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}\,x\}$.

4) $\iint\limits_G f(y/x)\,dx\,dy$, $G$ — множество, ограниченное петлей декартова листа $x^3+y^3=3xy$.

5) $\iint\limits_G f(y/x)\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant\sqrt{6}\,x,\ (x^2+y^2)^2\leqslant 9(x^2-y^2)\}$.

**8.104.** 1) $\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$.

2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^1 f(x/y)\,dy$. 3) $\int\limits_{-1}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{3}|y|}^{\sqrt{4-y^2}}f(y/x)\,dx$.

4) $\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy$. 5) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dy$.

6) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f\left(x/\sqrt{x^2+y^2}\right) dy$.

**8.105.** Доказать, что

$$\iint\limits_D f(y/x)\,dx\,dy = \int\limits_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1-3t^2}{(1+t^2)^2} f(t)\,dt,$$

где $D = \{4 \leqslant (x^2+y^2)^2 \leqslant 4(x^2-y^2),\ \ x \geqslant 0\}$.

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам (**8.106—8.109**):

**8.106.** 1) $\iint\limits_G \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 < 1\}$.

2) $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{x^2+y^2-1},\ \ G = \{9 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 25\}$.

3) $\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy,\ \ G = \{a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4a^2\}$.

4) $\iint\limits_G xy^2\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0\}$.

5) $\iint\limits_G y^2 e^{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

6) $\iint\limits_G \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ \ G = \{1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant a^2,\ y \geqslant 0\}$.

7) $\iint\limits_G (ax+by)\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant R^2,\ x-y \leqslant 0\}$.

8) $\iint\limits_G (x+y)\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant R^2,\ y-kx > 0\}$.

9) $\iint\limits_G \operatorname{sign} y\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant 1,\ y-kx > 0\}$.

**8.107.** 1) $\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant ax\},\ a > 0$,

2) $\iint\limits_G y\,dx\,dy,\ \ G = \{x^2+y^2 \leqslant 2x,\ x > y\}$.

3) $\iint\limits_G \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $G=\{x^2+y^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 2y\}$.

4) $\iint\limits_G \left(\frac{y}{x}\right)^2 dx\,dy$, $G=\{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

5) $\iint\limits_G x\,dx\,dy$, $G=\{ax\leqslant x^2+y^2\leqslant 2ax,\ y\geqslant 0\}$, $a>0$.

6) $\iint\limits_G \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$,

$$G=\{ay\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 0\},\ a>0.$$

7) $\iint\limits_G y^2\,dx\,dy$, $G=\{2x\leqslant x^2+y^2\leqslant 6x,\ y\leqslant x\}$.

**8.108.** 1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy$.

2) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy$.

3) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dy$. 4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \sqrt{y}\,dy$.

**8.109.** 1) $\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, $G$ ограничено линиями $x^2-y^2=6$, $x=3$.

2) $\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$, $G=\{(x^2+y^2)^2\leqslant x^2-y^2,\ x\geqslant 0\}$.

3) $\iint\limits_G x^2\,dx\,dy$, $G=\{(x^2+y^2)^2\leqslant 2xy,\ x\geqslant 0\}$.

4) $\iint\limits_G y\,dx\,dy$, $G=\{0\leqslant x\leqslant (x^2+y^2)^{3/2}\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$.

5) $\iint\limits_G \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $G=\left\{\frac{3}{2}ay\leqslant x^2\leqslant a^2-y^2\right\}$, $a>0$.

6) $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $G=\left\{ax\leqslant x^2+y^2\leqslant a\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right\}$, $a>0$.

**8.110.** 1) Вычислить интеграл

$$\iint\limits_G e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,\quad G=\{x^2+y^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

2) Доказать неравенства

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-a^2}} < \int_0^a e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2a^2}}.$$

3) Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

**8.111.** Найти

$$\lim_{n\to\infty}\sum\frac{1}{n^2+i^2+j^2},$$

где сумма составлена по всем целым значениям $i$ и $j$ таким, что $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $i^2+y^2 \leqslant n^2$.

**8.112.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ и

$$\Phi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)\,d\varphi, \quad 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Доказать, что функция $\Phi(r)$ непрерывна на $[0;\ R]$.

**8.113.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$ и

$$G(r) = \{x^2+y^2 \leqslant r^2\},$$

$$F(r) = \iint_{G(r)} f(x;\ y)\,dx\,dy, \quad r \geqslant 0.$$

Доказать, что:

1) $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{F(r)}{\pi r^2} = f(0;\ 0).$

2) $F(r)$ дифференцируема, и найти $F'(r)$.

3) Если $\lim\limits_{r\to+\infty} r^2 f(x;\ y) = a \neq 0$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, то

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{F(r)}{\ln r} = 2\pi a.$$

4) Если $\lim\limits_{r\to+\infty} r^\alpha f(x;\ y) = a \neq 0$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha < 2$, то

$$\lim_{r\to+\infty}\left(F(r)/r^{2-\alpha}\right) = 2\pi a/(2-\alpha).$$

5) Если $\lim\limits_{r\to+\infty} r^\alpha f(x;\ y) = a \neq 0$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\alpha > 2$, то существуют $\lim\limits_{r\to+\infty} F(r) = F(+\infty)$ и

$$\lim_{r\to+\infty} r^{\alpha-2}\left(F(r) - F(+\infty)\right) = 2\pi a/(2-\alpha).$$

**8.114.** Совершив заданную замену, записать данный интеграл в виде повторного:

1) $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha x}^{\beta x} f(x;\ y)\,dy$, где $0 < a < b$, $\alpha < \beta$; $u = x$, $v = y/x$.

2) $\int\limits_c^d dy \int\limits_{ky+a}^{ky+b} f(x;\ y)\,dx$, где $c < d$, $a < b$; $u = x - ky$, $v = y$.

3) $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$, где область $G$ ограничена прямыми $x = my$, $x = ny$, $y = a$, $0 < m < n$, $a > 0$; $u = x + y$, $y = uv$.

4) $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$, где область $G$ ограничена прямыми $x = 2y$, $y = 2x$, $x + 2y = 2$, $2x + y = 4$; $u = y/x$, $v = y/(2 - x)$.

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-2-x}^{2-x} f(x;\ y)\,dy$; $u = x + y$, $v = x - y$.

6) $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$, где область $G$ ограничена линиями $y = ax^2$; $y = bx^2$, $xy = p$, $xy = q$, $0 < a < b$, $0 < p < q$; $u = xy$, $v = y/x^2$.

7) $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$, где $G = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$; $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$.

8) $\iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy$, где область $G$ ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$; $x = r\cos^4\varphi$, $y = r\sin^4\varphi$.

**8.115.** Произведя соответствующую замену, свести данный интеграл к однократному:

1) $\iint\limits_G f(x - y)\,dx\,dy$, где $G = \{0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a - x\}$.

2) $\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} f(ax + by + c)\,dx\,dy$, $a^2 + b^2 \neq 0$.

3) $\iint\limits_G f(x/y)\,dx\,dy$, где область $G$, расположенная в I квадранте, ограничена линиями $xy = a$, $xy = b$, $ay = x$, $by = x$, $0 < a < b$.

4) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x-1} f(xy)\,dy$.

5) $\iint\limits_G (x - y)^2 f(x + y)\,dx\,dy$, $G = [0;\ 1] \times [0;\ 1]$.

**8.116.** Указать такие формулы перехода к новым координатам, чтобы область $G$ стала в новых переменных прямоугольником, если $G$ ограничена линиями:

1) $y = kx,\ y = kx - b,\ y = 0,\ y = a$, где $k > 0,\ b > 0,\ a > 0$.

2) $x - 2y = 0,\ 2x - y = 0,\ y = 1,\ y = 2$.

3) $kx - y = 0,\ y = 0,\ x = a$, где $k > 0,\ a > 0$.

4) $x = 0,\ y = 0,\ x + y = a$, где $a > 0$.

5) $xy = a,\quad xy = b,\quad x - y + c = 0,\quad x - y + d = 0,$ где $0 < a < b,\ c < d$,

6) $y = px^2,\ y = qx^2,\ y = ax,\ y = bx$, где $0 < p < q,\ 0 < a < b$.

**8.117.** Показать, что криволинейный четырехугольник, расположенный в первом квадранте и ограниченный софокусными эллипсами и перпендикулярными им гиперболами

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 a} = 1, \qquad \frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 b} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 b} = 1, \quad 0 < a < b,$$

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = 1, \quad \frac{x^2}{\cos^2 \beta} - \frac{y^2}{\sin^2 \beta} = 1, \quad 0 < \alpha < \beta < \pi/2,$$

в эллиптических координатах $u$ и $\varphi$:

$$x = \operatorname{ch} u \cos\varphi, \quad y = \operatorname{sh} u \sin\varphi, \quad u \in \mathbb{R}, \ \varphi \in [0;\ 2\pi),$$

является прямоугольником.

**8.118.** Пусть новые координаты $(u; v)$ заданы уравнениями

$$\varphi(x;\ y;\ u) = 0, \quad \psi(x;\ y;\ v) = 0.$$

Доказать, что

$$\frac{\partial(x;\ y)}{\partial(u;\ v)} = \frac{\varphi'_u \psi'_v}{\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x}.$$

**8.119.** Доказать, что при переходе к обобщенным полярным координатам $x = r\cos^\alpha\varphi$, $y = r\sin^\alpha\varphi$ якобиан отображения равен

$$J = \alpha r (\cos\varphi \sin\varphi)^{\alpha - 1}.$$

**8.120.** Пусть функция $f$ интегрируема по множеству $G$, симметричному относительно оси $Ox$, и пусть $f(x;\ -y) = -f(x;\ y)$ для любых $(x;\ y) \in G$. Доказать, что

$$\iint\limits_G f(x;\ y)\, dx\, dy = 0.$$

**8.121.** Пусть функция $f$ интегрируема по множеству $G$, симметричному относительно начала координат, и пусть $f(-x;\ -y) = -f(x;\ y)$. Доказать, что

$$\iint\limits_G f(x;\ y)\, dx\, dy = 0.$$

**8.122.** Доказать, что

$$\iint_G |\cos(x+y)|\,dx\,dy = \iint_G |\cos(x-y)|\,dx\,dy,$$

где $G = [0;\ \pi] \times [0;\ \pi]$.

Для заданных функции $f$ и множества $G$ с помощью подходящей замены вычислить интеграл

$$\iint_G f(x;\ y)\,dx\,dy$$

**(8.123—8.125)**:

**8.123.** 1) $f(x;\ y) = xy,\ \ G = \{|x+2y| \leqslant 3,\ |x-y| \leqslant 3\}$.

2) $f(x;\ y) = (x^2-y^2)^2,\ \ G = \{|x| \leqslant y \leqslant 1\}$.

3) $f(x;\ y) = 1/(x^2y^2)$, $G$ ограничено прямыми $3y = x,\ y = 3x,\ y = 4-5x,\ y = 4-x$.

4) $f(x;\ y) = e^{a(x+y)^2},\ \ G = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$.

5) $f(x;\ y) = (x^2-y^2)\sin\pi(x-y)^2,\ \ G = \{|y| \leqslant x \leqslant 1-|y|\}$.

**8.124.** 1) $f(x;\ y) = x+y$, $G$ ограничено линиями $xy = a,\ xy = b,\ y = x,\ y = x-c$, где $0 < a < b,\ 0 < c$.

2) $f(x;\ y) = y^2,\ \ G = \{1 \leqslant xy \leqslant 3,\ 0 < x \leqslant y \leqslant 2x\}$.

3) $f(x;\ y) = e^{x^4/y^2}$, $G$ ограничено линиями $y = x,\ y = 2x,\ y = x^2$.

4) $f(x;\ y) = x/y$, $G$ ограничено параболами $y = x^2,\ 8y = x^2,\ x = y^2,\ 8x = y^2$.

5) $f(x;\ y) = x^4 - y^4,\ \ G = \{x > 0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 2,\ 1 \leqslant x^2-y^2 \leqslant 2\}$.

**8.125.** 1) $f(x;\ y) = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\ \ G = \left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$.

2) $f(x;\ y) = \sqrt{x}+\sqrt{y},\ \ G = \{\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqslant \sqrt{a}\}$.

3) $f(x;\ y) = (x+y)^2,\ \ G = \{x > 0,\ y > 0,\ (x+y)^4 < x^2+y^2\}$.

4) $f(x;\ y) = x,\ \ G = \left\{x > 0,\ y > 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} < 1\right\}$.

**8.126.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна на прямоугольнике $Q = [a;\ b] \times [c;\ d]$,

$$F(x;\ y) = \int_c^y f(x;\ \eta)\,d\eta, \quad (x;\ y) \in Q.$$

Доказать, что:

1) $F(x;\ y)$ непрерывна на $Q$.

2) $F(x;\ y)$ дифференцируема по $y$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x;\ y) = f(x;\ y)$, $(x;\ y) \in Q$.

3) Если дополнительно $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывна на $Q$, то $F$ дифференцируема по $x$ и

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x;\ y) = \int\limits_c^y \frac{\partial f}{\partial x}(x;\ \eta)\, d\eta.$$

**8.127.** Пусть функции $\varphi$ и $\psi$ непрерывны и удовлетворяют неравенству $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ на отрезке $[a;\ b]$,

$$G = \{(x;\ y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

пусть функция $f$ непрерывна на $G$,

$$F(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x;\ y)\, dy.$$

Доказать, что:

1) Функция $F(x)$ непрерывна на $[a;\ b]$.

2) Если существуют непрерывные производные $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ на $[a;\ b]$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(x;\ y)$ на $G$, то и $F(x)$ имеет непрерывную производную на $[a;\ b]$ и

$$F'(x) = f(x;\ \psi(x))\,\psi'(x) - f(x;\ \varphi(x))\,\varphi'(x) + \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x;\ y)\, dy.$$

**8.128.** Найти $F'(t)$, если:

1) $F(t) = \iint\limits_{Q(t)} e^{-tx/y^2}\, dx\, dy, \quad Q(t) = [0;\ t] \times [0;\ t].$

2) $F(t) = \iint\limits_{Q(t)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy, \quad Q(t) = \{(x - t)^2 + (y - t)^2 \leqslant 1\}.$

**8.129.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна на плоскости $\mathbb{R}^2$,

$$F(t) = \iint\limits_{G(t)} f(x;\ y)\, dx\, dy.$$

Найти $F'(t)$, если:

1) $G(t) = [0;\ t] \times [0;\ t], \quad t > 0.$

2) $G(t) = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant t\}, \quad t > 0.$

**8.130.** Найти

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \iint\limits_{Q(t)} \frac{dx\, dy}{1 + \sqrt{x + y}},$$

где $Q(t) = [0;\ t] \times [0;\ t]$.

**8.131.** Пусть функция $f(t;\ x)$ непрерывна на плоскости. Доказать, что функция

$$u(t;\ x)=\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau;\ \xi)\,d\xi$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t;\ x).$$

---

**8.132.** Вычислить повторный интеграл:

1) $\int_{-1}^{3} dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2-y^2}} (\sqrt{x^2-y^2}+z)\,dz.$

2) $\int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} x^3y^2z\,dz.$

3) $\int_{-1}^{1} dx \int_{x/2}^{2x} dy \int_{x-y}^{x+y} (x+y+z)\,dz.$

**8.133.** В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

1) $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^h f(x;\ y;\ z)\,dz \quad (z;\ y;\ x).$

2) $\int_0^4 dz \int_0^{3-\frac{3}{4}z} dy \int_0^{2-\frac{2}{3}y-\frac{z}{2}} f(x;\ y;\ z)\,dx \quad (x;\ y;\ z).$

3) $\int_0^2 dx \int_0^{2-\frac{x}{2}} dy \int_0^{2-y-\frac{x}{2}} f(x;\ y;\ z)\,dz \quad (z;\ x;\ y).$

4) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x;\ y;\ z)\,dz \quad (z;\ x;\ y).$

5) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x;\ y;\ z)\,dz,$

а) $(x;\ z;\ y)$, б) $(z;\ y;\ x)$.

**8.134.** Интеграл $\iiint\limits_G f(x;\, y;\, z)\, dx\, dy\, dz$ записать в виде повторного или суммы повторных с указанным порядком (слева направо) и указать пределы интегрирования, если:

1) $G=\{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ 4\geqslant z\geqslant 0,\ 2x+y\leqslant 2\}$.

а) $(y;\, z;\, x)$. б) $(x;\, y;\, z)$.

2) Область $G$ ограничена плоскостями

$$x=0,\quad y=0,\quad z=0,\quad x+2y+3z=3.$$

а) $(x;\, y;\, z)$. б) $(z;\, x;\, y)$.

3) $G=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$ $(x;\, y;\, z)$.

4) Область $G$ ограничена поверхностями $y^2+2z^2=4x$, $x=2$.

а) $(y;\, z;\, x)$. б) $(x;\, y;\, z)$.

5) Область $G$ ограничена поверхностями

$$z=2(x^2+y^2),\quad z=1+x^2+y^2.$$

а) $(x;\, y;\, z)$. б) $(y;\, z;\, x)$.

6) $G=\{x\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ y^2+z^2\leqslant a^2\}$.

а) $(y;\, z;\, x)$. б $(x;\, z;\, y)$.

7) $G=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 2z,\ x^2+y^2\geqslant z^2\}$.

а) $(x;\, y;\, z)$. б) $(x;\, z;\, y)$.

8) $G=\{y^2+z^2\leqslant x^2,\ y^2+x^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\}$.

а) $(x;\, y;\, z)$. б) $(y;\, z;\, x)$.

9) $G=\{(y-1)(x-2)\leqslant z\leqslant 2,\ -x\leqslant y\leqslant x,\ x\leqslant 1\}$.

а) $(x;\, y;\, z)$. б) $(z;\, y;\, x)$.

**8.135.** Свести интеграл к однократному или сумме однократных:

1) $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int\limits_0^\eta f(\zeta)\, d\zeta$.

2) $\int\limits_0^1 du \int\limits_0^{1-u} dv \int\limits_0^{u+v} f(w)\, dw$.

3) $\iiint\limits_G f(z)\, dx\, dy\, dz$, область $G$ ограничена плоскостями $x=1$, $y=0$, $z=0$, $y=x$, $z=x+y$.

4) $\iiint\limits_G yf(z)\, dx\, dy\, dz$, область $G$ ограничена поверхностями $z=0$, $z=y$, $x^2+y^2=2x$.

**8.136.** Пусть $\Pi = [0;\ a] \times [0;\ b] \times [0;\ c]$. Вычислить интегралы:

1) $\iiint\limits_{\Pi} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$.

2) $\iiint\limits_{\Pi} z e^x \sin y\, dx\, dy\, dz$. 3) $\iiint\limits_{\Pi} (x + y)\, e^{x-y}\, dx\, dy\, dz$.

**8.137.** Вычислить интегралы:

1) $\iiint\limits_{\Pi} xyz\, dx\, dy\, dz$, $\Pi = [0;\ 1] \times [-1;\ 1] \times [0;\ 1]$.

2) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (xy + yz + zx)\, dx\, dy\, dz$.

3) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin(x + y + z)\, dx\, dy\, dz$.

**8.138.** Вычислить интегралы:

1) $\iiint\limits_{\Pi} \sin(x + y) \sin z\, dx\, dy\, dz$, $\Pi$ — призма

$\{0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2,\ x - y \leqslant z \leqslant x + y\}$.

2) $\iiint\limits_{\Pi} (x + 2y + 3z)\, dx\, dy\, dz$, $\Pi$ — призма, ограниченная плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$, $x + y = 2$, $2x - y + 2 = 0$.

3) $\iiint\limits_{\Pi} (xy)^2\, dx\, dy\, dz$, $\Pi = \{0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1)$.

**8.139.** Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_{G} f(x;\ y;\ z)\, dx\, dy\, dz,$$

если:

1) $f(x;\ y;\ z) = y$, $G$ — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 4$.

2) $f(x;\ y;\ z) = (1 + x + y + z)^{-3}$; область $G$ ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3) $f(x;\ y;\ z) = x + z$, область $G$ ограничена плоскостями $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + z = 1$, $z = 0$, $x = 0$.

4) $f(x;\ y;\ z) = x^2 - z^2$, область $G$ ограничена плоскостями $y = -x$, $z = x$, $z = y$, $z = 1$.

5) $f(x;\ y;\ z) = xy$, область $G$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

6) $f(x;\ y;\ z) = xyz$, $G$ — часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, лежащая в I октанте.

7) $f(x;\ y;\ z)=\sqrt{x^2+y^2}$, область $G$ ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

8) $f(x;\ y;\ z)=xy^2z^3$, область $G$ ограничена поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

9) $f(x;\ y;\ z)=xyz$, область $G$ ограничена поверхностями $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$.

**8.140.** Пусть измеримая область $G$ симметрична относительно координатной плоскости $Oxy$, а функция $f$ нечетна по $z$. Доказать, что

$$\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)=0.$$

**8.141.** Пусть измеримая область $G$ симметрична относительно координатной оси $Ox$, а интегрируемая на $G$ функция $f$ нечетна по паре переменных $(y;\ z)$, т. е. $f(x;\ -y;\ -z)=-f(x;\ y;\ z)$. Доказать, что

$$\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=0.$$

**8.142.** Пусть измеримая область $G$ симметрична относительно начала координат, а интегрируемая на $G$ функция $f$ нечетна по тройке переменных, т. е. $f(-x;\ -y;\ -z)=-f(x;\ y;\ z)$. Доказать, что

$$\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz=0.$$

**8.143.** В интеграле $\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz$ перейти к сферическим координатам и записать его в виде повторного, если:

1) $G=\{a^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4a^2,\ y\geqslant 0\}$.

2) $G=\{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y\geqslant 0\}$.

3) $G=\{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ x^2+y^2\geqslant 3z^2\}$.

4) $G=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 2az,\ x^2+y^2\geqslant z^2\}$.

5) Область $G$ ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

**8.144.** Вычислить интеграл $\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz$, перейдя к сферическим координатам, если:

1) $f(x;\ y;\ z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $G=\{1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 8\}$.

2) $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{x}{R^4+(x^2+y^2+z^2)^2}$,

$$G=\{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0\}.$$

3) $f(x;\ y;\ z)=x^2+y^2-z^2$,

$$G=\{1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

4) $f(x;\ y;\ z) = yz + zx$, область $G$ расположена в I октанте и ограничена поверхностями $y = x$, $x = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

5) $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,

$$G = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ z \geqslant \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$

6) $f(x;\ y;\ z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z\}$.

**8.145.** Свести интеграл к однократному:

1) $\displaystyle\iiint\limits_G f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) dx\,dy\,dz;$

$$G = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$$

2) $\displaystyle\iiint\limits_G f\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx\,dy\,dz,$

$$G = \{z^2 \leqslant x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}.$$

**8.146.** Вычислить интеграл $\displaystyle\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz$, перейдя к цилиндрическим координатам, если:

1) $f(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2 + z^2$, $G = \{x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$.

2) $f(x;\ y;\ z) = x + y + z$, область $G$ ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $x + y + z = 2$.

3) $f(x;\ y;\ z) = x^2 + y^2$, $\quad G = \left\{\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant 2\right\}$.

4) $f(x;\ y;\ z) = z - x + y$, область $G$ ограничена поверхностями $ay = z^2 + x^2$, $y^2 = z^2 + x^2$, $a > 0$.

**8.147.** Показать, что при переходе к обобщенным сферическим координатам

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, \quad y = br\sin\varphi\cos\psi, \quad z = cr\sin\psi$$

якобиан отображения равен $J = abcr^2\cos\psi$.

**8.148.** Пусть $G = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\right\}$. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz.$

2) $\displaystyle\iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz.$

**8.149.** Пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0) \in \mathbb{R}^3$,

$$0 < R < R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}.$$

Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\alpha/2}},$$

если:

1) $\alpha = 2$; 2) $\alpha = 3$; 3) $\alpha = 4$; 4) $\alpha \neq 2, 3, 4$.

(Указание. Можно воспользоваться поворотом системы координат и переходом к цилиндрическим координатам.)

Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz,$$

используя подходящую замену, если (8.150—8.152):

**8.150.** 1) $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{1}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$,

$$G = \{(x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}.$$

2) $f(x;\ y;\ z) = z$, область $G$ ограничена поверхностями $R^2z^2 = h^2(x^2 + y^2)$, $z = h$, $h > 0$.

3) $f(x;\ y) = x^2 - y^2$, $\quad G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

4) $f(x;\ y;\ z) = \sqrt{y^2 + z^2}$, область $G$ ограничена поверхностями $y^2 + z^2 = R^2$, $y + x = R$, $y - x = R$, $R > 0$.

5) $f(x;\ y;\ z) = x + z$, $\quad G = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

6) $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{xyz}{(a^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3}$,

$$G = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ y^2 + z^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}.$$

7) $f(x;\ y;\ z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, область $G$ расположена в I октанте и ограничена поверхностями $z = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, $az = x^2 - y^2$, $a > 0$.

8) $f(x;\ y;\ z) = z^2$,

$$G = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz\}.$$

9) $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{|xy|}{z^2}$, $\quad G = \left\{\sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$.

**8.151.** 1) $f(x;\ y;\ z) = \dfrac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$,

$$G = \left\{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \leqslant 4xy,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\right\}.$$

2) $f(x;\ y;\ z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad G = \{x^2 + y^2 \leqslant 2x,\ 0 \leqslant z \leqslant y\}$.

3) $f(x;\ y;\ z) = xz^2$, $\quad G = \{(3x - 4)^2 \leqslant y^2 + z^2 \leqslant x^2\}$.

4) $f(x;\ y;\ z) = z$, $\quad G = \{3(x^2 + y^2) \leqslant z,\ 1 - x^2 - y^2 \geqslant z\}$.

**8.152.** 1) $f(x;\ y;\ z)=\frac{1}{(x+y)(x+y+z)}$,

$$G=\{1<x<2,\ 1<x+y<3,\ 1<x+y+z<5\}.$$

2) $f(x;\ y;\ z)=(x^2-y^2)(z+x^2-y^2)$,

$$G=\{x-1<y<x,\ 1-x<y<2-x,\ 1-x^2+y^2<z<y^2-x^2+2x\}.$$

3) $f(x;\ y;\ z)=xyz$,

$$G=\{x<yz<2x,\ y<zx<2y,\ z<xy<2z\}.$$

4) $f(x;\ y;\ z)=x^2$, область $G$ ограничена поверхностями $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$, $z=h$, где $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$, $0<h$.

5) $f(x;\ y;\ z)=xyz$, область $G$ расположена в I октанте и ограничена поверхностями $mz=x^2+y^2$, $nz=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, где $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$, $0<m<n$.

**8.153.** Найти среднее значение функции $f$ на области $G$, если:

1) $f(x;\ y;\ z)=x^2+y^2+z^2$, $\quad G=\{x^2+y^2+z^2<x+y+z\}$.

2) $f(x;\ y;\ z)=\exp\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}$,

$$G=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}.$$

**8.154.** Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz,$$

где $G=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, $m$, $n$, $p$ — целые неотрицательные числа.

**8.155.** Выразить через значения Г-функции интеграл Дирихле

$$\iiint\limits_G x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz,$$

где $G=\{x>0,\ y>0,\ z>0,\ x+y+z<1\}$, $p>0$, $q>0$, $r>0$, $s>0$. (Указание. Можно воспользоваться заменой $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$, $z=\xi\eta\zeta$.)

**8.156.** Пусть $X$ и $U$ — измеримые множества, $\varphi$ — отображение $\bar{X}$ на $\bar{U}$ с такими же свойствами, как и в теореме 7 п. 3 этого параграфа. Доказать, что:

1) Существует такое $\theta$, что

$$\inf_{x\in X}|\det\varphi'(x)|\leqslant\theta\leqslant\sup_{x\in X}|\det\varphi'(x)|$$

и

$$\mu(U)=\theta\mu(X).$$

2) Если $X$ — связное множество, то существует $x_0 \in X$ такое, что

$$\mu(U) = |\det \varphi'(x_0)|\, \mu(X).$$

**8.157.** Найти

$$\iiint\limits_G \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z}(x;\ y;\ z)\, dx\, dy\, dz,$$

полагая $G = [a_1;\ a_2] \times [b_1;\ b_2] \times [c_1;\ c_2]$.

**8.158.** Пусть функция $f(x;\ y;\ z)$ непрерывна на цилиндре $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$. Доказать непрерывность на $[0;\ H]$ функции

$$F(z) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant z^2} f(x;\ y;\ z)\, dx\, dy.$$

**8.159.** Пусть функция $f(r)$ непрерывна при $r \geqslant 0$. Найти $\frac{dF}{dt}$, где

$$F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

**8.160.** Пусть функция $f(x;\ y;\ z)$ непрерывна на замкнутой области $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$. Найти $\frac{dF}{dt}$, где

$$F(t) = \iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant t} f(x;\ y;\ z)\, dx\, dy\, dz.$$

**8.161.** Пусть функция $f(x;\ y;\ z)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Найти $\frac{dF}{dt}$, где

$$F(t) = \iiint\limits_{G(t)} f(x;\ y;\ z)\, dx\, dy\, dz,$$

а

$$G(t) = \{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y + z \leqslant t\}.$$

**8.162.** Пусть функция $f(x;\ y;\ z)$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Найти $\frac{\partial^3 F}{\partial x\, \partial y\, \partial z}$, где

$$F(x;\ y;\ z) = \iiint\limits_{G(x,\ y,\ z)} f(\xi;\ \eta;\ \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

а

$$G(x;\ y;\ z) = [0;\ x] \times [0;\ y] \times [0;\ z].$$

---

**8.163.** Записать интеграл от функции $f$ на множестве $G$ в виде повторного по возрастанию номеров координат, если:

1) $G=\{0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant a\}$.
2) $G=\{x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant a,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0\}$.
3) $G=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant R^2,\ 0\leqslant x_4\leqslant H\}$.
4) $G=\{x_1^2+x_2^2\leqslant a^2,\ x_3^2+x_4^2\leqslant b^2\}$.
5) $G=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant a^2x_4^2,\ 0\leqslant x_4\leqslant H\}$.

**8.164.** Вычислить на множестве

$$G=\{x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant a,\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0\}$$

интеграл:

1) $\int\limits_G dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

2) $\int\limits_G (x_1+x_2+x_3+x_4)^\alpha\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4,\ \alpha\geqslant 0$.

**8.165.** 1) Проверить, что $(x=(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4))$

$$\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\int\limits_0^{x_2} dx_3\int\limits_0^{x_3} f(x)\,dx_4=\int\limits_0^a dx_4\int\limits_{x_4}^a dx_3\int\limits_{x_3}^a dx_2\int\limits_{x_2}^a f(x)\,dx_1.$$

2) Вычислить интеграл из 1) при $f(x)=1$.

**8.166.** 1) Проверить, что $(x=(x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4))$

$$\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{a-x_1} dx_2\int\limits_0^{a-x_1-x_2} dx_3\int\limits_0^{a-x_1-x_2-x_3} f(x)\,dx_4=$$
$$=\int\limits_0^a dx_4\int\limits_0^{a-x_4} dx_3\int\limits_0^{a-x_4-x_3} dx_2\int\limits_0^{a-x_4-x_3-x_2} f(x)\,dx_1.$$

2) Вычислить интеграл из 1) при $f(x)=1$.

**8.167.** Вычислить на множестве

$$G=\{0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant a\}$$

интеграл:

1) $\int\limits_G x_1x_2x_3x_4\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$. 2) $\int\limits_G (x_1x_2+x_3x_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

**8.168.** Вычислить на множестве

$$G=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant R^2,\quad 0\leqslant x_4\leqslant H\}$$

интеграл:

1) $\int\limits_G dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$. 2) $\int\limits_G (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

**8.169.** Вычислить на множестве

$$G=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant a^2x_4^2,\ \ 0\leqslant x_4\leqslant H\}$$

интеграл:

1) $\int\limits_G dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

2) $\int\limits_G (x_1^2+x_2^2+x_3^2)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

**8.170.** Вычислить на множестве

$$G=\{x_1^2+x_2^2\leqslant a^2,\ \ x_3^2+x_4^2\leqslant b^2\}$$

интеграл:

1) $\int\limits_G dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

2) $\int\limits_G (x_1+x_2+x_3+x_4)^2\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$.

**8.171.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на кубе

$$\{0\leqslant x_i\leqslant a,\ \ i=1,\ \ldots,\ n\}.$$

Доказать, что

$$\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ \ldots\ \int\limits_0^{x_{n-2}} dx_{n-1}\int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_1;\ \ldots;\ x_n)\,dx_n=$$

$$=\int\limits_0^a dx_n\int\limits_{x_n}^a dx_{n-1}\ \ldots\ \int\limits_{x_3}^a dx_2\int\limits_{x_2}^a f(x_1;\ \ldots;\ x_n)\,dx_1.$$

**8.172.** Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0;\ +\infty)$. Доказать, что:

1) $$\int\limits_0^a dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\ \ldots\ \int\limits_0^{x_{n-2}} dx_{n-1}\int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\,dx_n=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a f(t)\,(a-t)^{n-1}\,dt.$$

2) $$\int\limits_0^a dx_1\int\limits_{x_1}^a dx_2\ \ldots\ \int\limits_{x_{n-2}}^a dx_{n-1}\int\limits_{x_{n-1}}^a f(x_n)\,dx_n=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^a f(t)\,t^{n-1}\,dt.$$

3) $\int\limits_0^a dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int\limits_0^{x_{n-1}} \prod_{i=1}^n f(x_i)\, dx_n = \frac{1}{n!}\left(\int\limits_0^a f(t)\, dt\right)^n.$

4) $\int\limits_0^a x_1\, dx_1 \int\limits_0^{x_1} x_2\, dx_2 \ldots \int\limits_0^{x_{n-2}} x_{n-1}\, dx_{n-1} \int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n =$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int\limits_0^a (a^2 - t^2)^{n-1} f(t)\, dt.$$

8.173. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0; +\infty)$,

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \leqslant a,\ x_i \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Доказать, что

$$\int\limits_G f(x_1 + \ldots + x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^a f(t)\, t^{n-1}\, dt.$$

8.174. Пусть функция $K(x; y)$ непрерывна на квадрате

$$I^2 = [a; b] \times [a; b] \equiv [a; b]^2.$$

Обозначим $I = [a; b]$, $I^n = I \times I^{n-1}$, $n \geqslant 3$, и пусть

$$K_2(x; y) = \int\limits_I K(x; \xi) K(\xi, y)\, d\xi,$$

$$K_{n+1}(x; y) = \int\limits_I K_n(x; \xi) K(\xi; y)\, d\xi,$$

$$(x; y) \in I^2, \quad n \geqslant 2.$$

Доказать, что

$$K_{n+1}(x; y) = \int\limits_{I^n} K(x; \xi_1) K(\xi_1; \xi_2) \ldots K(\xi_n; y)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

и

$$K_{n+m+1}(x; y) = \int\limits_I K_m(x; \xi) K_n(\xi; y)\, d\xi, \quad (x; y) \in I^2, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

8.175. Вычислить интегралы по кубу $Q_n = [0; a]^n \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$:

1) $\int\limits_{Q_n} x_k^p\, dx, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad p \geqslant 0.$

2) $\int\limits_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k\, dx.$

3) $\int\limits_{Q_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p \, dx, \quad p \geqslant 0.$

4) $\int\limits_{Q_n} \left( \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right)^p dx, \quad p \geqslant 0.$

5) $\int\limits_{Q_n} e^{c_1x_1 + \ldots + c_nx_n} \, dx, \quad c_k \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n.$

6) $\int\limits_{Q_n} \cos^2 \frac{\pi}{2an} (x_1 + \ldots + x_n) \, dx.$

**8.176.** Вычислить интегралы по пирамиде

$$\Pi_n = \{0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant a\}:$$

1) $\int\limits_{\Pi_n} dx.$

2) $\int\limits_{\Pi_n} x_1 x_2 \ldots x_n \, dx.$

3) $\int\limits_{\Pi_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \, dx.$

**8.177.** Вычислить интегралы по пирамиде

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant a, \quad x_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, n \right\}:$$

1) $\int\limits_{S_n} dx.$ 2) $\int\limits_{S_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \, dx.$

3) $\int\limits_{S_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \, dx.$ 4) $\int\limits_{S_n} \left( \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/2} dx.$

5) $\int\limits_{S_n} \left( \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \right)^p dx, \quad p \geqslant 0.$

**8.178.** Найти объем $n$-мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \pm h_i, \quad h_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

при условии $\det(a_{ij}) \neq 0$.

**8.179.** Найти объем $n$-мерной пирамиды

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} \leqslant 1, \quad x_i \geqslant 0, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

**8.180.** Сферические координаты в $\mathbb{R}^n$ можно получить индуктивно следующим образом. Пусть

$$x = (x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$x' = (x_1; \ldots; x_{n-1})$ — проекция $x$ на $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть $r' = |x'|$, $\psi_1, \ldots$ $\ldots, \psi_{n-2}$ — сферические координаты в $\mathbb{R}^{n-1}$. Набор

$$(r'; \psi_1; \ldots; \psi_{n-2}; x_n)$$

называют *цилиндрическими координатами* точки $x$ в $\mathbb{R}^n$. Совершим еще одну замену по формулам

$$r' = r\cos\psi_{n-1}, \quad x_n = r\sin\psi_{n-1},$$

оставляя координаты $\psi_1, \ldots, \psi_{n-2}$ прежними. Здесь $r = |x|$, $\psi_{n-1} \in [-\pi/2; \pi/2]$, якобиан замены очевидно равен $r$. Тогда каждой точке $x$ сопоставлены *сферические координаты* $(r; \psi_1; \ldots; \psi_{n-1})$, а якобиан перехода от $(x_1; \ldots; x_n)$ к $(r; \psi_1; \ldots; \psi_{n-1})$ равен $J_n = rJ_{n-1}$, где $J_{n-1}$ — якобиан сферической замены в $\mathbb{R}^{n-1}$.

1) Вывести формулы перехода к сферическим координатам:

$$\begin{aligned}
x_n &= r\sin\psi_{n-1},\\
x_{n-1} &= r\cos\psi_{n-1}\sin\psi_{n-2},\\
x_{n-2} &= r\cos\psi_{n-1}\cos\psi_{n-2}\sin\psi_{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_2 &= r\cos\psi_{n-1}\ldots\cos\psi_2\sin\psi_1,\\
x_1 &= r\cos\psi_{n-1}\ldots\cos\psi_2\cos\psi_1,
\end{aligned}$$

где $\psi_1 \in [0; 2\pi)$, $\psi_j \in [-\pi/2; \pi/2]$, $j = 2, \ldots, n-1$.

2) Вывести формулу для якобиана перехода к сферическим координатам в $\mathbb{R}^n$

$$J_n = r^{n-1}\cos^{n-2}\psi_{n-1}\cos^{n-3}\psi_{n-2}\ldots\cos^2\psi_3\cos\psi_2.$$

**8.181.** Найти объем $n$-мерного шара $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant R^2$.

**8.182.** Найти объем $n$-мерного цилиндра

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant R^2, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant H.$$

**8.183.** Найти объем $n$-мерного конуса

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant a^2 x_n^2, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant H.$$

**8.184.** Вычислить интеграл

$$\int\limits_G x_n^2\,dx, \quad x=(x_1;\ \ldots;\ x_n),$$

где $G=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2\leqslant R^2,\quad 0\leqslant x_n\leqslant H\right\}$.

**8.185.** Найти объем $n$-мерного эллипсоида $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i^2}{a_i^2}\leqslant 1$.

**8.186.** Вычислить интеграл

$$\int\limits_\Omega (R^2-x_1^2-\ \ldots\ -x_n^2)^{1/2}\,dx,$$

где $\Omega$ — шар $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant R^2$.

**8.187.** Пусть функция $f(r)$ непрерывна при $r\geqslant 0$. Свести к однократному интеграл

$$\int\limits_\Omega f\left(\sqrt{x_1^2+\ \ldots\ +x_n^2}\right)dx,$$

где $\Omega$ — шар $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant R^2$.

**8.188.** Пусть

$$Q=[0;\ a]^n,\quad Q(x)=[0;\ x_1]\times[0;\ x_2]\times\ldots\times[0;\ x_n],$$
$$x_k>0,\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

пусть функция $f(x)$ непрерывна на $Q$, $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)$, $u=(u_1;\ \ldots;\ u_n)$,

$$F(x)=\int\limits_{Q(x)} f(u)\,du,\quad x\in Q.$$

Найти $\dfrac{\partial^n F}{\partial x_1\ \ldots\ \partial x_n}$.

**8.189.** Пусть функция $f$ непрерывна и положительна на

$$[0;\ a],\quad Q=[0;\ a]^n,\quad x=(x_1;\ \ldots;\ x_n).$$

Вычислить интеграл

$$I_m=\int\limits_Q \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)}\,dx,\quad 1\leqslant m\leqslant n.$$

**8.190.** Пусть функция $f$ непрерывна на $[0;\ 1]$, $Q_n=[0;\ 1]^n$. Доказать, что $(x=(x_1;\ \ldots;\ x_n))$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{Q_n} f(x_1x_2\ \ldots\ x_n)\,dx=f(0).$$

**8.191.** Пусть $S_n=\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\leqslant 1,\ x_k\geqslant 0,\ k=1,\ \ldots,\ n\right\}$. Получить формулу Дирихле $(x=(x_1;\ \ldots;\ x_n))$

$$\int\limits_{S_n} x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ \ldots\ x_n^{p_n-1}\,dx=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\ldots\,\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ \ldots\ +p_n+1)},$$

$$p_k>0,\quad k=1,\ \ldots,\ n.$$

**8.192.** Пусть $S_n$ та же пирамида, что и в задаче **8.191**, $f(t)$ — непрерывная при $t\geqslant 0$ функция. Получить формулу Лиувилля

$$\int\limits_{S_n} f(x_1+\ \ldots\ +x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ \ldots\ x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ \ldots\ dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\,\ldots\,\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ \ldots\ +p_n)}\int\limits_0^1 f(t)\,t^{p_1+p_2+\ \ldots\ +p_n-1}\,dt,$$

$$p_k>0,\quad k=1,\ \ldots,\ n.$$

---

**4. Несобственные кратные интегралы.** Пусть $G$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Последовательность открытых измеримых множеств $G_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, называют *исчерпывающей множество* $G$ (*исчерпанием* $G$), если 1) $\bar{G}_k\subset G_{k+1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,$ 2) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k=G$.

Далее будем рассматривать такие функции на $G$, которые интегрируемы на любом открытом измеримом множестве $\Omega$ таком, что $\bar{\Omega}\subset G$.

Определение. Пусть для любой последовательности исчерпывающих $G$ множеств $G_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{G_k} f(x)\,dx,$$

не зависящий от выбора последовательности $G_k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, тогда этот предел называют *несобственным интегралом от* $f$ *на* $G$ и обозначают

$$\int\limits_G f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{G_k} f(x)\,dx, \tag{34}$$

а функцию $f$ называют *интегрируемой в несобственном смысле на* $G$.

Если символ интеграла $\int\limits_G f(x)\,dx$, употребляемый часто для произвольных $f$ и $G$, в том числе и для неограниченных, определен согласно (34), то его называют *сходящимся интегралом*, в противном случае — *расходящимся*.

Сходящиеся несобственные интегралы обладают свойствами линейности, аддитивности по множествам, сохраняют знак неравенства при интегрировании, для них справедлива в обычном виде формула замены переменного и т. д.

Если функция $f$ неотрицательна на $G$, то для любой последовательности $G_k$, $k=1, 2, \ldots$, исчерпывающей $G$, существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{G_k} f(x)\,dx,$$

и он не зависит от выбора последовательности $G_k$, $k=1, 2, \ldots$ Иначе говоря, для неотрицательных функций при исследовании на сходимость несобственного интеграла и вычислении его значения достаточно использовать какую-либо одну последовательность исчерпывающих множеств.

Пример 12. Доказать сходимость интеграла

$$I=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

и найти его значение.

△ Подынтегральная функция $e^{-(x^2+y^2)}$ положительна. Рассмотрим последовательность множеств $G_k=\{x^2+y^2\leqslant k^2\}$, $k=1, 2, \ldots$, исчерпывающую $\mathbb{R}^2$. Переходя к полярным координатам, находим

$$I_k=\int_{G_k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=2\pi\int_0^k e^{-r^2}r\,dr=\pi\left(1-e^{-k^2}\right).$$

Отсюда $I=\lim\limits_{k\to\infty} I_k=\pi$. Как отмечено выше, таков же будет предел и для любой другой последовательности множеств, исчерпывающей $\mathbb{R}^2$. Поэтому интеграл $I$ сходится и равен $\pi$. ▲

Пример 13. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

△ В условиях предыдущего примера возьмем последовательность квадратов $D_k=\{|x|\leqslant k,\ |y|\leqslant k\}$, исчерпывающую $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$I=\lim_{k\to\infty}\iint_{D_k} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-k}^{k} e^{-y^2}\,dy\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx\right)^2=\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \ \blacktriangle$$

Признак сравнения. Пусть $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ на $G$. Тогда из сходимости интеграла $\int\limits_G g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_G f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_G f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_G g(x)\,dx$.

Пример 14. Исследовать на сходимость интегралы:

1) $I_1 = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\alpha}}$.

2) $I_2 = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\alpha}}$.

$\triangle$ Подынтегральная функция положительна, поэтому можно рассмотреть наиболее удобные здесь последовательности исчерпывающих множеств:

$$G_k' = \left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 < x^2+y^2+z^2 < k^2\right\} \quad \text{для} \quad 1)$$

и

$$G_k'' = \left\{\frac{1}{k^2} < x^2+y^2+z^2 < \left(1-\frac{1}{k}\right)^2\right\} \quad \text{для } 2), \quad k=2,\ 3,\ \ldots .$$

Переходя к сферическим координатам, получаем:

1) $I_{1k} = 4\pi \displaystyle\int_{1+1/k}^{k} \frac{dr}{r^{\alpha-2}}$.

2) $I_{2k} = 4\pi \displaystyle\int_{1/k}^{1-1/k} \frac{dr}{r^{\alpha-2}}$.

Теперь видно, что предел $\lim\limits_{k\to\infty} I_{1k}$ существует, если $\alpha - 2 > 1$, т. е. $\alpha > 3$, и не существует при $\alpha \leqslant 3$. Предел $\lim\limits_{k\to\infty} I_{2k}$ существует, если $\alpha - 2 < 1$, т. е. $\alpha < 3$, и не существует при $\alpha \geqslant 3$.

Таким образом, интеграл $I_1$ сходится при $\alpha > 3$, расходится при $\alpha \leqslant 3$, интеграл $I_2$ сходится при $\alpha < 3$, расходится при $\alpha \geqslant 3$. $\blacktriangle$

Несобственный интеграл $\int\limits_G f(x)\,dx$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_G |f(x)|\,dx$.

Теорема 8. Если кратный ($n \geqslant 2$) интеграл $\int\limits_G f(x)\,dx$ сходится, то он и абсолютно сходится.

Пример 15. Доказать, что интеграл

$$I = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$$

расходится.

$\triangle$ Исследуем на сходимость интеграл

$$I_1 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |\sin (x^2+y^2)^2|\,dx\,dy,$$

в котором подынтегральная функция неотрицательна. Пусть

$$G_k = \{x^2+y^2<k^2\}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,$$

тогда

$$I_{1k} = \iint\limits_{G_k} |\sin (x^2+y^2)^2|\,dx\,dy = 2\pi \int\limits_0^k |\sin r^4|\,r\,dr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{k^4} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt.$$

Как известно, интеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t}}\,dt$ расходится к $+\infty$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} I_{1k} = +\infty$, и, значит, интеграл $I_1$ расходится. Если бы данный интеграл $I$ сходился, то сходился бы по теореме и интеграл $I_1$. Значит, из его расходимости следует расходимость данного интеграла. $\blacktriangle$

---

**8.193.** Показать, что введенное ранее ([2], гл. III) понятие несобственного интеграла в $\mathbb{R}^1$ не равносильно данному здесь определению. А именно привести пример однократного интеграла, сходящегося в прежнем определении и расходящегося в данном здесь определении.

**8.194.** Доказать:

1) Линейность несобственного интеграла.

2) Аддитивность несобственного интеграла по множествам.

3) Если $f \leqslant g$ на $G$ и обе функции интегрируемы на $G$ в несобственном смысле, то

$$\int\limits_G f(x)\,dx \leqslant \int\limits_G g(x)\,dx.$$

**8.195.** Пусть функция $f$ интегрируема в несобственном смысле на $G$, $\Omega$ — открытое измеримое подмножество $G$. Доказать, что

$$\int\limits_G f(x)\,dx - \int\limits_\Omega f(x)\,dx = \int\limits_{G\setminus\Omega} f(x)\,dx.$$

**8.196.** Доказать, что интеграл $\int\limits_G f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любой последовательности множеств $G_k$, $k=1, 2, \ldots$, исчерпывающей $G$, существуют интегралы $\int\limits_{G\setminus\overline{G}_k} f(x)\,dx$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{G\setminus\overline{G}_k} f(x)\,dx=0$.

**8.197.** Пусть $f_+(x)=f(x)$, если $f(x)\geqslant 0$, и $f_+(x)=0$, если $f(x)<0$; пусть $f_-(x)=f(x)$, если $f(x)\leqslant 0$, и $f_-(x)=0$, если $f(x)>0$. Доказать, что интеграл $\int\limits_G f(x)\,dx$ абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы

$$\int\limits_G f_+(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_G f_-(x)\,dx.$$

**8.198.** Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ абсолютно интегрируемы на $(a; b)$ и $(c; d)$ соответственно. Доказать, что интеграл от $f(x)g(y)$ на $(a;\ b)\times(c;\ d)$ сходится и

$$\iint\limits_{(a;\ b)\times(c;\ d)} f(x)\,g(y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b f(x)\,dx\cdot\int\limits_c^d g(y)\,dy.$$

**8.199.** 1) Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\,dy.$$

2) Доказать, что сходятся повторные интегралы

$$\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dy$$

и имеют одинаковое значение. Найти это значение.

3) Доказать, что существует предел

$$\lim_{\substack{a\to+\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_0^a\int\limits_0^b e^{-xy}\sin x\,dx\,dy,$$

найти этот предел и сравнить его со значением повторных интегралов из 2).

**8.200.** 1) Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

2) Доказать, что сходятся повторные интегралы

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2)\, dy \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \sin(x^2 + y^2)\, dx$$

и имеют одинаковое значение. Найти это значение.

3) Доказать, что существует предел

$$\lim_{\substack{a \to +\infty \\ b \to +\infty}} \int_0^a \int_0^b \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

найти этот предел и сравнить его со значением интегралов из 2).

4) Найти предел

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{G_n} \sin(x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

где $G_n = \{x^2 + y^2 < 2\pi n,\ x > 0,\ y > 0\}$, и сравнить его с пределом из 3).

**8.201.** Пусть $f(x;\ y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$. Доказать, что:

1) Сходятся повторные интегралы

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(x;\ y)\, dy \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f(x;\ y)\, dx.$$

2) Расходится двойной интеграл

$$\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} f(x;\ y)\, dx\, dy.$$

**8.202.** Указать такую неотрицательную функцию $f(x;\ y)$, определенную на $(a;\ b) \times (a;\ b)$, что двойной интеграл

$$\iint_{(a;\ b) \times (a;\ b)} f(x;\ y)\, dx\, dy$$

сходится, а один или оба из повторных интегралов не существуют.

Исследовать на сходимость интегралы (**8.203—8.204**):

**8.203.** 1) $\displaystyle\iint_G \frac{dx\, dy}{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\alpha}}$; $\quad G = \{x^2 + y^2 > 1\}$.

2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + xy + y^2)^{\alpha}}$.

3) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\, dy}{(1 + x^4 + y^4)^{\alpha}}$.

**8.204.** 1) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+|x|^\alpha)(1+|y|^\beta)}$.

2) $\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{x^\alpha + y^\beta}$, $G = \{x > 0,\ y > 0,\ x^\alpha + y^\beta > 1\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

3) $\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(|x|^\alpha + |y|^\beta)^p}$, $\quad G = \{|x| + |y| > 1\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

4) $\iint\limits_{G} \frac{x^2\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}$, $\quad G = \{|y| < 1\}$.

5) $\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$, $\quad G = \{y > 1 + x^2\}$.

6) $\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$, $\quad G = \{y > 0,\ x - y > 1\}$.

**8.205.** Исследовать на сходимость интегралы, считая, что функция $f$ непрерывна и $0 < m \leqslant |f(x;\ y)| \leqslant M < +\infty$:

1) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x;\ y)\,dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^\alpha}$.

2) $\iint\limits_{G} \frac{f(x;\ y)\,dx\,dy}{(x^4+y^4)^\alpha}$, $\quad G = \{1 < y < 2\}$.

3) $\iint\limits_{G} \frac{f(x;\ y)\,dx\,dy}{(|x|+y)^\alpha}$, $\quad G = \{1 + x^2 < y < 2 + x^2\}$.

Исследовать на сходимость интегралы (8.206—8.210):

**8.206.** $\iint\limits_{x-y>1} \frac{\sin x \cos y}{(x-y)^p}\,dx\,dy$.

**8.207.** $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x^4 + y^4)\,dx\,dy$.

**8.208.** $\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \sin(x^2+y^2)^\alpha\,dx\,dy$.

**8.209.** 1) $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$.

2) $\iint\limits_{|x|+|y|<1} \frac{dx\,dy}{(x^2-xy+y^2)^\alpha}$.

3) $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$.

4) $$\iint\limits_{0<y<x<a} \frac{dx\,dy}{(a-x)^{\alpha}(x-y)^{\beta}}.$$

**8.210.** 1) $$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{x^{\alpha}+y^{\beta}},$$

$$G=\{x>0,\ y>0,\ x^{\alpha}+y^{\beta}<1\},\quad \alpha>0,\quad \beta>0.$$

2) $$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(x^{\alpha}+y^{\beta})^{p}},$$

$$G=\{x>0,\ y>0,\ x+y<1\},\quad \alpha>0,\quad \beta>0,\quad p>0.$$

3) $$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(1-x^{\alpha}-x^{\beta})^{p}},$$

$$G=\{x>0,\ y>0,\ x^{\alpha}+y^{\beta}<1\},\quad \alpha>0,\quad \beta>0,\quad p>0.$$

**8.211.** Исследовать на сходимость интегралы, считая, что функция $f$ непрерывна и $0<m\leqslant|f(x;\ y)|\leqslant M$:

1) $$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} \frac{f(x;\ y)}{|x-y|^{p}}\,dx\,dy.$$

2) $$\iint\limits_{|x|+|y|<1} \frac{f(x;\ y)}{(1-x-y)^{p}}\,dx\,dy.$$

3) $$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{f(x;\ y)}{(1-x^2-y^2)^{p}}\,dx\,dy.$$

**8.212.** Пусть функция $f(x;\ y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a;\ b]\times[c;\ d]$, а функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Доказать, что для $p<1$ сходится интеграл

$$\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} \frac{f(x;\ y)\,dx\,dy}{|y-g(x)|^{p}}.$$

Исследовать на сходимость интегралы (**8.213—8.217**):

**8.213.** $$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha}},\quad G=\{x^2+y^2<1,\ 0<x,\ 0<y<x^2\}.$$

**8.214.** $$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}},\quad G=\{x>0,\ y>0,\ x+y<1\}.$$

**8.215.** $$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{\alpha}},\quad G=\{\sqrt{x}+\sqrt{y}<1\}.$$

**8.216.** $$\iint\limits_{G} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy,$$ если:

1) $G=\{0<x<y<1\}$.

2) $G=\{1<x<y<+\infty\}$.

3) $G=\{0<x<1,\ 1<y<+\infty\}$.

**8.217.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \sin(x^2+y^2)^a\,dx\,dy.$

**8.218.** Пусть функция $\mu$ непрерывна в замыкании $\bar{G}$ ограниченной измеримой области $G$, $N(\xi;\ \eta;\ \zeta)\in G$, $M(x;\ y;\ z)\in\mathbb{R}^3$,

$$|MN|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Доказать, что

$$\iiint\limits_G \frac{\mu(\xi;\ \eta;\ \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{|MN|}=\frac{1}{r}\iiint\limits_G \mu(\xi;\ \eta;\ \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta+o(1/r).$$

Вычислить интегралы (8.219—8.228):

**8.219.** $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|x|\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}.$

**8.220.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}.$

**8.221.** $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy>1,\\ x>1}}\frac{dx\,dy}{x^p y^q}.$

**8.222.** $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0<y-x<1\\ x>1}}\frac{dx\,dy}{(x+y)^p}.$

**8.223.** $\displaystyle\iint\limits_{y>x^2+1}\frac{dx\,dy}{x^4+y^2}.$

**8.224.** $\displaystyle\iint\limits_{0<x<y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$

**8.225.** $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

**8.226.** $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

**8.227.** $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}>1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy.$

**8.228.** $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+xy+y^2)}\,dx\,dy.$

**8.229.** Пусть $\varepsilon \in (-1; 1)$. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy.$$

**8.230.** Пусть $a(x; y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$, где $A > 0$, $\Delta = AC - B^2 > 0$. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x;\,y)}\,dx\,dy.$$

Вычислить интегралы (8.231—8.239):

**8.231.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$, $\quad p < 1$.

**8.232.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<1} \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$.

**8.233.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^\alpha}$, $\quad \alpha < 1$.

**8.234.** $\displaystyle\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$, $\quad G = \left\{x > 0,\ y > 0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$.

**8.235.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2<2y} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**8.236.** $\displaystyle\iint\limits_{\sqrt{|x|}<y<1} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$.

**8.237.** $\displaystyle\int\limits_0^a\int\limits_0^x \frac{dx\,dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$, $\quad a > 0$.

**8.238.** $\displaystyle\iint\limits_{G} \ln\sin(x+y)\,dx\,dy$,

$$G = \{x > 0,\ y > 0,\ x + y < \pi\}.$$

**8.239.** $\displaystyle\iint\limits_{|x|^\alpha<y} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$, $\quad 0 < \alpha < 1$.

**8.240.** Множество $G$ ограничено отрезком $[(a^2+1)^\alpha; (b^2+1)^\alpha]$ оси $Ox$ и двумя спиралями, заданными в полярных координатах уравнениями $r = (e^\varphi + a^2)^\alpha$ и $r = (e^\varphi + b^2)^\alpha$, $\varphi \geqslant 0$, где $0 < a^2 < b^2 < a^2 + e^{2\pi} - 1$, $\alpha > 0$.

1) Найти все $\alpha$ и $\beta$, при которых сходится интеграл

$$\iint\limits_G (x^2+y^2)^\beta \,dx\,dy.$$

2) Вычислить интеграл из 1) при $\alpha=1/6$, $\beta=1/2$.

**8.241.** Вычислить интеграл

$$I(\xi;\ \eta)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}\cos x\xi \cos y\eta \,dx\,dy.$$

(Указание. Перейти от координат $(x;\ y)$ и $(\xi;\ \eta)$ к соответствующим полярным координатам $(r;\ \varphi)$ и $(\rho;\ \psi)$.)

**8.242.** Пусть сходится интеграл

$$\Phi(\xi;\ \eta)=\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos x\xi \cos y\eta \,dx\,dy.$$

Доказать, что $\Phi(\xi;\ \eta)\equiv\Phi\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)$.

**8.243.** Пусть функция $f$ непрерывна на $[0;\ a]$. Доказать, что

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^x \frac{f(y)\,dx\,dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}=\pi\int\limits_0^a f(y)\,dy,$$

используя сведение несобственного двойного интеграла к повторному.

**8.244.** Проверить, что функция

$$\varphi(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^y \frac{f'(t)}{\sqrt{y-t}}\,dt$$

удовлетворяет уравнению Абеля

$$\int\limits_0^x \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{x-y}}=f(x),$$

где $f$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

**8.245.** Для Г-*функции* и В-*функции*:

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx,\quad \mathrm{B}(a;\ b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx,$$

доказать *закон умножения* (*Якоби*)

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a;\ b),$$

используя утверждение из задачи **8.198** и подходящую замену переменных.

**8.246.** Доказать, что интеграл

$$\int\limits_{|x|>1}\frac{dx}{|x|^\alpha},\quad \text{где}\quad x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, сходится при $\alpha>n$ и расходится при $\alpha\leqslant n$.

**8.247.** Доказать, что интеграл

$$\int\limits_{|x|<1}\frac{dx}{|x|^{\alpha}},\quad \text{где}\quad x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

$|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, сходится при $\alpha<n$ и расходится при $\alpha\geqslant n$.

Исследовать на сходимость интегралы, считая, что функция $f$ непрерывна и $0<m\leqslant|f|\leqslant M<+\infty$ (8.248—8.249):

**8.248.** 1) $$\iiint\limits_G\frac{f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p},\quad G=\{x^2+y^2+z^2>1\}.$$

2) $$\iiint\limits_G\frac{dx\,dy\,dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r},\quad G=\{|x|+|y|+|z|>1\},$$

$$p>0,\quad q>0,\quad r>0.$$

**8.249.** 1) $$\iiint\limits_G\frac{f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p},\quad G=\{x^2+y^2+z^2<1\}.$$

2) $$\iiint\limits_G\frac{f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p},\quad G=\{x^2+y^2+z^2<1\}.$$

3) $$\iiint\limits_G\frac{dx\,dy\,dz}{|x-y-z|^p},$$

$$G=\{|x|<1,\quad |y|<1,\quad |z|<1,\quad x\neq y+z\}.$$

4) $$\iiiint\limits_G\frac{dt\,dx\,dy\,dz}{|t^2-x^2-y^2-z^2|^p},$$

$$G=\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}<t<T<+\infty\}.$$

**8.250.** Пусть функция $f(x;\ y;\ z)$ непрерывна на кубе $Q=[0;\ a]\times[0;\ a]\times[0;\ a]$, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[0;\ a]$. Доказать, что при $p<1$ сходится интеграл

$$\iiint\limits_Q\frac{f(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz}{(|y-\varphi(x)|^2+|z-\psi(x)|^2)^p}.$$

Вычислить интегралы (8.251—8.255):

**8.251.** $$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{dx\,dy\,dz}{x^py^qz^r}.$$

**8.252.** $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$, $\quad G=\{x^2+y^2+z^2>1\}$.

**8.253.** $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$, $\quad G=\{x^2+y^2+z^2<1\}$.

**8.254.** $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz$.

**8.255.** $\iiint\limits_G x^2ye^{xyz}\,dx\,dy\,dz$,

$$G=\{x>0,\ y>1,\ z>1,\ xyz<1\}.$$

**8.256.** Пусть $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)$, $A(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{a_i^2}$. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-A(x)}\,dx.$$

**8.257.** Пусть $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)$, $A(x)=\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ — положительно определенная квадратичная форма. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-A(x)}\,dx.$$

**8.258.** Выразить через значения Г-функции и В-функции интегралы:

1) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (x+y)^p e^{-x-y}\,dx\,dy,\quad p>0.$

2) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (x^2+y^2)^p e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,\quad p>-1.$

3) $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2+z^2)^p}\,dx\,dy\,dz,\quad p>0.$

4) $\iint\limits_G (x^2+y^2)^p(1-x^2-y^2)^q\,dx\,dy,\quad p>-1,\quad q>-1,$

$$G=\{x>0,\ y>0,\ x^2+y^2<1\}.$$

5) $\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(t^2-x^2-y^2-z^2)^p},\quad p<1,\quad G=\{x^2+y^2+z^2<t^2\}.$

## § 9. Геометрические и физические приложения кратных интегралов

**1. Геометрические приложения кратных интегралов.** *Мера* $\mu G$ измеримого по Жордану множества $G$ вычисляется по формуле $(x \in \mathbb{R}^n)$

$$\mu G = \int\limits_G dx. \tag{1}$$

В $\mathbb{R}^2$ это площадь, а в $\mathbb{R}^3$ — объем:

$$S = \iint\limits_G dx\,dy, \tag{2}$$

$$V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz. \tag{3}$$

---

**9.1.** Пусть множество $G$ элементарно относительно оси $Oz$, т. е.

$$G = \{(x;\ y;\ z):\ (x;\ y) \in \Omega,\ \ \varphi(x;\ y) \leqslant z \leqslant \psi(x;\ y)\}, \tag{4}$$

где $\Omega$ — замкнутое измеримое множество в $\mathbb{R}^2$, функции $\varphi$ и $\psi$ непрерывны на $\Omega$. Доказать, что для объема $G$ верна формула

$$V = \iint\limits_\Omega (\psi(x;\ y) - \varphi(x;\ y))\,dx\,dy. \tag{5}$$

В частности, если $\psi(x;\ y) \geqslant 0$, а $\varphi(x;\ y) = 0$ на $\Omega$ (т. е. $\Omega$ является основанием цилиндрического множества $G$, а график $\psi$ — «крышкой»), то

$$V = \iint\limits_\Omega \psi(x;\ y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

**9.2.** Пусть промежуток $I$ является проекцией на ось $Ox_n$ измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega(x_n)$ — сечение $G$ гиперплоскостью $x_n = \text{const}$, т. е. $(x' = (x_1;\ \ldots;\ x_{n-1}))$

$$\Omega(x_n) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}:\ (x';\ x_n) \in G\} \subset \mathbb{R}^{n-1},$$

и пусть для любого $x_n \in I$ множество $\Omega(x_n)$ измеримо в $\mathbb{R}^{n-1}$. Доказать, что

$$\mu G = \int\limits_I \mu\Omega(x_n)\,dx_n. \tag{7}$$

В частности, для $\mathbb{R}^3$, обозначая $\mu G = V$, $\mu\Omega(x_3) = S(z)$, имеем

$$V = \int\limits_I S(z)\,dz. \tag{8}$$

**9.3.** Пусть $A$ и $B$ — такие измеримые множества в $\mathbb{R}^n$, что для любого $x_n$ их сечения $\Omega_A(x_n)$ и $\Omega_B(x_n)$ измеримы в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $\mu\Omega_A(x_n) = \mu\Omega_B(x_n)$. Доказать, что $\mu A = \mu B$ (*принцип Кавальери*).

**9.4***). Найти площадь области, ограниченной кривыми:

1) $4y = x^2 - 4x,\ x = y + 3.$

2) $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = 9 - 6x.$

3) $y^2 = 2px + p^2,\ y^2 = q^2 - 2qx,\ p > 0,\ q > 0.$

4) $x^2 + y^2 = 4,\ y^2 = 4 - 4x,\ x < 1.$

5) $y^2 = 2x,\ y^2 = 4x - x^2,\ 2x < y^2.$

6) $y = \cos x,\ y = \cos 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi/3.$

7) $2x^2 + 2y^2 = 2x + 1,\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 \geqslant 1.$

8) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x + y = a.$

9) $(x + y)^2 + x^2 = a^2.$

**9.5.** Пусть $K'$ — образ квадрата $K = [a;\ a + h] \times [b;\ b + h]$, $h > 0$, при отображении $u = \varphi(x;\ y)$, $v = \psi(x;\ y)$, пусть $S$ и $S'$ — площади $K$ и $K'$. Изобразить множество $K'$, найти отношение $S'/S$ и его предел при $h \to 0$, если:

1) $u = xy,\ v = y/x;\ a > 0,\ b > 0.$

2) $u + v = x,\ v = xy;\ a = 0,\ b = 1,\ 0 < h < 1.$

**9.6.** Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно использовать полярные координаты):

1) $x^2 + y^2 = 2ax,\ x^2 + y^2 = 2bx,\ y = x,\ y = 0,\ b > a > 0.$

2) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),\ x^2 + y^2 = a^2\ \left(\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant a > 0\right).$

3) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = a\sqrt{3}\,y$

(область вне кардиоиды, но внутри окружности).

4) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2.$

5) $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4).$

6) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2),\ a > 0.$

7) $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 + y^3).$

**9.7.** Найти площадь области, заданной на декартовой плоскости в полярных координатах:

1) $r \leqslant 1 - \sin\varphi.$ 2) $3\cos\varphi \leqslant r \leqslant 2 - \cos\varphi.$

---

*) Большое количество задач о вычислении площадей плоских фигур, объемов тел, площадей поверхностей имеется в [2, § 7].

**9.8.** Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно воспользоваться обобщенными полярными координатами, см. **8.119**):

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{y^2}{c^2}$.

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$, $p>0$, $q>0$.

4) $(x+y)^4=6xy^2$ (площадь петли).

5) $(x+y)^4=a^2(x^2+y^2)$, $x=0$, $y=0$ $(x>0,\ y>0)$.

6) $\sqrt[4]{x/a}+\sqrt[4]{y/b}=1$, $x=0$, $y=0$, $a>0$, $b>0$.

7) $x^4+y^4=2a^2xy$.

8) $x^3+y^3=axy$ (площадь петли).

**9.9.** Найти площадь области, ограниченной данными линиями, используя подходящую замену координат:

1) $x=2y$, $y=3x$, $3x=2-y$, $x=4-2y$.

2) $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$, $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$.

3) $xy=a^2$, $xy=b^2$, $x=py$, $x=qy\ (x>0)$, $b>a>0$, $q>p$.

4) $y^2=ax$, $y^2=bx$, $x=py$, $x=qy$, $b>a>0$, $q>p>0$.

5) $y^2=ax$, $y^2=bx$, $x^2=py$, $x^2=qy$, $b>a>0$, $q>p>0$.

6) $xy=a^2$, $xy=b^2$, $x^2=py$, $x^2=qy$, $b>a>0$, $q>p>0$.

7) $x^2=ay$, $x^2=by$, $x^3=py^2$, $x^3=qy^2$, $b>a>0$, $q>p>0$.

8) $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\frac{x}{a}=9\frac{y}{b}$,
$a>0$, $b>0$.

9) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $x^{2/3}+y^{2/3}=b^{2/3}$, $y=x$, $y=8x$, $b>a>0$.

**9.10.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,$$

если $\Delta=a_1b_2-b_2a_1\neq 0$.

**9.11.** Найти площадь расположенной в I квадранте фигуры, ограниченной двумя эллипсами $\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 a_j}+\frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 a_j}=1$ и двумя ортогональными им гиперболами

$$\frac{x^2}{\cos^2 b_j}-\frac{y^2}{\sin^2 b_j}=1,\ \text{где}\ j=1,2,\quad 0<a_1<a_2,\quad 0<b_1<b_2.$$

(Указание. Можно воспользоваться заменой $x=\operatorname{ch}u\cos v$, $y=\operatorname{sh}u\sin v$.)

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (см. формулы (5), (6)) (**9.12—9.13**):

**9.12.** 1) $|x+y|<\pi/2$, $z=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x-y|<\pi/2$.

2) $n\pi<x^2+y^2<(n+1)\pi$, $z=\sin(x^2+y^2)$, $z=0$.

3) $x^2+y^2=ax$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

4) $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $z=x^2+y^2$.

5) $x+y+z=a$, $4x+y=a$, $4x+3y=3a$, $y=0$, $z=0$, $a>0$.

6) $x^2+y^2=R^2$, $x+y+z=a$, $x+y+z=-a$.

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=\frac{b}{a}x$, $y=0$, $z=0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$ $(x>0)$.

8) $x^2+y^2=ay$, $z=xy$, $z=0$ $(x>0)$.

9) $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

**9.13.** 1) $x^2+y^2=a^2$, $y+z=\pm a$, $y-z=\pm a$.

2) $z=xy$, $z=x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

3) $x=a$, $y=b$, $z^2=xy$, $a>0$, $b>0$.

4) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{3x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,

$$3\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-3\frac{z}{c}=1,\ y=0,\ a>0,\ b>0,\ c>0.$$

5) $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

6) $y^2+z^2=x$, $x=y$.

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) $z^2-x^2=a^2$, $z^2-y^2=a^2$, $z=a\sqrt{2}$, $a>0$.

9) $x^2z^2+a^2y^2=c^2x^2$, $x=a$, $a>0$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (можно воспользоваться цилиндрическими координатами) (**9.14—9.15**):

**9.14.** 1) $(x^2+y^2)^2=2xy$, $z=x+y$, $z=0$ $(x>0)$.

2) $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$, $z=x^2+y^2$, $z=0$.

3) $x^2+y^2=1$, $z=e^{-(x^2+y^2)}$, $z=0$.

4) $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2+a^2=2z^2$, $a>0$ $(z>0)$.

5) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2>a|x|$, $a>0$.

6) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $a>0$, $|x|\geqslant|y|$.

7) $y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$, $z=c\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2a}\sqrt{x^2+y^2}\right)$,

$$z=0,\ \sqrt{x^2+y^2}<a,\ c>0,\ 0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi.$$

8) $z=x^2+y^2$, $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$, $z=0$.

9) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ z(x+y)=ax+by,$

$$z=0,\ x>0,\ y>0,\ a>0,\ b>0.$$

**9.15.** 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z,\ z=0.$

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ cz=xy,\ z=0,\ x>0,\ y>0.$

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{p},\ \frac{z}{c}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}},\ z=0,\ p>0.$

4) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1.$

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ c>0.$

6) $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ z=0,\ c>0.$

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=2,\ a>0,\ c>0.$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (можно использовать сферические координаты) (**9.16—9.17**):

**9.16.** 1) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ \left(z<\sqrt{x^2+y^2}\right).$

2) $x^2+y^2+z^2=2az,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ \left(z>\sqrt{x^2+y^2}\right).$

3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x,\ a>0.$

4) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

5) $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz,\ a>0.$

6) $(x^2+y^2+z^2)^2=az(x^2+y^2),\ a>0.$

7) $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z,\ a>0.$

8) $(x^2+y^2)^3+z^6=a^3xyz,\ a>0.$

**9.17.** 1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{p},\ p>0.$

2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c},\ c>0.$

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1.$

5) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{xyz}{p^3},\ p>0.$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (**9.18—9.20**) (все параметры положительны):

**9.18.** 1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2},\ z^2=2xy,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

3) $x+y=1,\ z^2=xy,\ z>0.$

4) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a},\ y>0,\ z>0.$

5) $x+y=1,\ x^{3/2}+y^{3/2}=z,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

6) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{p}+\frac{y}{q},\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

7) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{p}-\frac{y}{q},\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1,\ \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1,\ z=0$

$$\left((x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}\leqslant 1\right).$$

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

$$\left(\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\leqslant\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

**9.19.** 1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{z}{p}.$

2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{z}{p},\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

3) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{p}+\frac{y}{q},\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

4) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{p}-\frac{y}{q},\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

5) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{p},\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

6) $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1.$

7) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1.$

8) $\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$

9) $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}+\sqrt[3]{\frac{y}{b}}+\sqrt[3]{\frac{z}{c}}=1,\ x>0,\ y>0,\ z>0.$

**9.20.** 1) $xy=a^2,\ xy=3a^2,\ x=2y,\ x=3y,\ z=x^2+y^2,\ z=0.$

2) $y^2=ax,\ y^2=bx,\ x=py,\ x=qy,\ z=1/xy,\ z=0,\ b>a,\ q>p.$

3) $y^2=2x,\ y^2=3x,\ x^2=y,\ x^2=2y,\ z=xy,\ z=0.$

4) $xy=1,\ xy=4,\ y^2=x,\ y^2=3x,\ z^2=xy,\ z=0.$

5) $x+y+z=a,\ x+y+z=2a,\ x+y=z,\ x+y=2z,$

$$y=x,\ y=3x.$$

6) $z=x^2+y^2$, $\quad z=2(x^2+y^2)$, $\quad xy=a^2$, $\quad xy=2a^2$, $\quad x=2y$,

$$2x=y,\ x>0,\ y>0.$$

7) $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$, $x>0$, $b>a$.

8) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $\quad x=0$, $z=0$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

**9.21.** Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями $a_1x+b_1y+c_1z=\pm d_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=\pm d_2$, $a_3x+b_3y+$ $+c_3z=\pm d_3$, считая, что

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

**9.22.** Найти объем эллипсоида

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1$$

при условии, что $\Delta\neq 0$, где $\Delta$ из задачи **9.21.**

**9.23.** Найти объем части цилиндра

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2\leqslant 1,$$

отсеченной плоскостями $a_3x+b_3y+c_3z=\pm d$, при условии, что $\Delta\neq 0$, где $\Delta$ из задачи **9.21**.

**9.24.** Пусть $V_n$ — объем $n$-мерного шара радиуса $R$.

1) Доказать, что существует такое $c_n>0$, что для любого $R$ объем шара $V_n=c_nR^n$.

2) Доказать, что

$$V_{2k+1}=2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}R^{2k+1},$$

$$V_{2k}=\frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}R^{2k},\quad k\in\mathbb{N}.$$

**9.25.** Найти объем четырехмерного прямого кругового:

1) Цилиндра с радиусом основания $R$ и высотой $H$.

2) Конуса с радиусом основания $R$ и высотой $H$.

---

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана поверхность $S$ как график непрерывно дифференцируемой на замкнутом измеримом множестве $G\subset\mathbb{R}^2$ функции $z=f(x;\ y)$, $(x;\ y)\in G$. Площадь $\sigma$ такой поверхности вычисляют по формуле

$$\sigma=\iint\limits_G\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (9)$$

Если поверхность $S$ задана неявно уравнением $F(x;\ y;\ z) = 0$, где $F$ — непрерывно дифференцируемая функция, и $\frac{\partial F}{\partial z}(x;\ y;\ z) \neq 0$ для любой точки поверхности, и если $S$ взаимно однозначно проектируется на плоскость $Oxy$ в измеримую область $G$, то

$$\sigma = \iint_G \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|^{-1} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dy. \qquad (10)$$

Если поверхность задана параметрически уравнениями

$$x = x(u;\ v), \quad y = y(u;\ v), \quad z = z(u;\ v)$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями на замкнутой измеримой области $D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь поверхности вычисляют по формуле

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \qquad (11)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \qquad (12)$$

(см. § 11, (2)).

---

**9.26.** Пусть $y = y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;\ b]$ функция. Доказать, исходя из формулы (11), что площадь $\sigma$ поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси $Oz$, равна

$$\sigma = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

(см. [2], § 8, (8)).

**9.27.** Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, заключенной внутри конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

**9.28.** Найти площадь поверхности $az = xy$, $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

**9.29.** Найти площадь части цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $y^2 + z^2 = a^2$.

**9.30.** Найти площадь части параболоида $y = x^2 + z^2$, расположенной в I квадранте и внутри цилиндра $x^2 + z^2 = 1$.

**9.31.** Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b \leqslant a$.

**9.32.** Найти площадь части цилиндра $z = x^2$, отсеченной плоскостями $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

**9.33.** Найти площадь части поверхности $z^2 = 2xy$, отсеченной плоскостями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

**9.34.** Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, расположенной вне цилиндров $x^2 + y^2 = \pm ax$.

**9.35.** Найти площадь части цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, расположенной внутри шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$.

**9.36.** Найти площадь части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

**9.37.** Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

**9.38.** Найти площадь части конуса $x^2 = y^2 + z^2$, отсеченной поверхностью $ay = x^2$.

**9.39.** Найти площадь части поверхности $2x = z^2 - y^2$ расположенной внутри цилиндра $y^2 + z^2 = 1$.

**9.40.** Найти площадь части цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, отсеченной плоскостями $x \pm z = 0$ $(x > 0)$.

**9.41.** Найти площадь части поверхности $x^2 + y^2 = 2z$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

**9.42.** Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, заключенной внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

**9.43.** Найти площадь части поверхности $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$, отсеченной цилиндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и расположенной при $z > 0$ $(a > 0,\ b > 0)$.

**9.44.** Найти площадь части поверхности $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$, отсеченной цилиндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$.

**9.45.** Найти площадь поверхности $(x + y)^2 + z = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

**9.46.** Найти площадь поверхности $(x + y)^2 + 2z^2 = 2a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

**9.47.** Найти площадь части сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x + y < a$.

**9.48.** Найти площадь части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, имеющей краем винтовую линию $x = z\cos z$, $y = z\sin z$, $0 \leqslant z \leqslant 2\pi$, и отрезок образующей.

**9.49.** Найти площадь части поверхности $\sin z = \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$, $y > 0$, отсеченной плоскостями $x = 1$ и $x = 2$.

**9.50.** Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ограниченной двумя параллелями $\psi = \psi_1$, $\psi = \psi_2 > \psi_1$ и двумя меридианами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2 > \varphi_1$, где $\varphi$ и $\psi$ — углы сферических координат.

**9.51.** Найти площадь поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$, $0 < a \leqslant b$.

---

**2. Приложения кратных интегралов к геометрии масс *).** Одной из физических характеристик плоской материальной области $\Omega$ (пространственного материального тела $G$) является плотность — неотрицательная функция $\rho(x;\ y)$ (соответственно $\rho(x;\ y;\ z)$), заданная на $\Omega$ (на $G$) и интегрируемая на $\Omega$ (на $G$).

Иногда говорят также о массах, распределенных на $\Omega$ (на $G$) с плотностью $\rho(x;\ y)$ $(\rho(x;\ y;\ z))$.

*Массой* плоской материальной фигуры $\Omega$ с плотностью $\rho(x;y)$ называют величину

$$M=\iint\limits_{\Omega}\rho(x;\ y)\,dx\,dy, \tag{13}$$

*массой* материального тела $G$ с плотностью $\rho(x;y;z)$ — величину

$$M=\iiint\limits_{G}\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz. \tag{14}$$

*Центром масс* тела $G$ (иногда говорят — центром масс, распределенных на $G$) с плотностью $\rho(x;\ y;\ z)$ называют точку $C$ с координатами

$$\begin{aligned} x_C&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{G}x\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz,\\ y_C&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{G}y\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz,\\ z_C&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{G}z\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично определяют центр масс плоской области.

Величины

$$M_{yz}=Mx_C,\quad M_{zx}=My_C,\quad M_{xy}=Mz_C \tag{16}$$

называют *статическими моментами* тела $G$ относительно координатных плоскостей $Oyz$, $Ozx$ и $Oxy$.

Для плоской фигуры аналогично определяют статические моменты относительно осей координат.

*Моментом инерции* тела $G$ относительно оси $l$ называют величину

$$I_l=\iiint\limits_{G}d_l^2\rho\,dx\,dy\,dz, \tag{17}$$

где $d_l=d_l(x;\ y;\ z)$ — расстояние от точки $(x;\ y;\ z)$ тела до оси $l$, $\rho=\rho(x;\ y;\ z)$ — плотность тела. В частности, *момент инерции*

---

*) Большое число задач по этой теме приведено в [2, § 9].

относительно координатной оси $Ox$ вычисляют по формуле

$$I_{xx}=\iiint\limits_{G}(y^2+z^2)\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz. \tag{18}$$

Формулы для $I_{yy}$ и $I_{zz}$ аналогичны (18).

По формуле, аналогичной (17), определяют и *моменты инерции* плоской фигуры, например

$$I_x=\iint\limits_{\Omega}y^2\rho(x;\ y)\,dx\,dy. \tag{19}$$

*Моменты инерции* $I'_{xy}$, $I'_{yz}$, $I'_{zx}$ относительно координатных плоскостей $Oxy$, $Oyz$, $Ozx$ определяют по формулам:

$$\begin{aligned} I'_{xy}&=\iiint\limits_{G}z^2\rho\,dx\,dy\,dz,\\ I'_{yz}&=\iiint\limits_{G}x^2\rho\,dx\,dy\,dz,\\ I'_{zx}&=\iiint\limits_{G}y^2\rho\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{20}$$

*Момент инерции* тела относительно точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (*полярный момент инерции*) определяют по формуле

$$I_{M_0}=\iiint\limits_{G}d^2_{M_0}\rho\,dx\,dy\,dz, \tag{21}$$

где $d_{M_0}$ — расстояние от точки $(x;\ y;\ z)$ тела до точки $M_0$. В частности, если $M_0$ совпадает с началом координат $O$, то

$$I_O=\iiint\limits_{G}(x^2+y^2+z^2)\rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz. \tag{22}$$

---

**9.52.** Пусть $I_O$ и $I_C$ — моменты инерции относительно начала координат $O$ и центра масс $C$ тела, и пусть $d=|CO|$, $d_x=\sqrt{y_C^2+z_C^2}$ — расстояние от $C$ до оси $Ox$, $M$ — масса тела. Доказать, что

1) $I_O=I_C+md^2$;

2) $I_{xx}=I_{x'x'}+md_x^2$,

где $I_{x'x'}$ — момент инерции тела относительно оси $Cx'$, параллельной $Ox$ и проходящей через $C$.

**9.53.** Пусть для тела $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ площадь $S(x)$ его поперечного сечения плоскостью $x=\text{const}$ является непрерывной функцией $x\in[a;\ b]$, и пусть плотность $\rho$ тела зависит только от $x$, $\rho=$

$=\rho(x)$. Доказать, что для массы тела $M$, его статического момента $M_{yz}$ и момента инерции $I'_{yz}$ верны формулы (см. [2], § 9, (24)—(26)):

$$1)\ M=\int_a^b S(x)\rho(x)\,dx.$$

$$2)\ M_{yz}=\int_a^b xS(x)\rho(x)\,dx.$$

$$3)\ I'_{yz}=\int_a^b x^2S(x)\rho(x)\,dx.$$

**9.54.** Пусть тело $\Omega$ получено при вращении вокруг оси $Ox$ фигуры, заданной неравенствами

$$0\leqslant y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции, и пусть плотность тела зависит только от $x$, $\rho=\rho(x)$. Доказать, что (см. [2], § 9, (28)—(29)):

$$1)\ I_{xx}=\frac{\pi}{2}\int_a^b \left(y_2^4(x)-y_1^4(x)\right)\rho(x)\,dx.$$

$$2)\ I_{yy}=\frac{1}{2}I_{xx}+\pi\int_a^b x^2\left(y_2^2(x)-y_1^2(x)\right)\rho(x)\,dx.$$

**9.55.** Пусть основанием прямого цилиндра является область площади $S$, а «крышка» цилиндра плоская. Пусть $H$ — длина лежащего внутри цилиндра отрезка прямой, проходящей через центр масс основания параллельно образующим. Доказать, что объем цилиндра равен $SH$.

**9.56.** Для квадрата $\Omega=[0;\ \pi/2]\times[0;\ \pi/2]$ с плотностью $\rho(x;y)=\rho_0\sin(x+y)$ найти: 1) массу; 2) координаты центра масс; 3) моменты инерции $I_{xx}$ и $I_{yy}$ относительно осей $Ox$ и $Oy$; 4) момент инерции относительно прямой $y=x$.

**9.57.** Для круга $\Omega=\{x^2+y^2\leqslant 2ax\}$ с плотностью $\rho(x;\ y)=\rho_0\sqrt{x^2+y^2}$ найти: 1) массу; 2) координаты центра масс; 3) моменты инерции $I_{xx}$ и $I_{yy}$ относительно осей $Ox$ и $Oy$; 4) момент инерции относительно прямой $x=a$.

**9.58.** Для треугольника

$$\Omega=\{x+y\geqslant a,\ a\geqslant x\geqslant 0,\ a\geqslant y\geqslant 0\}$$

с плотностью $\rho(x;\ y)=x$ найти: 1) массу; 2) координаты центра масс; 3) моменты инерции относительно осей $Ox$ и $Oy$; 4) момент инерции относительно прямой $y=y_C$, где $y_C$ — ордината центра масс.

**9.59.** Пусть начало координат $O$ является центром масс плоской фигуры $\Omega$, прямая $l$ проходит через $O$ и составляет с осью $Ox$ угол $\alpha$. Доказать, что

$$I_l = I_{xx}\cos^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + I_{yy}\sin^2\alpha, \tag{23}$$

где $I_l$ — момент инерции $\Omega$ относительно оси $l$, $I_{xy}$ — центробежный момент инерции:

$$I_{xy} = \iint\limits_{\Omega} xy\rho(x;\ y)\,dx\,dy. \tag{24}$$

**9.60.** Найти координаты центра масс однородной плоской $(\rho = 1)$ фигуры:

1) $y^2/a \leqslant x \leqslant 2a - y, \quad a > 0.$

2) $x^2 + y^2 \leqslant a^2, \quad |y| \leqslant x\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha \in (0;\ \pi/2).$

3) $y \leqslant a^2/x, \quad y^2/(8a) \leqslant x \leqslant 2a, \quad a > 0.$

4) $r \leqslant a(1 + \sin\varphi).$

5) Ограниченной петлей декартова листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

6) Ограниченной аркой циклоиды $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и прямой $y = 2a$.

7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{a}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$

**9.61.** Найти статический момент однородного $(\rho = 1)$ тела $\{3(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant 1 - x^2 - y^2\}$ относительно плоскости $Oxy$.

**9.62.** Найти координаты центра масс однородного $(\rho = 1)$ тела:

1) $0 \leqslant bz \leqslant h(b - y), \quad a^2y \geqslant bx^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad h > 0.$

2) $\frac{1}{4}(y^2 + 2z^2) \leqslant x \leqslant 2.$

**9.63.** Найти координаты центра масс тела с плотностью $\rho$

1) $[0;\ a] \times [0;\ a] \times [0;\ a], \quad \rho = \rho_0(x + y + z)^2.$

2) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, \quad x \geqslant 0, \quad \rho = \rho_0/\sqrt{x^2 + y^2}.$

3) $R^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4R^2,\ y \geqslant 0,\ \rho = \rho_0(z^2 + x^2 + y^2).$

4) $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h, \quad \rho = \rho_0 z^2.$

5) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant h, \quad \rho = \rho_0\sqrt{h - z}.$

6) $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2, \quad z \geqslant 0, \quad \rho = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}.$

7) $x^2 + y^2 - z^2 \leqslant a^2, \quad 0 \leqslant z \leqslant h, \quad \rho = \rho_0 z.$

8) $0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad \rho = \rho_0 z.$

**9.64.** По пространству вне шара $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R^2$ распределена масса с плотностью $\rho = \dfrac{\rho_0}{r^{3+\alpha}}$, где $\alpha > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти эту массу.

**9.65.** По пространству вне эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\geqslant 1$ распределена масса с плотностью

$$\rho=\rho_0\exp\left(-k\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\right),\quad k>0.$$

Найти эту массу.

**9.66.** Найти момент инерции относительно координатных осей и относительно начала координат однородной ($\rho=1$) плоской фигуры:

1) $x^2+y^2\leqslant a^2,\quad |y|\leqslant x\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\in(0;\ \pi/2)$.

2) $(x-a)^2+(y-a)^2\geqslant a^2,\quad a\geqslant x\geqslant 0,\quad a\geqslant y\geqslant 0$.

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{c}\leqslant 1,\quad \frac{x}{b}+\frac{y}{c}\geqslant 1,\quad y\geqslant 0,\quad a>b>0,\quad c>0$.

4) $r\leqslant a\sin 2\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.

5) $r\leqslant a(1-\sin\varphi)$.

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

7) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

8) $xy=a^2,\quad xy=2a^2,\quad x=2y,\quad y=2x\quad (x>0,\ y>0)$.

**9.67.** Найти полярный момент инерции относительно начала координат однородной ($\rho=1$) плоской фигуры:

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqslant 1,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad a>0,\quad b>0$.

2) $a^2\geqslant y^2\geqslant ax\geqslant 0,\quad a>0$.

3) $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

**9.68.** Найти момент инерции плоского однородного ($\rho=1$) правильного треугольника со стороной $a$ относительно оси,

1) содержащей его высоту;

2) проходящей через центр масс треугольника и составляющей с его высотой угол $\alpha$.

**9.69.** По шару радиуса $R$ распределена масса $M$ с плотностью $\rho$. Найти момент инерции шара относительно его диаметра, если:

1) Плотность $\rho$ в точке пропорциональна расстоянию между этой точкой и центром шара.

2) Плотность $\rho$ в точке обратно пропорциональна расстоянию между этой точкой и центром шара.

**9.70.** Найти моменты инерции относительно координатных осей однородных ($\rho=1$) тел:

1) $[0;\ a]\times[0;\ b]\times[0;\ c]$.

2) $x^2+y^2\leqslant R^2,\quad 0\leqslant z\leqslant H$.

3) $0\leqslant Rz\leqslant H\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

4) $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\quad z\geqslant 0$.

**9.71.** Найти полярный момент инерции шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ с плотностью $\rho=\rho_0(x^2+y^2+z^2)$ относительно его центра.

**9.72.** Найти момент инерции относительно плоскости $Oxy$ однородного ($\rho=1$) тела $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

**9.73.** Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородных ($\rho=1$) тел:

1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ $z \geqslant 0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

3) $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \leqslant \frac{z}{c} \leqslant 1$.

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{x}{a}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

5) $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \leqslant \frac{z}{c} \leqslant \frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

**9.74.** Найти момент инерции относительно оси $Oz$ однородных ($\rho=1$) тел:

1) $2ax \geqslant z^2$, $x^2+y^2 \leqslant ax$.

2) $x^2+y^2 \leqslant a^2$, $x+y+z \leqslant a\sqrt{2}$, $z \geqslant 0$.

3) $0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2$, $|x+y| \leqslant 1$, $|x-y| \leqslant 1$.

4) $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2$, $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$.

5) $(x^2+y^2+z^2)^2 \leqslant a^3 z$.

6) $(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}+(z/c)^{2/3} \leqslant 1$.

7) $\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \leqslant \frac{x}{a} \leqslant 1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

**9.75.** Найти момент инерции тора $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$, $z=a\sin\psi$, $0<a<b$, относительно 1) оси $Oz$; 2) оси $Ox$.

**9.76.** Найти момент инерции однородного ($\rho=1$) цилиндра $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $|z| \leqslant H$ относительно прямой $x=y=z$.

**9.77.** Пусть начало координат $O$ совпадает с центром масс тела $G$, ось $l$ проходит через точку $O$ и составляет с осями координат углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Доказать, что момент инерции $I_l$ тела относительно оси $l$ равен

$$I_l = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - \\ - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha, \quad (25)$$

где

$$I_{xy}=\iiint_G xy\rho\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_{yz}=\iiint_G yz\rho\,dx\,dy\,dz, \qquad (26)$$

$$I_{zx}=\iiint_G zx\rho\,dx\,dy\,dz$$

— центробежные моменты инерции тела.

---

**3. Некоторые приложения к физике.** Пусть на плоской области $\Omega$ задана функция $\mu(\xi;\ \eta)$.

*Логарифмическим потенциалом* в точке $M(x;\ y)$ называют интеграл

$$u(x;\ y)=\frac{1}{2\pi}\iint_\Omega \mu(\xi;\ \eta)\ln r\,d\xi\,d\eta, \qquad (27)$$

где $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. Функцию $\mu$ называют *плотностью* (например, плотность масс, электрического заряда).

Пусть на пространственной области $G$ задана функция $\rho(\xi;\ \eta;\ \zeta)$. *Ньютоновым потенциалом* в точке $M(x;\ y;\ z)$ называют интеграл

$$u(x;\ y;\ z)=k\iiint_G \frac{\rho(\xi;\ \eta;\ \zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (28)$$

где $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $k=\mathrm{const}$ (далее $k=1$). Функцию $\rho$ называют *плотностью* (например, плотность масс, электрического заряда). Если $\rho$ — плотность масс, то ньютонов потенциал — это потенциал гравитационного поля материального тела $G$. Если ньютонов потенциал $u(x;\ y;\ z)$ определен в области $\Omega$, то говорят также, что в $\Omega$ задано поле с ньютоновым потенциалом $u(x;\ y;\ z)$. *Напряженностью* этого поля в точке $M(x;\ y;\ z)$ называют вектор

$$\boldsymbol{E}(x;\ y;\ z)=k\iiint_G \frac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|^3}\,\rho(\xi;\ \eta;\ \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (29)$$

здесь $N=N(\xi;\ \eta;\ \zeta)$, $\overline{MN}=(\xi-x;\ \eta-y;\ \zeta-z)$, $|\overline{MN}|=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$. Для нахождения составляющих вектора $\boldsymbol{E}$ следует брать соответствующие составляющие вектора $\overline{MN}$ под интегралом.

Пусть потенциал определен плотностью $\rho(\xi;\ \eta;\ \zeta)$, заданной на области $G$, и пусть в поле с этим потенциалом находится область $G_1$ с заданной на ней плотностью $\rho_1(\xi_1; \eta_1; \zeta_1)$. *Силой, действующей на* $G_1$, называют вектор

$$\boldsymbol{F}=\iiint\limits_{G_1}\boldsymbol{E}(\xi_1;\ \eta_1;\ \zeta_1)\,\rho_1(\xi_1;\ \eta_1;\ \zeta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1, \tag{30}$$

здесь, как и выше, следует одновременно брать в левой и правой частях одноименные компоненты векторов. Стягивая область $G_1$ к ее внутренней точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и изменяя при этом плотность $\rho_1(\xi_1;\ \eta_1;\ \zeta_1)$ так, чтобы интеграл

$$\alpha=\iiint\limits_{G_1}\rho_1(\xi_1;\ \eta_1;\ \zeta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1$$

имел постоянное значение, приходим к обобщенным понятиям типа материальной точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с массой $m=\alpha$ или точечного заряда величины $q=\alpha$ и т. д. В этих случаях формула (30) для силы упрощается; например, в гравитационном или электростатическом поле соответственно имеем

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{E}(x_0;\ y_0;\ z_0),\quad \boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}(x_0;\ y_0;\ z_0). \tag{31}$$

Пример 1. Доказать, что логарифмический потенциал постоянен в полости кругового кольца, если его плотность равна $\mu(r)$, где $r$ — расстояние до центра кольца.

△ Пусть $R_1$ и $R_2$ — внутренний и внешний радиусы кольца, пусть точка $M$ расположена в полости кольца на расстоянии $\rho$ от его центра, $0\leqslant\rho<R_1$. За начало координат возьмем центр кольца, ось $Ox$ направим через точку $M$, тогда ее координаты будут $M(\rho;\ 0)$. Пусть $(\xi;\ \eta)$ — точка кольца. Имеем

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\mu(r)\ln\sqrt{(\xi-\rho)^2+\eta^2}\,d\xi\,d\eta,$$

где $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $\Omega=\left\{R_1^2\leqslant\xi^2+\eta^2\leqslant R_2^2\right\}$. В полярных координатах

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{R_1}^{R_2}\mu(r)\,r\,dr\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\varphi}\,d\varphi.$$

Внутренний интеграл, обозначив его $I$, преобразуем к виду

$$I=\int\limits_{0}^{\pi}\ln(r^2+\rho^2-2\rho r\cos\varphi)\,d\varphi=2\pi\ln r+\int\limits_{0}^{\pi}\ln(a^2+1-2a\cos\varphi)\,d\varphi,$$

где $a=\rho/r$, $0\leqslant a<1$. Согласно результатам примера 8 из § 8, последний интеграл равен нулю, поэтому $I=2\pi\ln r$ и

$$u(M)=\int\limits_{R_1}^{R_2}\mu(r)\,r\ln r\,dr,$$

т. е. $u(M)$ не зависит от выбора точки $M$ в полости кольца. ▲

Пример 2. Гравитационное поле создано полым шаром $G$ с внутренним и внешним радиусами $R_1$ и $R_2$, имеющим плотность $\rho(N)=\rho_0/r$, где $r$ — расстояние от центра шара до точки $N$, $\rho_0=\text{const}$. Найти силу, действующую на материальную точку $M$ массы $m$, удаленную на расстояние $R$ от центра шара, $R>R_2$.

△ Начало системы координат поместим в центр шара, ось $Oz$ направим через данную точку $M$. Тогда эта точка имеет координаты $M(0;\ 0;\ R)$, шар $G$ задается неравенствами

$$R_1\leqslant\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\leqslant R_2,$$

его плотность равна $\rho=\rho_0/r$, где $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Пусть $N(\xi;\ \eta;\ \zeta)$ — точка шара, тогда

$$\overline{MN}=(\xi;\ \eta;\ \zeta-R),\quad |\overline{MN}|^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+R^2-2\zeta R=r^2+R^2-2\zeta R,$$

составляющие вектора силы в соответствии с (31), (29) находим по формулам

$$F_x=km\rho_0\iiint\limits_G\frac{\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r\,(r^2+R^2-2\zeta R)^{3/2}},$$

$$F_y=km\rho_0\iiint\limits_G\frac{\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r\,(r^2+R^2-2\zeta R)^{3/2}},$$

$$F_z=km\rho_0\iiint\limits_G\frac{(\zeta-R)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r\,(r^2+R^2-2\zeta R)^{3/2}}.$$

Ясно, что первый и второй интегралы равны нулю, т. е. $F_x=F_y=0$. После перехода к сферическим координатам получим

$$F_z=km\rho_0\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{(r\sin\theta-R)\,r\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{(r^2+R^2-2rR\sin\theta)^{3/2}}=$$

$$=2\pi km\rho_0\int_{R_1}^{R_2}r\,dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(r\sin\theta-R)\cos\theta\,d\theta}{(r^2+R^2-2rR\sin\theta)^{3/2}}.$$

Совершив во внутреннем интеграле замену $r^2+R^2-2rR\sin\theta=t$, найдем

$$F_z=\frac{\pi km\rho_0}{2R^2}\int_{R_1}^{R_2}dr\int_{(R-r)^2}^{(R+r)^2}\left((r^2-R^2)\,t^{-3/2}-t^{-1/2}\right)dt=-\frac{2\pi km\rho_0}{R^2}\left(R_2^2-R_1^2\right).$$

Итак, сила направлена от точки к центру шара и имеет величину $2\pi km\rho_0\left(R_2^2-R_1^2\right)/R^2$. ▲

**9.78.** Найти логарифмический потенциал, если $\Omega = \{x^2+y^2 \leqslant a^2\}$, и

1) $\mu = \mathrm{const}$;

2) $\mu(x;\ y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$.

**9.79.** Найти ньютонов потенциал в точке $M_0$, создаваемый шаром плотности $\rho_0$ *) и радиуса $R$.

**9.80.** Найти ньютонов потенциал в точке $M_0$, создаваемый полым шаром с плотностью $\rho_0$, если его внутренний и внешний радиусы равны $R_1$ и $R_2$, $R_1 < R_2$.

**9.81.** Найти ньютонов потенциал, создаваемый шаром $x^2+y^2+z^2=R^2$ с плотностью $\rho(x;\ y;\ z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**9.82.** Найти ньютонов потенциал в центре основания цилиндра с радиусом $R$, высотой $H$ и плотностью $\rho_0$.

**9.83.** Материальный конус с образующей $l$ и высотой $h$ имеет плотность $\rho_0$. Найти потенциал гравитационного поля конуса: 1) в его вершине; 2) в центре его основания.

**9.84.** Найти в точке $(0;\ 0;\ h)$ ньютонов потенциал полушара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$ с плотностью $\rho_0$.

**9.85.** Найти в точке $(0;\ 0;\ h)$ ньютонов потенциал цилиндра $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ с плотностью $\rho_0$.

**9.86.** Найти ньютонов потенциал эллипсоида $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ с плотностью $\rho_0$ в его центре.

**9.87.** Найти силу притяжения материальной точки $M_0$ массы $m$ шаром радиуса $R$ с плотностью $\rho_0$.

**9.88.** Из материального шара радиуса $R$ и плотности $\rho_0$ вырезан шаровой сектор с углом в осевом сечении $2\alpha$. Найти силу, с которой этот сектор притягивает точку массы $m$, расположенную в его вершине.

**9.89.** Для материального шара с плотностью $\rho = f(r)$ доказать, что:

1) Точка вне шара притягивается шаром с такой же силой, как и точечной массой, равной массе шара и помещенной в его центре.

2) На точку внутри шара наружный шаровой слой не оказывает никакого действия.

3) Потенциал в точке вне шара таков же, как и от точечной массы, равной массе шара и помещенной в его центр.

4) Если шар полый, то потенциал шара в полости постоянен.

**9.90.** Найти силу, с которой цилиндр с плотностью $\rho_0$, высотой $H$ и радиусом $R$ притягивает точку массы $m$, расположенную в центре основания цилиндра.

**9.91.** Найти силу, с которой конус с плотностью $\rho_0$, высотой $H$ и радиусом основания $R$ притягивает точку массы $m$, расположенную в вершине конуса.

---

*) Всюду в задачах этого пункта $\rho_0 = \mathrm{const}$.

**9.92.** Найти силу притяжения материальной точки массы $m$ с координатами $(0;\ 0;\ h)$ материальным кругом $\{x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z=0\}$, по которому равномерно распределена масса с поверхностной плотностью $\rho_0$.

**9.93.** Найти силу притяжения материальной точки массы $m$ с координатами $(0;\ 0;\ h)$ материальной плоскостью, по которой равномерно распределена масса с поверхностной плотностью $\rho_0$.

**9.94.** Расстояние между центрами двух шаров равно $a$, масса одного шара равна $M_1$, другого — $M_2$, плотность каждого шара постоянна. Исходя из формул (30), (29), доказать, что сила притяжения одного шара другим равна силе притяжения между двумя материальными точками, помещенными в центры шаров и имеющим массы $M_1$ и $M_2$ соответственно. Найти эту силу.

**9.95.** Считая Землю жидким шаром со средней плотностью $\rho_0$ и радиусом $R$, найти давление в нем как функцию расстояния $r$ до центра.

**9.96.** Тонкая пластинка имеет форму кругового кольца с центром в точке $O(0;\ 0)$, радиусами $R_1$ и $R_2$, $R_1 < R_2$. Удельная теплоемкость пластинки равна $c=|xy|$, плотность $\rho_0$ постоянна. Найти количество тепла, полученного пластинкой при ее нагревании от температуры $T_1$ до температуры $T_2$.

**9.97.** На тонкой пластинке, имеющей форму параболического сегмента с основанием $2a$ и высотой $h$, распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 2x+y$. Найти полный заряд пластинки.

**9.98.** Горизонтальный уровень жидкости совпадает с плоскостью $Oyz$, ось $Ox$ направлена вниз, в глубь жидкости. Плотность жидкости $\rho_0$. Показать, что сила давления жидкости на вертикальную пластину $\Omega$, расположенную в плоскости $Oxy$, равна

$$\rho_0 \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy,$$

а ее точка приложения находится на глубине $h$, определяемой из формулы

$$h \iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} x^2\,dx\,dy. \tag{32}$$

**9.99.** Показать, что кинетическая энергия твердого тела $G$, вращающегося вокруг оси $Oz$ с постоянной угловой скоростью $\omega$, равна

$$W_k = \frac{1}{2} I_{zz}\omega^2, \tag{33}$$

где $I_{zz}$ — осевой момент инерции тела.

**9.100.** Пусть тело $G$ вращается вокруг оси $Oz$ с постоянной угловой скоростью $\omega$. *Главный вектор* сил инерции (центробежных сил) $\boldsymbol{F} = (F_x;\ F_y;\ F_z)$ определяют по формулам

$$F_x = \omega^2 \int\limits_G x\rho\, dV = \omega^2 M_{yz}, \quad F_y = \omega^2 M_{zx}, \quad F_z = 0. \tag{34}$$

*Главный момент* $\boldsymbol{M} = (M_x;\ M_y;\ M_z)$ этих сил — по формулам

$$M_x = \omega^2 \int\limits_G yz\rho\, dV = \omega^2 I_{yz}, \quad M_y = \omega^2 I_{zx}, \quad M_z = 0. \tag{35}$$

Материальная пластина закреплена на оси $l$ и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью $\omega$. Как следует расположить ось $l$, чтобы силы инерции (центробежные силы) не оказывали на нее никакого действия.

**9.101.** Пусть $G$ — тонкая однородная треугольная пластина массы $M$ с катетами $a$ и $b$, вращающаяся вокруг оси $Oz$, содержащей катет $b$. В какой точке следует поместить точечную массу и какой величины, чтобы, присоединив ее к пластинке, устранить реакции в точках закрепления оси вращения.

---

## § 10. Криволинейные интегралы

**1. Криволинейные интегралы первого рода.** Пусть спрямляемая кривая $\Gamma$ задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S, \tag{1}$$

где $s$ — переменная длина дуги этой кривой. Тогда, если на кривой $\Gamma$ определена функция $F$, то число

$$\int\limits_0^S F(\boldsymbol{r}(s))\, ds$$

называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции $F$ по кривой $\Gamma$ и обозначают

$$\int\limits_\Gamma F(x;\ y;\ z)\, ds \quad \text{или, короче,} \quad \int\limits_\Gamma F\, ds.$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_\Gamma F(x;\ y;\ z)\, ds = \int\limits_0^S F(x(s);\ y(s);\ z(s))\, ds. \tag{2}$$

Интеграл (2) существует, если функция $F$ непрерывна на кривой $\Gamma$.

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

2) Если кривая Г есть объединение конечного числа кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, а функция $F$ непрерывна на Г, то

$$\int_{\Gamma} F(x;\ y;\ z)\, ds = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F(x;\ y;\ z)\, ds. \qquad (3)$$

3) Если гладкая кривая Г задана уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \qquad (4)$$

а функция $F$ непрерывна на кривой Г, то

$$\int_{\Gamma} F(x;\ y;\ z)\, ds =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t);\ y(t);\ z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \qquad (5)$$

Если Г — гладкая плоская кривая, заданная уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (6)$$

то

$$\int_{\Gamma} F(x;\ y)\, ds = \int_{a}^{b} F(x;\ f(x)) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (7)$$

Аналогично, если гладкая плоская кривая Г задана уравнением $x = \varphi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, то

$$\int_{\Gamma} F(x;\ y)\, ds = \int_{c}^{d} F(\varphi(y);\ y) \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\, dy. \qquad (8)$$

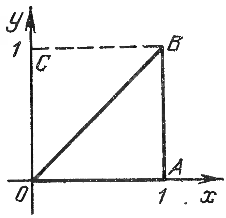


Рис. 31

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{\Gamma} (x + y)\, ds,$$

где Г — граница треугольника (рис. 31) с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$.

$\triangle$ Пусть $I_1$, $I_2$, $I_3$ — криволинейные интегралы от функции $x + y$ по отрезкам $AB$, $BO$ и $OA$ соответственно. Так как отрезок $AB$ задается уравнением $x = 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то по формуле (8) получаем

$$I_1 = \int_{0}^{1} (y + 1)\, dy = 3/2.$$

Отрезки $BO$ и $OA$ задаются соответственно уравнениями $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. По формуле (7) находим

$$I_2 = \int_0^1 2x\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2},$$

$$I_3 = \int_0^1 x\,dx = 1/2.$$

Следовательно, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 2 + \sqrt{2}$. ▲

**2. Криволинейные интегралы второго рода.** Пусть гладкая кривая Г задана уравнением (1). Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma) \tag{9}$$

— единичный вектор касательной к этой кривой. Здесь $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — углы, образованные касательной с координатными осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно.

Пусть на кривой Г определена вектор-функция $\boldsymbol{F} = (P;\ Q;\ R)$ такая, что для скалярной функции

$$F_\tau = (\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + P\cos\gamma$$

существует $\int\limits_\Gamma F_\tau\,ds$. Тогда число

$$\int_\Gamma F_\tau\,ds = \int_\Gamma (\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{\tau})\,ds \tag{10}$$

называют *криволинейным интегралом второго рода* от функции $\boldsymbol{F}$ по кривой Г и обозначают

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Таким образом, по определению

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_0^S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds, \tag{11}$$

где $(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ — единичный вектор касательной к кривой Г.

Формулу (11) можно записать в векторной форме:

$$\int_\Gamma (\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}) = \int_0^S (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s)),\ \boldsymbol{\tau}(s))\,ds, \tag{12}$$

где $d\boldsymbol{r} = (dx;\ dy;\ dz)$.

Если $Q = R = 0$, то формулу (11) записывают в виде

$$\int_\Gamma P\,dx = \int_0^S P(x(s);\ y(s);\ z(s))\cos\alpha(s)\,ds. \tag{13}$$

Аналогично

$$\int\limits_{\Gamma} Q\,dy = \int\limits_{0}^{S} Q\cos\beta\,ds, \quad \int\limits_{\Gamma} R\,dz = \int\limits_{0}^{S} R\cos\gamma\,ds. \tag{14}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) При изменении ориентации кривой на противоположную криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

2) Если гладкая кривая Г задана уравнением (4), а вектор-функция $\boldsymbol{F} = (P;\ Q;\ R)$ непрерывна на Г, то

$$\int\limits_{\Gamma} (\boldsymbol{F},\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{r}'(t))\,dt \tag{15}$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t);\ y(t);\ z(t))\,x'(t) +$$

$$+ Q(x(t);\ y(t);\ z(t))\,y'(t) + R(x(t);\ y(t);\ z(t))\,z'(t)]\,dt. \tag{16}$$

В случае, когда Г — плоская гладкая кривая, заданная уравнением (6), из формулы (16) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} P(x;\ y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(x;\ f(x))\,dx, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x;\ y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} Q(x;\ f(x))\,f'(x)\,dx. \tag{18}$$

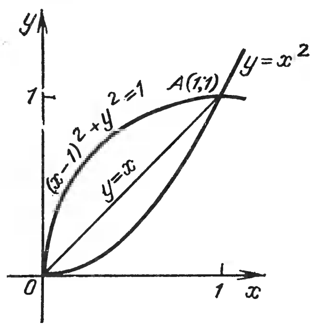

Рис. 32

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} y\,dx + x\,dy$$

по кривой Г с началом $O(0;\ 0)$ и концом $A(1;\ 1)$, если (рис. 32): 1) Г — отрезок $OA$; 2) Г — дуга параболы $y = x^2$; 3) Г — дуга окружности радиуса 1 с центром в точке $(1;\ 0)$.

△ 1) Так как отрезок $OA$ задается уравнением $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то, применяя формулы (17) и (18), находим

$$I = \int\limits_{0}^{1} x\,dx + \int\limits_{0}^{1} x\,dx = 1.$$

2) Если Г — дуга параболы, то

$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx = \int\limits_{0}^{1} x^2\,dx, \quad \int\limits_{\Gamma} x\,dy = \int\limits_{0}^{1} 2x^2\,dx, \quad I = \int\limits_{0}^{1} 3x^2\,dx = 1.$$

3) Так как уравнение дуги окружности можно записать в виде

$$x = 1 + \cos t, \quad y = \sin t,$$

где $t$ меняется от $\pi$ до $\pi/2$, то по формуле (16) получаем

$$I = \int_{\pi}^{\pi/2} \sin t(-\sin t)\,dt + \int_{\pi}^{\pi/2} (1 + \cos t)\cos t\,dt =$$

$$= \int_{\pi}^{\pi/2} (\cos t + \cos 2t)\,dt = 1. \ \blacktriangle$$

**3. Формула Грина.** Пусть граница $\Gamma$ плоской ограниченной области $G$ состоит из конечного набора кусочно-гладких кривых. Тогда, если функции $P$, $Q$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\bar{G}$, то справедлива *формула Грина*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy, \tag{19}$$

где контур $\Gamma$ ориентирован так, что при его обходе область $G$ остается слева.

Пример 3. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл

$$I = \int_\Gamma x^2 y\,dx - xy^2\,dy,$$

где $\Gamma$ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

$\triangle$ Воспользуемся формулой (19), где

$$P = x^2 y, \quad Q = -xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2.$$

Следовательно,

$$I = -\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

где $D$ — круг радиуса $R$ с центром в точке (0; 0). Переходя к полярным координатам, получаем

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\,dr = -\pi R^4/2. \ \blacktriangle$$

Из формулы (19) при $Q = x$, $P = -y$ получаем

$$S = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx, \tag{20}$$

где $S=\iint\limits_G dx\,dy$ — площадь области $G$, ограниченной контуром $\Gamma$ (при обходе контура $\Gamma$ область $G$ остается слева).

Пример 4. Пользуясь формулой (20), найти площадь $S$, ограниченную астроидой

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

$\triangle$ Применяя формулы (20) и (16), получаем

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t))\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

**4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.** Если функции $P(x;\,y)$ и $Q(x;\,y)$ непрерывны в плоской области $G$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\,dx+Q\,dy \tag{21}$$

не зависит от пути интегрирования $\Gamma_{AB}$ (кривая $\Gamma_{AB}$ лежит в области $G$, $A$ — ее начало, $B$ — конец) тогда и только тогда, когда выражение $Pdx+Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x;\,y)$, т. е. в области $G$ выполняется условие

$$du=P\,dx+Q\,dy\quad\text{или}\quad \frac{\partial u}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q. \tag{22}$$

При этом

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\,dx+Q\,dy=u(B)-u(A). \tag{23}$$

Здесь

$$u(x;\,y)=\int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx+Q\,dy, \tag{24}$$

где $\Gamma_{M_0M}$ — некоторая кривая с началом в фиксированной точке $M_0(x_0;\,y_0)$ и концом в точке $M(x;\,y)$, лежащая в области $G$.

Пусть функции $P$, $Q$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в плоской области $G$. Тогда для того чтобы криволинейный интеграл (21) не зависел от пути интегрирования, необходимо, а в случае, когда

$G$ — односвязная область, то и достаточно, чтобы в области $G$ выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25}$$

Пример 5. Показать, что криволинейный интеграл

$$I=\int\limits_{AB}(3x^2y+y)\,dx+(x^3+x)\,dy,$$

где $A(1;\ -2)$, $B(2;\ 3)$, не зависит от пути интегрирования, и вычислить этот интеграл.

△ Так как функции $P=3x^2y+y$, $Q=x^3+x$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ и $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны в $\mathbb{R}^2$ и выполняется условие (25), то интеграл не зависит от пути интегрирования и выражается формулой (23).

Функцию $u(x;\ y)$ можно найти по формуле (24). Заметим, однако, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, так как

$$(3x^2y+y)\,dx+(x^3+x)\,dy=(3x^2y\,dx+x^3\,dy)+(y\,dx+x\,dy)=$$
$$=d\,(x^3y)+d\,(xy)=d\,(x^3y+xy)=du.$$

Следовательно, $u=x^3y+xy$, и по формуле (23) находим

$$I=u(B)-u(A)=30-(-4)=34. \ \blacktriangle$$

---

**10.1.** Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Г:

1) $\int\limits_{\Gamma}x\,ds$, Г — отрезок с концами $(0;\ 0)$ и $(1;\ 2)$.

2) $\int\limits_{\Gamma}(2x+y)\,ds$, Г — ломаная $ABOA$, где $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $O(0;\ 0)$.

3) $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,ds$, Г — граница треугольника с вершинами $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$ и $(0;\ 1)$.

4) $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{y-x}$, Г — отрезок с концами $(0;\ -2)$ и $(4;\ 0)$.

5) $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, Г — отрезок с концами $(0;\ 0)$ и $(1;\ 2)$.

**10.2.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, если:

1) Г — граница квадрата с вершинами $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$.

2) Г — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте.

3) Г — граница прямоугольника с вершинами $(0;\ 0)$, $(4;\ 0)$, $(4;\ 2)$, $(0;\ 2)$.

**10.3.** Пусть Г — гладкая кривая, заданная в полярных координатах $(r;\ \varphi)$ уравнением $r=\rho(\varphi)$, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, а функция $F(x;\ y)$ непрерывна на Г. Доказать, что

$$\int\limits_{\Gamma} F(x;\ y)\,ds=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho(\varphi)\cos\varphi;\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \quad (26)$$

Вычислить криволинейный интеграл по плоской кривой Г **(10.4—10.11)**:

**10.4.** $\int\limits_{\Gamma} x^2\,ds$, Г — дуга окружности $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$.

**10.5.** $\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)^n\,ds$, Г — окружность $x^2+y^2=a^2$.

**10.6.** $\int\limits_{\Gamma} f(x,\ y)\,ds$, Г — окружность $x^2+y^2=ax$, если:

1) $f(x;\ y)=x-y$. 2) $f(x;\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

**10.7.** $\int\limits_{\Gamma} f(x;\ y)\,ds$, Г — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=a^2\cos 2\varphi$, если:

1) $f(x;\ y)=x+y$. 2) $f(x;\ y)=x\sqrt{x^2-y^2}$.

**10.8.** $\int\limits_{\Gamma} |y|\,ds$, Г — лемниската $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

**10.9.** $\int\limits_{\Gamma} (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, Г — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

**10.10.** $\int\limits_{\Gamma} f(x;\ y)\,ds$, Г — арка циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;\ y)=y$. 2) $f(x;\ y)=y^2$.

**10.11.** $\int\limits_{\Gamma} f(x;\ y)\,ds$, Г — дуга развертки окружности

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;\ y)=x^2+y^2$. 2) $f(x;\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Вычислить криволинейный интеграл по пространственной кривой Г (**10.12—10.18**):

**10.12.** $\int\limits_\Gamma f(x;\ y;\ z)\,ds$, Г — первый виток винтовой линии

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,$$

если:

1) $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{z^2}{x^2+y^2}$.

2) $f(x;\ y;\ z)=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

3) $f(x;\ y;\ z)=x^2+y^2+z^2$.

**10.13.** $\int\limits_\Gamma f(x;\ y;\ z)\,ds$, Г — дуга конической винтовой линии

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;\ y;\ z)=z$. 2) $f(x;\ y;\ z)=\sqrt{x^2+y^2}+z$.

**10.14.** $\int\limits_\Gamma \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, Г — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

**10.15.** $\int\limits_\Gamma xyz\,ds$, Г — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$, расположенная в первом октанте.

**10.16.** $\int\limits_\Gamma (x+y)\,ds$, Г — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x$, расположенная в первом октанте.

**10.17.** $\int\limits_\Gamma x^2\,ds$, Г — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

**10.18.** $\int\limits_\Gamma z\,ds$, Г — дуга кривой $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ от точки $(0;\ 0;\ 0)$ до точки $(a;\ a;\ a\sqrt{2})$, $a>0$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по кривой Г, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра $x$ (**10.19—10.20**):

**10.19.** 1) $\int\limits_\Gamma xy\,dx$, Г — дуга синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$.

2) $\int\limits_\Gamma \left(x-\dfrac{1}{y}\right)dy$, Г — дуга параболы $y=x^2$, $1\leqslant x\leqslant 2$.

3) $\int\limits_\Gamma x\,dy-y\,dx$, Г — кривая $y=x^3$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

4) $\int\limits_\Gamma \dfrac{y}{x}\,dx+dy$, Г — кривая $y=\ln x$, $1\leqslant x\leqslant e$.

5) $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx + x^2\,dy$, $\Gamma$ — дуга параболы $y = x^2/4$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

6) $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx - x^2\,dy$, $\Gamma$ — дуга параболы $y = \sqrt{x/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

**10.20.** 1) $\int\limits_{\Gamma} \cos y\,dx - \sin y\,dy$, $\Gamma$ — отрезок прямой $y = -x$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

2) $\int\limits_{\Gamma} (xy - y^2)\,dx + x\,dy$, $\Gamma$ — кривая $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$, $\Gamma$ — дуга параболы $y = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

4) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, $\Gamma$ — кривая $y = 1 - |x - 1|$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Вычислить криволинейный интеграл по кривой $\Gamma$, пробегаемой от точки $A$ к точке $B$ (**10.21—10.25**):

**10.21.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dy - y\,dx$, $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 2)$, если: 1) $\Gamma$ — отрезок $AB$; 2) $\Gamma$ — дуга параболы $y = 2x^2$; 3) $\Gamma$ — ломаная $ACB$, где $C(0;\ 1)$.

**10.22.** $\int\limits_{\Gamma} xy\,dx - y^2\,dy$, $\Gamma$ — дуга параболы $y^2 = 2x$, $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 2)$.

**10.23.** $\int\limits_{\Gamma} \frac{3x}{y}\,dx - \frac{2y^3}{x}\,dy$, $\Gamma$ — дуга параболы $x = y^2$, $A(4;\ 2)$, $B(1;\ 1)$.

**10.24.** $\int\limits_{\Gamma} \frac{x}{y}\,dx - \frac{y - x}{x}\,dy$, $\Gamma$ — дуга параболы $y = x^2$, $A(2;\ 4)$, $B(1;\ 1)$.

**10.25.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dy$, $\Gamma$ — полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $A(0;\ -a)$, $B(0;\ a)$.

**10.26.** Вычислить криволинейный интеграл по отрезку $AB$, ориентированному в направлении от точки $A$ к точке $B$:

1) $\int\limits_{\Gamma} x^3\,dy - xy\,dx$, $A(0;\ -2)$, $B(1;\ 3)$.

2) $\int\limits_{\Gamma} -3x^2\,dx + y^3\,dy$, $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 4)$.

3) $\int\limits_{\Gamma}(2x-y)\,dx+(4x+5y)\,dy$, $A(3;\ -4)$, $B(1;\ 2)$.

4) $\int\limits_{\Gamma}(4x+5y)\,dx+(2x-y)\,dy$, $A(1;\ -9)$, $B(4;\ -3)$.

5) $\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{x}{x^2+y^2}+y\right)dx+\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)dy$, $A(1;\ 0)$, $B(3;\ 4)$.

6) $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, $A(0;\ 1)$, $B(2;\ 3)$.

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Г, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра $t$ (**10.27—10.28**):

**10.27.** 1) $\int\limits_{\Gamma}xy^2\,dx$, Г — дуга окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

2) $\int\limits_{\Gamma}x\,dy+y\,dx$, Г — дуга окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

3) $\int\limits_{\Gamma}y\,dx-x\,dy$, Г — эллипс $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

4) $\int\limits_{\Gamma}y^2\,dx+x^2\,dy$, Г — верхняя половина эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

**10.28.** 1) $\int\limits_{\Gamma}(2a-y)\,dx+(y-a)\,dy$, Г — дуга циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

2) $\int\limits_{\Gamma}\frac{x^2\,dy-y^2\,dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, Г — дуга астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Г, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (**10.29—10.30**):

**10.29.** 1) $\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\,dx$, Г — граница прямоугольника, образованного прямыми $x=1$, $x=3$, $y=1$, $y=5$.

2) $\int\limits_{\Gamma}(x^2-2xy)\,dx+(x-2y)^2\,dy$, Г — граница прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

3) $\int\limits_{\Gamma}(3x^2-y)\,dx+(1-2x)\,dy$, Г — граница треугольника с вершинами $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(1;\ 1)$.

4) $\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, $\Gamma$ — граница треугольника с вершинами $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$.

**10.30.** 1) $\int\limits_{\Gamma} 2(x^2+y^2)\,dx+(x+y)^2\,dy$, $\Gamma$ — граница треугольника с вершинами $(1;\ 1)$, $(1;3)$, $(2;\ 2)$.

2) $\int\limits_{\Gamma} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, $\Gamma$ — граница квадрата с вершинами $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$.

3) $\int\limits_{\Gamma} \frac{(x+y)\,dx+(y-x)\,dy}{x^2+y^2}$, $\Gamma$ — окружность $x^2+y^2=R^2$.

4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{xy^2\,dx-x^2y\,dy}{x^2+y^2}$, $\Gamma$ — правый лепесток лемнискаты $r^2=$ $=a^2\cos 2\varphi$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой $\Gamma$, пробегаемой в направлении возрастания параметра $t$ (**10.31—10.36**):

**10.31.** $\int\limits_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz$, $\Gamma$ — виток винтовой линии $x=$ $=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**10.32.** $\int\limits_{\Gamma} (y^2-z^2)\,dx+2yz\,dy-x^2\,dz$, $\Gamma$ — кривая $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

**10.33.** $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx+z\sqrt{a^2-y^2}\,dy+xy\,dz$, $\Gamma$ — дуга винтовой линии $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=\frac{a}{2\pi}t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**10.34.** $\int\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, $\Gamma$ — кривая $x=$ $=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$, $0\leqslant t\leqslant \pi$.

**10.35.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dx+(x+y)\,dy+(x+y+z)\,dz$, $\Gamma$ — кривая $x=$ $=a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=a(\sin t+\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**10.36.** $\int\limits_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz$, $\Gamma$ — окружность $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\cos\alpha\sin t$, $z=a\sin\alpha$ $(\alpha=\text{const})$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой $\Gamma$ (**10.37—10.44**):

**10.37.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dx+y\,dy+(x+y-1)\,dz$, $\Gamma$ — отрезок $AB$, пробегаемый от точки $A(1;\ 1;\ 1)$ к точке $B(2;\ 3;\ 4)$.

**10.38.** $\int\limits_{\Gamma} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, $\Gamma$ — отрезок $AB$, пробегаемый от точки $A(1;\ 1;\ 1)$ к точке $B(4;\ 4;\ 4)$.

**10.39.** $\int\limits_{\Gamma} x(z-y)\,dx + y(x-z)\,dy + z(y-x)\,dz$, $\Gamma$ — ломаная $ABCA$, где $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ a;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ a)$.

**10.40.** $\int\limits_{\Gamma} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, $\Gamma$ — линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ $(R > 0,\ z \geqslant 0)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;\ 0;\ 0)$.

**10.41.** $\int\limits_{\Gamma} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, $\Gamma$ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\operatorname{tg}\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси $Ox$.

**10.42.** $\int\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, $\Gamma$ — граница части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (лежащей в первом октанте), пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;\ 0;\ 0)$.

**10.43.** $\int\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, $\Gamma$ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси $Oy$.

**10.44.** $\int\limits_{\Gamma} (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, $\Gamma$ — линия пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 = 2rx, \ 0 < r < R, \ z \geqslant 0,$$

пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси $Oz$.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой $\Gamma$, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (**10.45—10.55**):

**10.45.** $\int\limits_{\Gamma} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, если:

1) $\Gamma$ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2) $\Gamma$ — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

**10.46.** $\int\limits_{\Gamma} (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, $\Gamma$ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

**10.47.** $\int\limits_{\Gamma} \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2 + y^2}$, $\Gamma$ — окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

**10.48.** $\int\limits_{\Gamma} (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$, $\Gamma$ — граница треугольника с вершинами $(1;\ 1)$, $(3;\ 2)$, $(2;\ 5)$.

**10.49.** $\int\limits_{\Gamma} (y - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$, $\Gamma$ — граница кругового сектора $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha \leqslant \pi/2$, где $(r;\ \varphi)$ — полярные координаты.

**10.50.** $\int\limits_{\Gamma} e^x[(1 - \cos y)\,dx + (\sin y - y)\,dy]$, $\Gamma$ — граница области $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

**10.51.** $\int\limits_{\Gamma} e^{y^2-x^2}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$, $\Gamma$ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

**10.52.** $\int\limits_{\Gamma} (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$, $\Gamma$ — граница области $x^2 + y^2 < ax$, $y > 0$.

**10.53.** $\int\limits_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y}$, $\Gamma$ — граница квадрата с вершинами $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$.

**10.54.** $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dx$, $\Gamma$ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

**10.55.** $\int\limits_{\Gamma} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, $\Gamma$ — граница области, образованной отрезком $AB$, где $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 6)$, и дугой параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки $A$, $B$, $O(0;\ 0)$.

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой $\Gamma$ с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ (**10.56—10.68**):

**10.56.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dy + y\,dx$, $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 2)$.

**10.57.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y\,dy$, $A(-1;\ 0)$, $B(-3;\ 4)$.

**10.58.** $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, $A(2;\ -1)$, $B(1;\ 0)$.

**10.59.** $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx + x^2\,dy$, $A(0;\ 0)$, $B(-2;\ -1)$.

**10.60.** $\int\limits_{\Gamma} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$, $A(-2;\ -1)$, $B(0;\ 3)$.

**10.61.** $\int\limits_{\Gamma} (x^2+2xy - y^2)\,dx + (x^2-2xy-y^2)\,dy$, $A(3;\ 0)$, $A(0;\ -3)$.

**10.62.** $\int\limits_{\Gamma} (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx + (2xy - x^2 - 3y^2)\,dy$, $A(-1;\ 2)$, $B(1;\ -2)$.

**10.63.** $\int\limits_{\Gamma} f(x + y)(dx + dy)$, $f(t)$ — непрерывная функция, $A(0;\ 0)$, $B(x_0;\ y_0)$.

**10.64.** $\int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные функции, $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$.

**10.65.** $\int\limits_{\Gamma} e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy$, $A(0;\ 0)$, $B(x_0;\ y_0)$.

**10.66.** $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$, $A(-1;\ 0;\ 2)$, $B(0;\ 1;\ -2)$.

**10.67.** $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, $A(2;\ -1;\ 0)$, $B(1;\ 2;\ 3)$.

**10.68.** $\int\limits_{\Gamma} \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $A \in S_1$, $B \in S_2$, где $S_1$ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$, $S_2$ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2$ $(R_1 > 0,\ R_2 > 0)$.

Найти функцию $u$ по заданному полному дифференциалу этой функции (**10.69—10.77**):

**10.69.** $du = x^2\,dx + y^2\,dy$.

**10.70.** $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)\,dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)\,dy$.

**10.71.** $du = e^{x-y}\,[(1 + x + y)\,dx + (1 - x - y)\,dy]$.

**10.72.** $du = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \left(\frac{e^y}{1 + x^2} + 1\right)dy$.

**10.73.** $du = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}$.

**10.74.** $du = \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$.

**10.75.** $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$.

**10.76.** $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}\,dz$.

**10.77.** $du = \frac{(x + y - z)\,dx + (x + y - z)\,dy + (x + y + z)\,dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$.

**10.78.** Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x;\ y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} F(x;\ y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от пути интегрирования $\Gamma_{AB}$?

**10.79.** Исходя из определения длины $s$ спрямляемой кривой $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, данного в [1, § 24, п. 2], доказать, что если $\Gamma$ — кусочно-гладкая кривая, то в $\mathbb{R}^3$

$$s = \int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt, \tag{27}$$

а в $\mathbb{R}^2$

$$s = \int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{28}$$

**10.80.** Доказать, что:

1) Если плоская кривая $\Gamma$ — график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{29}$$

2) Если плоская кривая $\Gamma$ задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant b$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на $[a;\ b]$, то

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi. \tag{30}$$

**10.81.** Найти длину дуги плоской кривой *):

1) $ay^2 = x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5a$.

2) $y = 1 - \ln\cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

3) $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0$.

4) $r = a\sin^3(\varphi/3)$.

5) $r = a(1 + \cos\varphi)$.

6) $x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

7) $x = \varphi + \sin\varphi, \quad y = 1 - \cos\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \pi$.

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geqslant b$.

9) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

---

*) Задачи о вычислении для дуг кривых их длин, масс, центров масс, моментов инерции сосредоточены в [2, § 7].

**10.82.** Найти длину дуги пространственной кривой:

1) $x=3t, \quad y=3t^2, \quad z=2t^3, \quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

2) $x=t\cos t, \quad y=t\sin t, \quad z=t, \quad 0\leqslant t\leqslant\sqrt{2}.$

3) $x=a(1+\cos\varphi), \quad y=a(\varphi-\sin\varphi), \quad z=4a\sin(\varphi/2), \quad 0\leqslant \varphi\leqslant 2\pi.$

4) $x=t\cos t^2, \quad y=t\sin t^2, \quad z=t^2, \quad 0\leqslant t\leqslant\sqrt{2\pi}.$

5) $2px=z^2, \quad 6p^2y=z^3, \quad 0\leqslant z\leqslant p.$

6) $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2, \quad (x+y)^2=8(x-y)$ от точки $(0;\ 0;\ 0)$ до точки с аппликатой $z_0=1/3$.

**10.83.** Пусть $s_n$ — длина витка кривой $x=e^{-kt}\cos t$, $y=e^{-kt}\sin t$, $z=e^{-kt}$, $2\pi n\leqslant t\leqslant 2\pi(n+1)t$, $n\in\mathbb{Z}$. Найти отношение $s_{n+1}:s_n$.

**10.84.** Используя таблицы, найти с погрешностью не более чем 0,1 длину дуги кривой $x^2+y^2+z^2=1$, $y^2+z^2=y$.

---

Пусть на кусочно-гладкой кривой Г распределена масса с линейной плоскостью $\rho(x;\ y;\ z)$ (или $\rho(x;\ y)$ для плоской кривой). По следующим формулам вычисляют:

массу кривой

$$m=\int\limits_{\Gamma}\rho(x;\ y;\ z)\,ds \tag{31}$$

координаты центра масс

$$x_C=\frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma}x\rho\,ds, \quad y_C=\frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma}y\rho\,ds, \quad z_C=\frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma}z\rho\,ds, \tag{32}$$

моменты инерции относительно осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$

$$I_x=\int\limits_{\Gamma}(y^2+z^2)\rho\,ds, \quad I_y=\int\limits_{\Gamma}(z^2+x^2)\rho\,ds, \quad I_z=\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\rho\,ds. \tag{33}$$

---

**10.85.** Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x;\ y)$ по дуге $AB$ плоской кривой Г, если:

1) Г — отрезок $AB$, $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$; $\rho(x;\ y)=2x+y$.

2) Г — отрезок $AB$, $A(1;\ 0)$, $B(4;\ 6)$; $\rho(x;\ y)=\sqrt{y+2}/x$.

3) Г: $y=x^2/2$, $A(1;\ 1{,}5)$, $B(2;\ 2)$; $\rho(x;\ y)=y/x$.

4) Г: $y^2=x$, $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$; $\rho(x;\ y)=y$.

5) Г: $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$, $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 16/3)$; $\rho=ks$, где $s$ — длина дуги от точки $(0;\ 0)$.

**10.86.** Найти массу всей кривой $y=a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$, $x\in\mathbb{R}$, с линейной плотностью $\rho=1/y^2$.

**10.87.** Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho$ по плоской кривой $\Gamma$:

1) $\Gamma$: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; $\rho = kr$.

2) $\Gamma$: $r = a(1 + \cos\varphi)$; $\rho = k\sqrt{r}$.

3) $\Gamma$: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; $\rho = y^{3/2}$.

4) $\Gamma$: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$; $\rho = \sqrt[3]{y}$.

5) $\Gamma$: $x = \ln(1 + t^2)$, $y = 2\,\mathrm{arctg}\, t - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\rho = ye^{-x}$.

6) $\Gamma$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $a > b$; $\rho = y$.

7) $\Gamma$: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; $\rho = |xy|$.

8) $\Gamma$: $x^2 + y^2 = ax$; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**10.88.** Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho$ по пространственной кривой $\Gamma$:

1) $\Gamma$: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; $\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

2) $\Gamma$: $x = at$, $y = at^2/2$, $z = at^3/3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\rho = \sqrt{2y/a}$.

3) $\Gamma$: $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4) $\Gamma$: $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$, $-\infty < t \leqslant 0$; $\rho = kz$.

5) $\Gamma$ — дуга кривой $y = x^2/\sqrt{2}$, $z = x^3/3$ с началом $A(0;\ 0;\ 0)$ и концом $B\left(4;\ 8\sqrt{2};\ 64/3\right)$; $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

6) $\Gamma$ — дуга кривой $y^2 - 4x^2 = 3z^2$, $y^2 = x$, $z \geqslant 0$, с началом $A(0;\ 0;\ 0)$ и концом $B(1/4;\ 1/2;\ 0)$; $\rho = z$.

7) $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = a\}$, $\rho = x^2$.

**10.89.** Найти координаты центра масс, распределенных по плоской кривой $\Gamma$ с линейной плотностью $\rho = 1$:

1) $\Gamma$: $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$, $|x| \leqslant a$.

2) $\Gamma$: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3) $\Gamma$ — дуга окружности $r = R$, $|\varphi| \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$.

4) $\Gamma$ — кардиоида $r = a(1 + \cos\varphi)$.

5) $\Gamma$: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $y \geqslant 0$.

6) $\Gamma$: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

7) $\Gamma$: $y^2 = \dfrac{1}{3}x^2 + x^3$, $x \geqslant 0$.

**10.90.** Найти координаты центра масс, распределенных с линейной плотностью $\rho$ по дуге винтовой линии $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = h\varphi/2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если:

1) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$.

2) $\rho = \rho_0 e^{-z/h}$, считать $\varphi_0 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

**10.91.** Найти координаты центра масс однородной кривой

$$x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t,\quad z=e^{-t},\quad 0\leqslant t<\infty.$$

**10.92.** Найти координаты центра масс однородного края поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$.

**10.93.** Пусть кусочно-гладкая кривая Γ является объединением гладких кривых $\Gamma_i$, $\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_i$, с массами $m_i$ и радиус-векторами центров масс $\boldsymbol{r}_i$, $i=1,\ldots,n$. Пусть $m$ — масса Γ, $\boldsymbol{r}_C$ — центр масс Γ. Доказать, что

$$\boldsymbol{r}_C=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{m}\boldsymbol{r}_i. \tag{34}$$

**10.94.** Найти момент инерции $I_x$ окружности $x^2+y^2=R^2$; $\rho=1$.

**10.95.** Найти момент инерции $I_y$ окружности $x^2+y^2=2Rx$; $\rho=1$.

**10.96.** Найти моменты инерции $I_x$ и $I_y$ одной арки циклоиды

$$x=a(t+\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad |t|\leqslant\pi;\quad \rho=1.$$

**10.97.** Найти моменты инерции $I_x$, $I_y$, $I_z$ одного витка винтовой линии

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ht/2\pi,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi;\quad \rho=1.$$

**10.98.** Найти момент инерции $I_x$ окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$; $\rho=1$.

**10.99.** Найти полярный момент инерции

$$I_O=\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\,ds$$

плоской однородной кривой Γ ($\rho\equiv 1$) относительно начала координат, если:

1) Γ: $|x|+|y|=a$.

2) Γ: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

3) Γ: $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

**10.100.** Пусть $G$ — ограниченная плоская область с кусочно-гладкой границей $\partial G$, ориентированной так, что область $G$ находится (локально) слева от касательного к $\partial G$ вектора. Доказать, что площадь $\mu G$ можно вычислять по любой из формул:

$$S=\oint\limits_{\partial G}x\,dy=$$

$$=-\oint\limits_{\partial G}y\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G}x\,dy-y\,dx. \tag{35}$$

**10.101.** Найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми:

1) $y^2 = 4 - x, \quad x = 4, \quad y = 1.$

2) $y = 2x^2, \quad x - y + 1 = 0.$

3) $y = 1 - x^2, \quad x - y - 1 = 0.$

4) $x = t^2,\ y = t^3,\ x = 1.$

5) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$

6) $x = 12\sin^3 t, \quad y = 3\cos^3 t.$

7) $x = a\sin 2\varphi\cos^2\varphi, \quad y = a\cos 2\varphi\cos^2\varphi, \quad |\varphi| \leqslant \pi/2.$

**10.102.** Найти площадь области

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} < \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

**10.103.** Найти площадь области, ограниченной кривыми:

1) $(y - x)^2 + x^2 = 1.$ 2) $(x + y)^2 = ax, \quad y = 0.$

3) $y^2 = x^2 - x^4.$ 4) $9y^2 = 4x^3 - x^4.$

5) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geqslant 0.$

6) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3.$

7) $x^3 + y^3 = x^2 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 0.$

**10.104.** Найти площадь области, ограниченной петлей кривой:

1) $x = 3t/(1 + t^3), \quad y = 3t^2/(1 + t^3).$

2) $x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin 2\varphi,\ x \geqslant 0.$

3) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy.$

**10.105.** Пусть $G$ — ограниченная область в полуплоскости $y \geqslant 0$ с кусочно-гладкой границей $\partial G$, ориентированной так, что область $G$ расположена (локально) слева от касательного вектора. Пусть $\Omega$ — тело, образованное вращением области $G$ вокруг оси $Ox$. Доказать, что объем $\mu\Omega$ можно вычислять по любой из формул:

$$\mu\Omega = -\pi\oint_{\partial G} y^2\,dx =$$

$$= -2\pi\oint_{\partial G} xy\,dy =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\oint_{\partial G} 2xy\,dy + y^2\,dx. \qquad (36)$$

**10.106.** Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси $Ox$ области, ограниченной кривыми:

1) $y = \operatorname{sh} x, \quad x = a > 0, \quad y = 0.$

2) $y = 2 - \sin x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2\pi.$

3) $y^2 - x^2 = 1, \quad |x| = 1$.

4) $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t$.

5) $x = \sin 2t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

---

Пусть на области $\Omega$ задана вектор-функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки из $\Omega$, тогда говорят, что на $\Omega$ задано *векторное* (*силовое*) *поле*. Пусть $\Gamma$ — кусочно-гладкая ориентированная кривая в $\Omega$ и векторное поле $\boldsymbol{F}$ непрерывно на $\Gamma$.

*Работой поля* $\boldsymbol{F}$ вдоль $\Gamma$ называют интеграл

$$A = \int_{\Gamma} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r}. \qquad (37)$$

---

**10.107***). Найти работу поля $\boldsymbol{F} = (0; -x^2)$ вдоль дуги параболы $y^2 = 1 - x$ от точки $(1; 0)$ до точки $(0; 1)$.

**10.108.** Найти работу поля $\boldsymbol{F} = (F_0; 0)$, $F_0 = \text{const}$, вдоль дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то точки $(a; 0)$ до точки $(0; a)$.

**10.109.** Найти работу поля $\boldsymbol{F} = (xy; x + y)$ вдоль дуги $AB$ кривой $\Gamma$, где $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, если:

1) $\Gamma$: $y = x$. 2) $\Gamma$: $y = x^2$.

**10.110.** Найти работу поля $\boldsymbol{F} = (4x - 5y; 2x + y)$ вдоль дуги $AB$ кривой $\Gamma$, где $A(1; -9)$, $B(3; -3)$, если:

1) $\Gamma$ — ломаная $APB$, где $P(1; -3)$.

2) $\Gamma$ — ломаная $AQB$, где $Q(3; -9)$.

3) $\Gamma$ — отрезок $AB$.

**10.111.** Найти работу поля $\boldsymbol{F}$ вдоль дуги $AB$ кривой $\Gamma$, если

1) $\boldsymbol{F} = (2xy; -y)$; $\Gamma$: $y = x^2 - 1$, $A(1; 0)$, $B(2; 3)$.

2) $\boldsymbol{F} = (3xy^2; -x - y)$; $\Gamma$: $y^2 = x + 1$, $A(0; 1)$, $B(3; 2)$.

3) $\boldsymbol{F} = (-y; x)$; $\Gamma$: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $A(0; 0)$, $B(2\pi a; 0)$.

4) $\boldsymbol{F} = (y; -2x)$; $\Gamma$: $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$.

5) $\boldsymbol{F} = (0; 2x)$; $\Gamma$: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $y \geqslant 0$, $A(a; 0)$, $B(-a; 0)$.

**10.112.** Найти работу поля $\boldsymbol{F} = (-y; x)$:

1) От точки $A(1; 0)$ до точки $B(-1; 0)$:

а) вдоль ломаной $AMNB$, где $M(1; 1)$, $N(-1; 1)$;

б) вдоль верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$;

в) вдоль ломаной $APB$, где $P(0; 1)$.

2) От точки $(x_0 - R; y_0)$ до точки $(x_0 + R; y_0)$ вдоль:

а) верхней полуокружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $y \geqslant y_0$;

б) нижней полуокружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $y \leqslant y_0$.

---

*) Задачи по этой теме включены также в § 12.

**10.113.** Найти работу поля $F = -\mu r/r^3$, $r = (x;\ y)$, $r = |r|$, $\mu = \text{const}$:

1) Вдоль дуги $AB$ параболы $y = x^2 - 1$, где $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$.

2) Вдоль дуги $AB$ гладкой кривой Г, не проходящей через начало координат, где $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$.

**10.114.** Найти работу поля $F = \frac{1}{r^2}\cdot(-y;\ x)$, $r^2 = x^2 + y^2$, вдоль дуги $AB$ кривой Г, где $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, если:

1) Г — ломаная $APB$, где $P(1;\ 1)$.

2) Г — четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3) Г — четверть астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

**10.115.** Найти работу поля $F = \frac{1}{r^2}\cdot(-y;\ x)$, $r^2 = x^2 + y^2$, вдоль ориентированной против часовой стрелки окружности:

1) $x^2 + y^2 = 1$. 2) $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

**10.116.** Найти работу поля $F = \lambda r$, $r = xi + yj + zk$, вдоль дуги $OM$ кривой Г, где $O(0;\ 0;\ 0)$, $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$, если:

1) Г — винтовая линия $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$.

2) Г — отрезок $OM$.

**10.117.** Найти работу поля $F$ вдоль контура Г, если:

1) $F = (yz;\ zx;\ xy)$; Г — ломаная $ABCD$ с вершинами $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(2;\ 1;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 1)$, $D(2;\ 3;\ 4)$.

2) $F = (x+z;\ x;\ -y)$; Г — замкнутая ломаная $ABCA$ с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$.

3) $F = (xy;\ yz;\ xz)$; Г — замкнутая ломаная $ABCDA$ с вершинами $A(1;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$, $C(-1;\ -1;\ -1)$, $D(1;\ -1;\ 1)$.

4) $F = (x^2/y;\ y/x;\ \cos z)$; Г — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ от точки $(a;\ 0;\ 0)$ до точки $(0;\ 0;\ 2\pi b)$.

5) $F = (y;\ -z;\ x)$; Г — кривая $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$, $y = x$, ориентированная против часовой стрелки со стороны оси $Ox$.

6) $F = (2xy;\ y^2;\ -x^2)$; Г — дуга кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$, $y = x$, от точки $A(a;\ a;\ 0)$ до точки $B\left(a\sqrt{2};\ a\sqrt{2};\ a\right)$.

7) $F = (z;\ x;\ y)$; Г — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$, ориентированная против часовой стрелки со стороны оси $Oz$.

**10.118.** Найти работу поля центральных сил $F = f(r)r$, где $r = xi + yj + zk$, $r = |r|$, $f(r)$ — непрерывная при $r > 0$ функция, вдоль гладкого контура Г с началом $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, не содержащего начала координат.

**10.119.** Доказать, исходя из закона взаимодействия точечных масс, что материальная кривая Г с линейной плотностью $\rho(\xi;\ \pi;\ \zeta)$ притягивает массу $m$, находящуюся в точке $M(x;\ y;\ z)$, с силой

$$F = km\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|^3}\,\rho(\xi;\ \eta;\ \zeta)\,ds, \quad N = N(\xi;\ \eta;\ \zeta). \qquad (38)$$

**10.120.** Найти напряженность гравитационного поля, создаваемого однородной материальной прямой с линейной плотностью $\rho_0$.

**10.121.** С какой силой масса $M$, равномерно распределенная вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=h>0$, притягивает точечную массу $m$, помещенную в начало координат.

**10.122.** Пусть $(p;\ v)$ — координаты, определяющие на плоскости $Opv$ состояние одного моля идеального газа (давление и объем). Уравнение состояния одного моля такого газа имеет вид $pv=RT$, где $R=\text{const}>0$, $T$ — абсолютная температура. При переходе из состояния $(p_1;\ v_1)$ в состояние $(p_2;\ v_2)$ по кривой $\Gamma$ количество получаемого (или отдаваемого) тепла газом определяют по формуле

$$Q=\int\limits_{\Gamma}\frac{c_p}{R}\,p\,dv+\frac{c_v}{R}\,v\,dp, \tag{39}$$

где $c_v=\text{const}$, $c_p=c_v+R$. Кривую, задаваемую уравнением $pv^\gamma=\text{const}$, где $\gamma=c_p/c_v$, называют *адиабатой* (а процесс изменения состояния вдоль этой кривой — *адиабатическим*).

1) Найти тепло, получаемое газом в изотермическом процессе, т. е. вдоль кривой $pv=RT=\text{const}$, при переходе из состояния $(p_1;\ v_1)$ в состояние $(p_2;\ v_2)$.

2) Доказать, что в адиабатическом процессе газ не получает и не отдает тепло.

3) Пусть $pv^\gamma=C_1$, $pv^\gamma=C_2$ — две адиабаты, $\Gamma(T)$ — отсекаемый ими отрезок *изотермы* $pv=RT$, $Q(T)$ — количество тепла, получаемое газом на $\Gamma(T)$. Доказать, что для всех изотерм

$$\frac{Q(T)}{T}=\text{const}.$$

4) *Циклом Карно* называют замкнутый контур, образованный двумя адиабатами и двумя изотермами $pv=RT_1$ и $pv=RT_2$, $T_2>T_1$. Пусть этот контур ориентирован от точки с наибольшим давлением вдоль изотермы $pv=RT_2$. Пусть $Q$ — полное тепло, полученное газом на цикле Карно, а $Q_2$ — на изотерме $pv=RT_2$. Доказать, что к. п. д. цикла $\eta=Q/Q_2$ определяется по формуле $\eta=(T_2-T_1)/T_2$.

**10.123.** В установившемся стационарном потоке жидкости плотность и скорость в каждой точке потока не зависят от времени, т. е. $\rho=\rho(x;\ y)$, $\boldsymbol{v}=(u(x;\ y);\ v(x;\ y))$.

1) Найти количество жидкости, прошедшей за единицу времени через ограниченную область $G$ с кусочно-гладкой границей $\partial G$.

2) Получить уравнение для $u$ и $v$, предполагая, что в области $G$ жидкость не возникает и не исчезает (т. е. нет ни источников, ни стоков) и что жидкость несжимаема.

**10.124.** Найти *логарифмический потенциал* простого слоя

$$u(x;\ y)=\oint\limits_{\Gamma}\mu(\xi;\ \eta)\ln(1/r)\,ds, \tag{40}$$

где $\Gamma$ — окружность $\xi^2+\eta^2=1$, ориентированная против часовой стрелки, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, если:

1) $\mu(\xi;\ \eta)=\mu_0=\text{const}$.

2) $\mu(\xi;\ \eta)=\cos m\varphi,\ m\in\mathbb{N}$.

3) $\mu(\xi;\ \eta)=\sin m\varphi,\ m\in\mathbb{N}$.

Здесь $\varphi$ — полярный угол точки $(\xi;\ \eta)$.

**10.125.** Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I=\oint\limits_{\partial G}\frac{\cos\widehat{(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}}{r}\,ds, \tag{41}$$

где $\partial G$ — кусочно-гладкая граница области $G$, $\boldsymbol{r}=\overline{MN}$, $M(x;y)\in\mathbb{R}^2, N(\xi;\ \eta)\in\partial G, r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $\partial G$, $\widehat{(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}$ — угол между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{n}$, 1) предполагая, что $M\notin G$; 2) предполагая, что $M\in G$.

**10.126.** Вычислить *логарифмический потенциал* двойного слоя

$$u(x;\ y)=\oint\limits_{\Gamma}\nu(\xi;\ \eta)\frac{\cos\widehat{(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}}{r}\,ds, \tag{42}$$

где $\Gamma$ — окружность $\xi^2+\eta^2=1$, ориентированная против часовой стрелки, $\boldsymbol{r}=(\xi-x;\ \eta-y)$, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $\Gamma$, если:

1) $\nu(\xi;\ \eta)=\cos m\varphi,\quad m\in\mathbb{N}$;

2) $\nu(\xi;\ \eta)=\sin m\varphi,\quad m\in\mathbb{N}$,

здесь $\varphi$ — полярный угол точки $(\xi;\ \eta)$. Рассмотреть случаи $\sqrt{x^2+y^2}>1$ и $\sqrt{x^2+y^2}<1$.

---

## § 11. Поверхностные интегралы

**1. Поверхностный интеграл первого рода.** Пусть поверхность $S$ задана параметрически

$$x=x(u;\ v),\quad y=y(u;\ v),\quad z=z(u;\ v),\quad (u;\ v)\in\overline{D}, \tag{1}$$

причем функции $x(u;\ v)$, $y(u;\ v)$, $z(u;\ v)$ дифференцируемы в измеримой области $D$. Пусть на этой поверхности задана функция $f(x;\ y;\ z)$.

*Поверхностный интеграл первого рода* $\iint\limits_S f(x;\ y;\ z)\,dS$ от функции $f(x;\ y;\ z)$ по поверхности $S$ может быть определен следующим образом:

$$\iint\limits_S f(x;\ y;\ z)\,dS = \iint\limits_D f(x(u;\ v);\ y(u;\ v);\ z(u;\ v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{2}$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Если подынтегральная функция в правой части равенства (2) непрерывна в $\bar{D}$ (в частности, если функция $f$ непрерывна на $S$, а функции (1) непрерывно дифференцируемы в $\bar{D}$), то интеграл $\iint\limits_S f(x;\ y;\ z)\,dS$ заведомо существует.

Поверхностный интеграл может быть определен и как предел соответствующих интегральных сумм (см., например, [3] или [4]).

Если поверхность $S$ задана уравнением

$$z = z(x;\ y), \quad (x;\ y) \in \overline{D}, \tag{3}$$

где $z(x;\ y)$ — дифференцируемая в $D$ функция, то равенство (2) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x;\ y;\ z)\,dS = \iint\limits_D f(x;\ y;\ z(x;\ y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{4}$$

Часто поверхность $S$ не может быть задана в виде (3) или (1), но ее удается разбить на части $S_i$ так, что каждая из частей допускает представление в нужном виде. В таких случаях под интегралом по поверхности $S$ понимают сумму интегралов по ее частям:

$$\iint\limits_S f\,dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} f\,dS_i. \tag{5}$$

Если $f(x;\ y;\ z)$ — плотность массы, распределенной по поверхности $S$, то интегралы (2), (4) дают массу всей поверхности.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

если $S$ — часть цилиндрической поверхности

$$x=r\cos u, \quad y=r\sin u, \quad z=v; \quad 0\leqslant u\leqslant 2\pi, \quad 0\leqslant v\leqslant H.$$

△ В данном случае применима формула (2), причем $E=r^2$, $G=1$, $F=0$. Поэтому

$$\iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_0^{2\pi}\int_0^H \frac{r\,du\,dv}{\sqrt{r^2+v^2}}=2\pi r\int_0^H \frac{dv}{\sqrt{r^2+v^2}}=$$

$$=2\pi r\ln\frac{H+\sqrt{r^2+H^2}}{r}. \ ▲$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I=\iint_S z^2\,dS,$$

где $S$ — полная поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2$.

△ Пусть $S_1$ — боковая поверхность конуса, $S_2$ — его основание, тогда

$$I=\iint_{S_1} z^2\,dS_1+\iint_{S_2} z^2\,dS_2.$$

К первому интегралу применим формулу (4). На боковой поверхности конуса

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\iint_{S_1} z^2\,dS_1=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\varphi=8\sqrt{2}\pi.$$

На основании конуса $z=2$, поэтому второй интеграл равен учетверенной площади основания конуса $4\pi 2^2$. Итак, $I=8\pi(2+\sqrt{2})$. ▲

**2. Поверхностные интегралы второго рода** *). Пусть поверхность $S$ задана параметрически

$$x=x(u;\ v), \quad y=y(u;\ v), \quad z=z(u;\ v), \quad (u;\ v)\in\overline{D}, \qquad (1)$$

*) В этом и следующих пунктах используются только правые системы координат.

функции $x(u; v)$, $y(u; v)$, $z(u; v)$ непрерывно дифференцируемы в $\bar{D}$, причем ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{Vmatrix}$$

равен 2. В каждой точке $(u; v)$ такой поверхности существуют два противоположно направленных единичных нормальных вектора, каждый из которых является непрерывной функцией точки $(u; v)$ поверхности $S$. Выбор одного из них называют *ориентацией поверхности*. Если поверхность $S$ является границей ограниченной области, то говорят, что ее можно ориентировать *внешней* или *внутренней* (по отношению к этой области) *нормалями*. Поверхность $S$, ориентированную внешней нормалью, называют ее *внешней стороной*, а ориентированную внутренней нормалью, — ее *внутренней стороной*.

Для ориентированной поверхности $S$ определяют *поверхностный интеграл второго рода*.

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

к поверхности (1) (см. § 6, (7)). Пусть поверхность $S$ ориентирована единичным вектором нормали $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, и пусть на поверхности $S$ заданы функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$. Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \tag{6}$$

определяется через поверхностный интеграл первого рода формулой

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \tag{7}$$

Если поверхность $S$ ориентирована противоположным образом, т. е. нормалью $(-\cos\alpha; -\cos\beta; -\cos\gamma)$, то у поверхностного интеграла изменяется только знак.

Для интеграла (6) имеет место следующая формула:

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv. \tag{8}$$

В частном случае $P=0$, $Q=0$ формула (8) имеет вид

$$\iint\limits_S R\,dx\,dy = \iint\limits_D R\,(x(u; v); y(u; v); z(u; v))\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \tag{9}$$

Аналогично записывают формулы для интегралов

$$\iint_S P\,dy\,dz, \qquad \iint_S Q\,dz\,dx.$$

Если поверхность $S$ задается явно, то формула (9) упрощается.

Пусть, например, поверхность $S$ задана уравнением

$$z = z(x;\ y), \quad (x;\ y) \in \overline{D}, \tag{10}$$

где $z(x;\ y)$ — непрерывно дифференцируемая в $\overline{D}$ функция. Тогда

$$\iint_S R\,dx\,dy = \pm \iint_D R(x;\ y;\ z(x;\ y))\,dx\,dy, \tag{11}$$

где $D$ — проекция поверхности $S$ на плоскость $z = 0$.

Перед двойным интегралом в формуле (11) берется знак «плюс», если поверхность $S$ ориентирована нормалями, составляющими с осью $z$ острый угол, и знак «минус», если поверхность $S$ ориентирована нормалями, образующими с осью $z$ тупой угол. В первом случае говорят, что интеграл берется по *верхней стороне поверхности*, во втором — по ее *нижней стороне*.

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint_S z\,dx\,dy$, где $S$ — нижняя сторона части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z \leqslant H$.

△ Поверхность $S$ ориентирована нормалями, составляющими тупой угол с осью $z$. По формуле (11), взяв в ней знак «минус», сводим интеграл к двойному, который вычисляем, переходя к полярным координатам:

$$\iint_S z\,dx\,dy = -\iint_{x^2+y^2 \leqslant H^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H r^2\,dr = -\frac{2}{3}\pi H^3. \ ▲$$

Если поверхность $S$ не представима в виде (10) или (1), но ее удается разбить на конечное число частей, каждая из которых представима в таком виде, то под поверхностным интегралом по поверхности $S$ понимают сумму интегралов по ее частям.

Пример 4. Вычислить интегралы

$$\text{а) } \iint_S z^2\,dx\,dy, \quad \text{б) } \iint_S z\,dx\,dy,$$

где $s$ — полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, ориентированная внешней нормалью.

△ а) Разобьем поверхность $S$ на части $S_1$ и $S_2$, расположенные соответственно выше и ниже плоскости $z=0$. Тогда

$$\iint\limits_S z^2\,dx\,dy=\iint\limits_{S_1} z^2\,dx\,dy+\iint\limits_{S_2} z^2\,dx\,dy.$$

Поверхности $S_1$ и $S_2$ имеют одну и ту же проекцию $D$ на плоскость $z=0$. Согласно формуле (11), получаем

$$\iint\limits_{S_1} z^2\,dx\,dy=\iint\limits_D (R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

так как внешняя нормаль к поверхности $S_1$ образует с осью $z$ острый угол;

$$\iint\limits_{S_2} z^2\,dx\,dy=-\iint\limits_D (R^2-x^2-y^2)\,dx\,dy,$$

так как внешняя нормаль к поверхности $S_2$ образует тупой угол с осью $z$. Следовательно,

$$\iint\limits_S z^2\,dx\,dy=0.$$

б) Как и в случае а), разбивая поверхность $S$ на части $S_1$ и $S_2$ и применяя формулу (11), получаем

$$\iint\limits_{S_1} z\,dx\,dy=\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{S_2} z\,dx\,dy=-\iint\limits_D \left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S z\,dx\,dy=2\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=2\cdot\frac{\pi}{3}R^3=\frac{2\pi}{3}R^3,$$

так как последний интеграл равен объему четвертой части шара радиуса $R$. ▲

Пример 5. Вычислить интеграл

$$K=\iint\limits_S \frac{dy\,dz}{x}+\frac{dz\,dx}{y}+\frac{dx\,dy}{z},$$

где $S$ — часть эллипсоида

$$x=a\cos u\cos v,\quad y=b\sin u\cos v,\quad z=c\sin v,$$
$$u\in[\pi/4;\ \pi/3],\quad v\in[\pi/6;\ \pi/4],$$

ориентированного внешней нормалью.

△ Заметим, что функции $1/x$, $1/y$, $1/z$ положительные, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, —

острые, поэтому $K > 0$. Воспользуемся формулой (8). Так как

$$x'_u = -a \sin u \cos v, \quad y'_u = b \cos u \cos v, \quad z'_u = 0,$$
$$x'_v = -a \cos u \sin v, \quad y'_v = -b \sin u \sin v, \quad z'_v = c \cos v,$$

то

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a \cos u \cos v} & \frac{1}{b \sin u \cos v} & \frac{1}{c \sin v} \\ -a \sin u \cos v & b \cos u \cos v & 0 \\ -a \cos u \sin v & -b \sin u \sin v & c \cos v \end{vmatrix} = p \cos v,$$

где

$$p = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}.$$

Поэтому по формуле (8) получаем

$$K = p \int_{\pi/4}^{\pi/3} du \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos v \, dv = p \frac{\pi}{12} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) =$$
$$= \frac{\pi (\sqrt{2} - 1)}{24} \left( \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right). \quad \blacktriangle$$

**3. Теорема Гаусса — Остроградского.** Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ — элементарная область (см. § 8, п. 2), ограниченная кусочно-гладкой поверхностью, и пусть функции $P(x; y; z)$, $Q(x; y; z)$, $R(x; y; z)$ вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в $\overline{G}$. Тогда

$$\iint\limits_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint\limits_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz, \tag{12}$$

где $S$ — внешняя сторона поверхности, ограничивающей область $G$.

Формулу (12) называют *формулой Гаусса — Остроградского.* Иногда ее записывают в виде

$$\iint\limits_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS =$$
$$= \iiint\limits_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz, \tag{13}$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $S$. Формула Гаусса — Остроградского может быть записана в векторной форме (см. § 12, (27)).

Пример 6. Вычислить интеграл

$$I=\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy,$$

где $S$ — внешняя сторона боковой поверхности конуса $G$: $x^2+y^2\leqslant z^2$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

$\triangle$ Обозначим через $I_1$ интеграл по внешней стороне полной поверхности $S_1$ конуса, через $I_2$ интеграл по верхней стороне его основания $S_2$. Тогда $I=I_1-I_2$. К интегралу $I_1$ применим формулу Гаусса — Остроградского

$$I_1=3\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислим полученный тройной интеграл

$$I_1=3\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^z (r^2+z^2)\,r\,dr=\frac{9}{10}\pi.$$

Вычислим интеграл по основанию конуса

$$I_2=\iint\limits_{S_2} x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy=\iint\limits_{S_2} dx\,dy=\pi.$$

Следовательно, $I=-\pi/10$. $\blacktriangle$

**4. Теорема Стокса.** Пусть $S$ — ориентированная кусочно-гладкая поверхность, ограниченная соответственно ориентированным контуром $L$ *). Пусть функции $P(x;\ y;\ z)$, $Q(x;\ y;\ z)$, $R(x;\ y;\ z)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области $G\supset S$. Тогда

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{14}$$

Формулу (14) называют *формулой Стокса*. Эта формула может быть записана в таком виде:

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS, \tag{15}$$

---

*) Говорят, что поверхность и ограничивающий ее контур *ориентированы соответственно*, если наблюдатель, движущийся по контуру и смотрящий на поверхность с той стороны, куда направлена нормаль к поверхности, видит поверхность слева.

где $(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$ — вектор единичной нормали к поверхности $S$, направленный соответственно направлению контура $L$.

Формулу (15) иногда записывают в символическом виде

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \qquad (16)$$

Формула Стокса может быть записана в векторной форме (см. § 12, (23)).

Условимся говорить, что замкнутая кривая *ориентирована положительно* относительно некоторого вектора $\boldsymbol{a}$, если направление на кривой (со стороны, в которую направлен вектор $\boldsymbol{a}$) противоположно направлению движения часовой стрелки, и *ориентирована отрицательно* относительно вектора $\boldsymbol{a}$, если направление на кривой совпадает с направлением движения часовой стрелки.

Пример 7. Вычислить интеграл

$$A=\int\limits_L (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz,$$

где $L$ — кривая пересечения параболоида $x^2+y^2+z=3$ с плоскостью $x+y+z=2$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;\ 0;\ 0)$.

△ Применим формулу Стокса. За поверхность $S$, ограниченную кривой $L$, примем часть секущей плоскости $x+y+z=2$, лежащей внутри параболоида. Единичным вектором нормали к $S$, направленным соответственно направлению кривой $L$, является вектор $(1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$. Так как $P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$, то

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2(z+y),\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-2(x+z),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2(y+x).$$

Применяя формулу (15), получаем

$$A=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint\limits_S (x+y+z)\,dS=-\frac{8}{\sqrt{3}}\iint\limits_S dS.$$

Так как $z=2-x-y$ на поверхности $S$, то

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3}.$$

По формуле (4) находим

$$A=-8\iint\limits_D dx\,dy,$$

где $D$ — проекция $S$ на плоскость $xOy$. Исключая $z$ из уравнений

$$x^2+y^2+z=3, \quad x+y+z=2,$$

получаем

$$(x-1/2)^2+(y-1/2)^2=3/2,$$

т. е. $D$ — есть круг радиуса $\sqrt{3/2}$. Следовательно,

$$\iint\limits_D dx\,dy=\frac{3}{2}\pi, \quad A=-12\pi. \ \blacktriangle$$

---

Вычислить интегралы (**11.1—11.13**):

**11.1.** $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где:

1) $S$ — часть плоскости $x+2y+4z=4$, выделяемая условиями $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

2) $S$ — часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, выделяемая условием $z\geqslant 0$.

**11.2.** $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$, где:

1) $S$ — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2) $S$ — поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$.

**11.3.** $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$, где:

1) $S$ — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

2) $S$ — поверхность куба $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|z|\leqslant a$.

3) $S$ — поверхность октаэдра $|x|+|y|+|z|\leqslant a$.

4) $S$ — полная поверхность цилиндра $x^2+y^2\leqslant r^2$, $0\leqslant z\leqslant H$.

**11.4.** $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, $S$ — поверхность тетраэдра $x+y+z\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

**11.5.** 1) $\iint\limits_S xyz\,dS$. 2) $\iint\limits_S |xy|\,z\,dS$.

$S$ — часть параболоида $z=x^2+y^2$, выделяемая условием $z\leqslant 1$.

**11.6.** 1) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$. 2) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$.

$S$ — часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, выделяемая условием $z\leqslant 1$.

**11.7.** 1) $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,dS$. 2) $\iint\limits_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\,dS$.

$S$ — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, расположенная внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

**11.8.** 1) $\iint\limits_S f(x;\ y;\ z)\,dS$.

2) $\iint\limits_S \dfrac{dS}{f(x;\ y;\ z)}$.

3) $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\,\dfrac{dS}{f(x;\ y;\ z)}$.

$f = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}$, $S$ — эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

**11.9.** $\iint\limits_S (x^2 + y^2 + (z - a)^2)^{-n/2}\,dS$, $n \in \mathbb{N}$, $S$ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**11.10.** $\iint\limits_S z^2\,dS$, $S$ — часть конической поверхности

$$x = u\cos v\sin\alpha, \quad y = u\sin v\sin\alpha, \quad z = u\cos\alpha,$$

$\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha \in (0;\ \pi/2)$, выделяемая условиями $u \in [0;\ 1]$, $v \in [0;\ 2\pi]$.

**11.11.** $\iint\limits_S z\,dS$, $S$ — поверхность

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad u \in [0;\ 1], \quad v \in [0;\ 2\pi].$$

**11.12.** $\iint\limits_S f(r)\,dS$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad f(r) = \begin{cases} 1 - r^2, & r \leqslant 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases}$$

$S$ — плоскость $x + y + z = a$.

**11.13.** $\iint\limits_S f(r;\ z)\,dS$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad f(r;\ z) = \begin{cases} r^2, & r \leqslant z, \\ 0, & r > z, \end{cases}$$

$S$ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**11.14.** Доказать *формулу Пуассона*

$$\iint\limits_S f(ax + by + cz)\,dS = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,t\right)dt,$$

где $f(t)$, $|t| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, — непрерывная функция, $S$ — сфера $x^2+y^2+z^2=1$.

**11.15.** Определить массу, распределенную:

1) по поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ с поверхностной плотностью $\rho = \rho_0 xyz$;

2) по сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$ с плотностью:

а) $\rho = \rho_0 \sqrt{x^2+y^2}$, б) $\rho = \rho_0 (x^2+y^2)$;

3) по части эллиптического параболоида $x^2+y^2=2z$, $z \leqslant 1$, с плотностью $\rho = \rho_0 z$;

4) по части гиперболического параболоида $x^2-y^2=2z$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=1$, с плотностью $\rho=\rho_0|z|$, $\rho_0 = \text{const}$.

**11.16.** Определить статический момент относительно плоскости $z=0$ однородной ($\rho=\rho_0=\text{const}$) поверхности:

1) $x+y+z=a$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

2) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geqslant 0$.

**11.17.** Определить аппликату центра масс полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geqslant 0$ с поверхностной плотностью:

1) $\rho=\rho_0$. 2) $\rho = \rho_0 \sqrt{x^2+y^2}$.

3) $\rho=\rho_0(x^2+y^2)$, $\rho_0=\text{const}$.

**11.18.** Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

2) $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant R$.

3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \leqslant x$.

4) $z=2-\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $z \geqslant 0$.

5) $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$, $u \in [0;\ 1]$, $v \in [0;\ \pi]$.

**11.19.** Вычислить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной ($\rho=\rho_0=\text{const}$) поверхности:

1) $x+y+z=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

2) $z=\dfrac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \leqslant r^2$.

**11.20.** Вычислить момент инерции однородной ($\rho=\rho_0=\text{const}$) поверхности:

1) $x^2+y^2=2az$, $z \leqslant a$, относительно оси $Oz$.

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{b^2}$, $0 \leqslant z \leqslant b$, относительно прямой $y=0$, $z=b$.

**11.21.** Найти величину силы, с которой однородная поверхность:

1) $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=z$, $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, $z \in [0;\ H]$;

2) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r$, $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, $r \in [a;\ b]$, $a>0$,

плотности $\rho_0$ притягивает точку массы $m$, помещенную в начале координат.

**11.22.** Найти величину силы, с которой однородная сфера радиуса $R$ и плотности $\rho_0$ притягивает точку массы $m$.

**11.23.** Определить электрический заряд, распределенный с плотностью $\rho = \rho_0 |z|$ по поверхности:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad |z| \leqslant c.$

2) $z^2 - x^2 - y^2 = a^2, \quad |z| \leqslant a\sqrt{2}.$

---

*Потенциалом в точке $M_0$ простого слоя*, распределенного с плотностью $\mu(x; y; z)$ на поверхности $S$, называют интеграл

$$V(x_0; y_0; z_0) = \iint_S \frac{\mu(x; y; z)}{r} dS, \qquad (17)$$

где $r$ — расстояние между точкой $M(x; y; z)$ поверхности $S$ и точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

---

**11.24.** Найти потенциал в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ простого слоя, распределенного:

1) на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с постоянной плотностью $\mu_0$;

2) на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$ с постоянной плотностью $\mu_1$ и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2$ с постоянной плотностью $\mu_2$, $R_1 < R_2$.

**11.25.** Найти в точке $(0; 0; z)$ потенциал простого слоя, распределенного с плотностью $\mu$:

1) на боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$, $\mu = \mu_0$;

2) на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\mu = \mu_0 z^2$.

Вычислить интегралы (**11.26—11.43**):

**11.26.** $\iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, $S$ — нижняя сторона круга $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $z = 0$.

**11.27.** $\iint_S (2z - x)\, dy\, dz + (x + 2z)\, dz\, dx + 3z\, dx\, dy$, $S$ — верхняя сторона треугольника $x + 4y + z = 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

**11.28.** 1) $\iint_S xz\, dx\, dy.$

2) $\iint_S yz\, dy\, dz + zx\, dz\, dx + xy\, dx\, dy.$

$S$ — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

**11.29.** $\iint\limits_S f_1(x)\,dy\,dz + f_2(y)\,dz\,dx + f_3(z)\,dx\,dy$, где $f_1$, $f_2$, $f_3$ — непрерывные функции, $S$ — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

**11.30.** 1) $\iint\limits_S y\,dz\,dx$. 2) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz$. $S$ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**11.31.** 1) $\iint\limits_S (x^5 + z)\,dy\,dz$. 2) $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$. $S$ — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leqslant 0$.

**11.32.** $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dy$, $S$ — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

**11.33.** $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, $S$ — внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

**11.34.** $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, $S$ — внутренняя сторона полусферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

**11.35.** $\iint\limits_S (x-1)^3\,dy\,dz$, $S$ — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, $z \leqslant 0$.

**11.36.** 1) $\iint\limits_S dz\,dx$. 2) $\iint\limits_S x\,dy\,dz$.

3) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz$. 4) $\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z}$.

$S$ — внешняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**11.37.** 1) $\iint\limits_S yz\,dz\,dx$. 2) $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx$.

$S$ — внешняя сторона части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geqslant 0$.

**11.38.** $\iint\limits_S (2x^2 + y^2 + z^2)\,dy\,dz$, $S$ — внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2 + z^2} \leqslant x \leqslant H$.

**11.39.** $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz + (z-x)\,dz\,dx + (x-y)\,dx\,dy$, $S$ — одна из сторон поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z \leqslant H$.

**11.40.** $\iint\limits_S yz^2\,dx\,dz$, $S$ — внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = r^2$, $y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant r$.

**11.41.** $\iint\limits_S yz\,dx\,dy + zx\,dy\,dz + xy\,dz\,dx$, $S$ — внешняя сторона части цилиндра $x^2+y^2=r^2$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

**11.42.** $\iint\limits_S x^6\,dy\,dz + y^4\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, $S$ — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z = x^2+y^2$, $z \leqslant 1$.

**11.43.** $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, $S$ — верхняя сторона части гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$, $|y| \leqslant x \leqslant a$.

С помощью теоремы Гаусса — Остроградского вычислить интегралы (**11.44—11.48**):

**11.44.** $\iint\limits_S (1+2x)\,dy\,dz + (2x+3y)\,dz\,dx + (3y+4z)\,dx\,dy$, где $S$:

1) внешняя сторона поверхности пирамиды

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0;$$

2) внутренняя сторона поверхности $|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = a$.

**11.45.** $\iint\limits_S z\,dx\,dy + (5x+y)\,dy\,dz$, где $S$:

1) внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$;

2) внутренняя сторона эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 = 1$;

3) внешняя сторона границы области $1 < x^2+y^2+z^2 < 4$.

**11.46.** $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где $S$:

1) внутренняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$;

2) внешняя сторона полной поверхности $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqslant \frac{z^2}{c^2}$, $0 \leqslant z \leqslant c$ (конус).

**11.47.** $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где $S$:

1) внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z \leqslant a$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

2) внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

**11.48.** $\iint\limits_S x^4\,dy\,dz + y^4\,dz\,dx + z^4\,dx\,dy$, где $S$:

1) сфера $x^2+y^2+z^2 = R^2$;

2) внешняя сторона полной поверхности полушара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$.

**11.49.** Доказать для объема $V$ тела, ограниченного гладкой поверхностью $S$, формулу

$$V=\left|\frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy\right|.$$

**11.50.** Используя формулу из задачи **11.49**, найти объем тела, ограниченного:

1) поверхностью

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=-u+a\cos v\quad (u\geqslant 0,\ a>0)$$

и плоскостями $x=0$, $z=0$;

2) поверхностью

$$x=(b+a\cos u)\cos v,\quad y=(b+a\cos u)\sin v;\quad z=a\sin u,$$
$$b\geqslant a>0;$$

3) поверхностью

$$x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v,$$
$$y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v,$$
$$z=c\sin u$$

и плоскостями $z=c$, $z=-c$.

Вычислить интегралы (**11.51—11.55**):

**11.51.** $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где $S$ — внешняя сторона поверхности, образованной вращением вокруг оси $z$ кривой:

1) $y=2-|z-1|$, $z\in[0;\ 2]$.
2) $x=1+\sin z$, $z\in[0;\ \pi]$.

**11.52.** $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где $S$:

1) нижняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$;
2) верхняя сторона части поверхности параболоида

$$x^2+y^2+2az=a^2,\quad z\geqslant 0;$$

3) нижняя сторона части конической поверхности

$$x^2+y^2=z^2,\quad 0<z\leqslant H.$$

**11.53.** $\iint\limits_S (z^2-y^2)\,dy\,dz+(x^2-z^2)\,dz\,dx+(y^2-x^2)\,dx\,dy$, $S$ — верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$.

**11.54.** $\iint\limits_S x^2y\,dy\,dz+xy^2\,dz\,dx+xyz\,dx\,dy$, $S$ — нижняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

**11.55.** $\iint\limits_S x^2y\,dy\,dz - xy^2\,dz\,dx + (x^2+y^2)z\,dx\,dy$, $\quad S$ — внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

**11.56.** Доказать, что если $S$ — замкнутая гладкая поверхность, $\boldsymbol{n}$ — ее внешняя нормаль, $\boldsymbol{l}$ — некоторый постоянный вектор, то

$$\iint\limits_S \cos(\widehat{\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{n}})\,dS = 0.$$

**11.57.** Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $S$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $S$, $\boldsymbol{r} = (\xi - x)\boldsymbol{i} + (\eta - y)\boldsymbol{j} + (\zeta - z)\boldsymbol{k}$.

1) Доказать формулу

$$\iint\limits_S \cos(\widehat{\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}})\,dS = 2\iiint\limits_G \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{|\boldsymbol{r}|}.$$

2) Вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x;\ y;\ z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}})}{r^2}\,dS, \quad (x;\ y;\ z) \notin S.$$

**11.58.** Доказать, что если $G \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $S$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль $S$, $u(x;\ y;\ z)$ и $v(x;\ y;\ z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в $\bar{G}$ функции, то

$$\iiint\limits_G \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} \\ u & v \end{vmatrix}\,dS.$$

**11.59.** Доказать, что если $u(x;\ y;\ z)$ — гармоническая функция в ограниченной замкнутой области $\bar{G}$ с гладкой границей $S$, $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $S$, $\boldsymbol{r} = (\xi - x)\boldsymbol{i} + (\eta - y)\boldsymbol{j} + (\zeta - z)\boldsymbol{k}$, то

$$u(x;\ y;\ z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(u\frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}})}{r^2} + \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)dS.$$

**11.60.** Доказать, что если $u(x;\ y;\ z)$ — функция, гармоническая внутри сферы $S$ радиуса $R$ с центром в точке $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, то

$$u(x_0;\ y_0;\ z_0) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(x;\ y;\ z)\,dS.$$

Используя формулу Стокса, вычислить интегралы (**11.61**—**11.68**):

**11.61.** $\int\limits_L (x+z)\,dx + (x-y)\,dy + x\,dz$, $L$ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(0;\ 0;\ 1)$.

**11.62.** $\int\limits_L y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, $L$ — граница треугольника с вершинами в точках $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;\ 1;\ 0)$.

**11.63.** 1) $\int\limits_L y\,dx + z\,dy + x\,dz$, 2) $\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} + z\,dz$, где $L$ — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;\ 0;\ 1)$.

**11.64.** $\int\limits_L (x^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz$, $L$ — кривая пересечения поверхности куба $|x| \leqslant a$ $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$ плоскостью $x+y+z=3a/2$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;\ 0;\ 0)$.

**11.65.** $\int\limits_L (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где:

1) $L$ — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y = x\operatorname{tg}\varphi$, $\varphi \in (0;\ \pi)$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;\ 0;\ 0)$.

2) $L$ — эллипс $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$, $a>0$, $c>0$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(1;\ 0;\ 0)$.

**11.66.** $\int\limits_L y\,dx - z\,dy + x\,dz$, $L$ — кривая $x^2+y^2+2z^2=2a^2$, $y-x=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;\ 0;\ 0)$.

**11.67.** $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$, $L$ — кривая $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $z>0$, $0<b<a$, ориентированная положительно относительно вектора $(0; 0; 1)$.

**11.68.** $\int\limits_L z^3\,dx + x^3\,dy + y^3\,dz$, $L$ — кривая $2x^2-y^2+z^2=a^2$, $x+y=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1; 0; 0)$.

Вычислить интегралы (**11.69—11.72**), если кривая $L$ ориентирована в направлении возрастания параметра $t$:

**11.69.** $\int\limits_L x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, $L$ — кривая $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0;\ 2\pi)$.

**11.70.** $\int\limits_L y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2\,dz$, $L$ — кривая $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, $t \in [0;\ 2\pi)$.

**11.71.** $\int\limits_L (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$, $L$ — кривая $x=$ $=a\sin^2 t$, $y=a\sin 2t$, $z=a\cos^2 t$, $t\in[0;\ \pi)$.

**11.72.** $\int\limits_L (x^2-yz)\,dx+(y^2-zx)\,dy+(z^2-xy)\,dz$, $L$ — кривая $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=ht/(2\pi)$, $t\in[0;\ 2\pi]$.

---

## § 12. Скалярные и векторные поля

Пусть $\Omega$ — область в трехмерном пространстве.

*Скалярным полем* на $\Omega$ называют числовую функцию $u(M)$, заданную на точках $M\in\Omega$.

*Векторным полем* на $\Omega$ называют векторную функцию $\boldsymbol{a}(M)$, заданную на точках $M\in\Omega$.

Если в пространстве введена какая-либо декартова система координат, то скалярное поле $u(M)$ или векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ на $\Omega$ становятся функциями координат точек:

$$u(x;\ y;\ z) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}(x;\ y;\ z)=(a_x(x;\ y;\ z);\ a_y(x;\ y;\ z);\ a_z(x;\ y;\ z)).$$

При выборе другой декартовой системы координат меняются, вообще говоря, координаты точек $M(x;\ y;\ z)$ на $M(x';\ y';\ z')$, но значения скалярного или векторного поля в точках не меняются, т. е.

$$u'(x';\ y';\ z')=u(x;\ y;\ z),\quad \boldsymbol{a}'(x';\ y';\ z')=\boldsymbol{a}(x;\ y;\ z).$$

Множество точек $M$, задаваемое уравнением $u(M)=\mathrm{const}$, называют *поверхностью уровня* скалярного поля $u$.

*Векторной* или *силовой линией* векторного поля $\boldsymbol{a}$ называют гладкую кривую, которая в каждой своей точке $M$ касается вектора поля $\boldsymbol{a}(M)$. Если $\boldsymbol{r}=(x;\ y;\ z)$ — радиус-вектор переменной точки векторной линии поля $\boldsymbol{a}=(a_x;\ a_y;\ a_z)$, то

$$\frac{dx}{a_x}=\frac{dy}{a_y}=\frac{dz}{a_z} \tag{1}$$

(*дифференциальные уравнения силовых линий*).

Пусть $\gamma$ — плоская кусочно-гладкая простая*) замкнутая кривая, нигде не касающаяся векторных линий поля $\boldsymbol{a}$. Поверхность, образованную векторными линиями, пересекающими $\gamma$, называют *векторной трубкой* поля $\boldsymbol{a}$.

**1. Символ $\nabla$. Операции над полями.** Векторный дифференциальный символ $\nabla$ называют *набла* по обозначающей его букве, а также *символом* или *оператором Гамильтона*. В декартовой системе координат

$$\nabla\equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

---

*) *Простой* называют кривую, не имеющую точек самопересечений.

Его компоненты $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ — символы частных производных — при замене одной декартовой системы на другую меняются по тем же правилам, что и компоненты векторов.

*Градиентом* дифференцируемого на $\Omega$ скалярного поля $u$ в точке $M \in \Omega$ называют вектор, обозначаемый $\operatorname{grad} u$ или $\nabla u$ и задаваемый в декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{grad} u \equiv \nabla u \equiv \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{3}$$

где производные поля $u$ вычислены в точке $M(x; y; z)$.

Значение $\operatorname{grad} u(M)$ не зависит от выбора декартовой системы координат, т. е. вектор-функция $\operatorname{grad} u$ является векторным полем на $\Omega$.

Для *производной* поля $u$ в точке $M$ *по направлению* произвольного единичного вектора $\boldsymbol{l}$ верна формула

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} = (\boldsymbol{l}, \operatorname{grad} u). \tag{4}$$

Вводя скалярный дифференциальный символ $(\boldsymbol{l}, \nabla)$, имеющий координатный вид

$$(\boldsymbol{l}, \nabla) \equiv l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{l} = (l_x;\ l_y;\ l_z)$, равенство (4) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} = (\boldsymbol{l}, \nabla) u. \tag{6}$$

Градиент поля в точке $M$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через $M$, в сторону возрастания поля, и его модуль $|\operatorname{grad} u| \equiv |\nabla u|$ равен наибольшей производной по направлению в этой точке.

Кроме символа (5) используют аналогичный скалярный дифференциальный символ, имеющий координатный вид

$$(\boldsymbol{b}, \nabla) \equiv b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

где $(b_x;\ b_y;\ b_z)$ — произвольное векторное поле. Результат его применения к дифференцируемому векторному полю $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{b}, \nabla)\boldsymbol{a} = b_x \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial z}, \tag{8}$$

являющийся вектор-функцией, называют иногда *градиентом* $\boldsymbol{a}$ *по* $\boldsymbol{b}$.

*Дивергенцией* или *расходимостью* дифференцируемого на $\Omega$ векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке $M \in \Omega$ называют число, обозначаемое $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ или $(\nabla, \boldsymbol{a})$ и задаваемое в декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv (\nabla, \boldsymbol{a}) \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ и производные вычислены в точке $M(x; y; z)$.

Значения числовой функции $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ в точках $\Omega$ не зависят от выбора декартовой системы координат, т. е. $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ — скалярное поле на $\Omega$.

*Ротором* (говорят также *вихрем, ротацией*) дифференцируемого на $\Omega$ векторного поля $\boldsymbol{a}$ в точке $M \in \Omega$ называют вектор, обозначаемый $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ или $[\nabla, \boldsymbol{a}]$ (а иногда $\nabla \times \boldsymbol{a}$) и задаваемый в декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \equiv [\nabla, \boldsymbol{a}] \equiv \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ и производные вычислены в точке $M(x;\ y;\ z)$.

Значения векторной функции $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ в точках $\Omega$ не зависят от выбора декартовых систем координат одинаковой ориентации, но $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ меняет знак при смене ориентации системы координат.

Для записи $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ используют такой же символический определитель, как и для векторного произведения векторов:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \equiv [\nabla, \boldsymbol{a}] \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{11}$$

При раскрытии определителя по первой строке результатом «умножения» символов второй строки на элементы третьей является дифференцирование, например

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot a_z = \frac{\partial a_z}{\partial y}.$$

Формулы (3), (9), (10) определяют над скалярными и векторными полями три основные дифференциальные операции первого порядка — действия $\nabla$ на скаляр или вектор. Для этих операций используют такие же обозначения, как и для произведений вектора на скаляр или вектор, и обладают эти операции такими же свойствами, как и эти произведения. Но последнее — с учетом, во-первых, невозможности перестановки символа $\nabla$ с тем скаляром или вектором, на который он действует, и, во-вторых, дифференциального характера символа $\nabla$.

Операции (3), (9), (10) линейны.

Результатом их применения к произведению двух сомножителей является сумма двух слагаемых, в каждом из которых $\nabla$ действует только на один из сомножителей. После отметки этого сомножителя (здесь будет использована вертикальная стрелка сверху) к получившемуся выражению применимы все те преобразования, что и для векторных выражений. В итоге преобразований символ $\nabla$ и отмеченный сомножитель должны быть совмещены под знаком одной из операций (3), (9), (10), (7). После этого метку можно снять.

П р и м е р 1. Пусть скалярное поле $u$, а также векторные поля $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ дифференцируемы на $\Omega$, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.

Показать, используя правила действия с $\nabla$, что:

1) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{a}) + u \operatorname{div} \boldsymbol{a}$,

т. е.

$$(\nabla, u\boldsymbol{a}) = (\nabla u, \boldsymbol{a}) + u(\nabla, \boldsymbol{a}). \tag{12}$$

2) $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \operatorname{rot} \boldsymbol{b})$,

т. е.

$$(\nabla, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{b}, [\nabla, \boldsymbol{a}]) - (\boldsymbol{a}, [\nabla, \boldsymbol{b}]). \tag{13}$$

3) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{c} \operatorname{div} \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}$,

т. е.

$$[\nabla, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = \boldsymbol{c}(\nabla, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}. \tag{14}$$

△ 1) Сначала преобразуем выражение $(\nabla, u\boldsymbol{a})$ с учетом дифференциального характера $\nabla$:

$$(\nabla, u\boldsymbol{a}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u}\boldsymbol{a}) + (\nabla, u\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}). \tag{15}$$

В первом слагаемом перенесем скаляр $\overset{\downarrow}{u}$ к $\nabla$, не переставляя их:

$$(\nabla, \overset{\downarrow}{u}\boldsymbol{a}) = (\nabla\overset{\downarrow}{u}, \boldsymbol{a}).$$

Здесь $\nabla$ соединен операцией (3) с $u$, поэтому опускаем метку:

$$(\nabla\overset{\downarrow}{u}, \boldsymbol{a}) = (\nabla u, \boldsymbol{a}) = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{a}).$$

Во втором слагаемом из (15) выносим скаляр $u$, переставляя его с $\nabla$:

$$(\nabla, u\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}) = u(\nabla, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}),$$

и, поскольку $\nabla$ соединен операцией (9) с вектором $\boldsymbol{a}$, опускаем метку:

$$(\nabla, u\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}) = u(\nabla, \boldsymbol{a}) = u \operatorname{div} \boldsymbol{a}.$$

Складывая результаты, получаем равенство (12).

2) Имеем

$$(\nabla, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}]) + (\nabla, [\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}]).$$

Для первого слагаемого воспользуемся формулой циклической перестановки в смешанном произведении

$$(\boldsymbol{p}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}])$$

и получим

$$(\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{b}, [\nabla, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}]).$$

Здесь $\nabla$ соединен с $\boldsymbol{a}$ операцией (10), поэтому метку можно опустить:

$$(\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}]) = (\boldsymbol{b}, [\nabla, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{b}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a}).$$

Во втором слагаемом сначала совершим перестановку

$$[\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}] = -[\overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a}],$$

затем преобразуем его, как и первое, и получим

$$(\nabla, [\boldsymbol{a}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}]) = -(\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{a}]) = -(\boldsymbol{a}[\nabla, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{b}}]) =$$
$$= -(\boldsymbol{a}, [\nabla, \boldsymbol{b}]) = -(\boldsymbol{a}, \operatorname{rot} \boldsymbol{b}).$$

Сложив результаты, придем к равенству (13).

3) Имеем

$$[\nabla, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{\boldsymbol{c}}, \boldsymbol{a}]] + [\nabla, [\boldsymbol{c}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}]].$$

Поскольку $\boldsymbol{c} = \mathbf{const}$, результат действия $\nabla$ на $\boldsymbol{c}$ есть нуль, поэтому и первое слагаемое равно нулю. Для второго слагаемого воспользуемся формулой преобразования двойного векторного произведения:

$$[\boldsymbol{p}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

Получим

$$[\nabla, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = [\nabla, [\boldsymbol{c}, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}]] = (\nabla, \overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}})\boldsymbol{c} - (\nabla, \boldsymbol{c})\overset{\downarrow}{\boldsymbol{a}}.$$

Переставив $\nabla$ и $\boldsymbol{c}$ в произведении $(\nabla, \boldsymbol{c})$ (это будет символ вида (7)), придем к требуемому результату:

$$[\nabla, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = (\nabla, \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{c}, \nabla)\boldsymbol{a}. \blacktriangle$$

Символ $\nabla$ может встречаться в выражении не раз, создавая дифференциальные символы второго и более высоких порядков.

Для скалярного символа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv (\nabla, \nabla) \equiv \nabla^2 \tag{16}$$

вводят обозначение $\Delta$ и называют его *оператором Лапласа* или *лапласианом*. Легко видеть, что

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{17}$$

Символ $[\nabla, \nabla]$, как нетрудно проверить, нулевой, что естественно с точки зрения векторной алгебры. Имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = \boldsymbol{o}, \tag{18}$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = (\nabla, [\nabla, \boldsymbol{a}]) = ([\nabla, \nabla], \boldsymbol{a}) = 0. \tag{19}$$

**2. Циркуляция и поток векторного поля.** Пусть $\boldsymbol{a}$ — непрерывное векторное поле в области $\Omega$, $\Gamma$ — кусочно-гладкая ориентированная кривая в $\Omega$. *Линейным интегралом от* $\boldsymbol{a}$ *по* $\Gamma$ (*работой* *поля вдоль* Г) называют интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (\boldsymbol{a},\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\Gamma} a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz. \tag{20}$$

Если Г — замкнутая кривая, то этот интеграл называют *циркуляцией поля* $\boldsymbol{a}$ по Г.

Пусть $S$ — кусочно-гладкая ориентированная поверхность *) в $\Omega$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, задающий ее ориентацию, $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$. *Потоком векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *через* $S$ *в направлении* $\boldsymbol{n}$ называют интеграл

$$\iint\limits_{S} (\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,dS = \iint\limits_{S} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,dS. \tag{21}$$

**3. Интегральные формулы.** Пусть $u$ — непрерывно дифференцируемое скалярное поле в $\Omega$, Г — кусочно-гладкая ориентированная кривая в $\Omega$ с началом $A$ и концом $B$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} (\operatorname{grad} u,\ d\boldsymbol{r}) = \int\limits_{\Gamma} (\nabla u,\ d\boldsymbol{r}) = u(B) - u(A). \tag{22}$$

Если кривая Г лежит на поверхности уровня поля $u$, то работа поля $\operatorname{grad} u$ вдоль Г равна нулю.

Пусть $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле в области $\Omega$, $S$ — кусочно-гладкая ориентированная единичным вектором нормали $\boldsymbol{n}$ поверхность в $\Omega$ с краем $\partial S$, ориентированным согласованно с ориентацией поверхности (§ 11). Тогда по *формуле Стокса* (формула (14) § 11 с учётом формулы (10))

$$\oint\limits_{\partial S} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{S} \boldsymbol{n}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dS = \iint\limits_{S} (\boldsymbol{n},\ [\nabla,\ \boldsymbol{a}])\,dS. \tag{23}$$

Таким образом, циркуляция поля $\boldsymbol{a}$ по краю поверхности $S$ равна потоку ротора поля $\boldsymbol{a}$ через эту поверхность.

Пусть точка $M \in \Omega$, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор. В плоскости, проходящей через $M$ перпендикулярно $\boldsymbol{n}$, рассмотрим те ее области $S$, которые содержат $M$ и для которых верна формула (23). Обозначим $d(S)$ — диаметр, $\mu S$ — площадь $S$. Справедлива формула

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a}(M) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{\mu S} \int\limits_{\partial S} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}. \tag{24}$$

Здесь $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{a} = (\operatorname{rot}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$ — проекция $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{n}$.

---

*) В этом параграфе рассматриваются поверхности, ограниченные как множества в пространстве.

При тех же предположениях о поверхности $S$, что и в формуле (23), для непрерывно дифференцируемых полей $\boldsymbol{a}$ и $u$ верны формулы

$$\iint_S [[\boldsymbol{n}, \nabla], \boldsymbol{a}]\, dS = -\oint_{\partial S} [\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{r}], \tag{25}$$

$$\iint_S [\boldsymbol{n}, \nabla u]\, dS = \oint_{\partial S} u\, d\boldsymbol{r}. \tag{26}$$

Пусть $G$ — ограниченная область, $\bar{G} \subset \Omega$, с кусочно-гладкой границей $\partial G$, ориентированной внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. По *формуле Гаусса — Остроградского* с учетом обозначения (9) имеем

$$\iint_{\partial G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS = \iiint_G \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV = \iiint_G (\nabla, \boldsymbol{a})\, dV, \tag{27}$$

т. е. поток поля $\boldsymbol{a}$ через границу области равен интегралу от дивергенции поля $\boldsymbol{a}$ по этой области.

Пусть точка $M \in \Omega$, рассмотрим совокупность содержащих $M$ областей $G \subset \Omega$, для которых справедлива формула (27). Пусть $d(G)$ — диаметр, $\mu G$ — объем $G$. Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) = \lim_{d(G) \to 0} \frac{1}{\mu G} \iint_{\partial G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS. \tag{28}$$

При тех же условиях на область $G$, что и в формуле (27), для непрерывно дифференцируемых полей $\boldsymbol{a}$, $u$ и $v$ верны формулы

$$\iiint_G [\nabla, \boldsymbol{a}]\, dV = \iint_{\partial G} [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}]\, dS, \tag{29}$$

$$\iiint_G \nabla u\, dV = \iint_{\partial G} \boldsymbol{n} u\, dS, \tag{30}$$

$$\iiint_G (\nabla u, \nabla v)\, dV = \iint_{\partial G} u(\boldsymbol{n}, \nabla v)\, dS - \iiint_G u\, \Delta v\, dV, \tag{31}$$

$$\iiint_G (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dV = \iint_{\partial G} (u \nabla v - v \nabla u, \boldsymbol{n})\, dS. \tag{32}$$

Равенства (31), (32) называют *формулами Грина*. Из них следует, что

$$\iiint_G |\nabla u|^2\, dV = \iint_{\partial G} u(\boldsymbol{n}, \nabla u)\, dS - \iiint_G u\, \Delta u\, dV, \tag{33}$$

$$\iiint_G \Delta u\, dV = \iint_{\partial G} (\boldsymbol{n}, \nabla u)\, dS. \tag{34}$$

Пример 2. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ через поверхность $S=\{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{r}\}$, нормаль на которой направлсна от начала координат.

△ Очевидно, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$. Воспользуемся теоремой Гаусса — Остроградского. Рассмотрим область $G$ — «криволинейный тетраэдр» $OABC$ (рис. 33). Часть его границы, лежащую в плоскости $Oxy$, обозначим $S_1$, в плоскости $Oyz$ — $S_2$, в плоскости $Ozx$ — $S_3$. Потоки поля $\boldsymbol{a}$ через $S$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ (нормаль — внешняя к $G$) обозначим соответственно $\Pi$, $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$. По теореме Гаусса — Остроградского

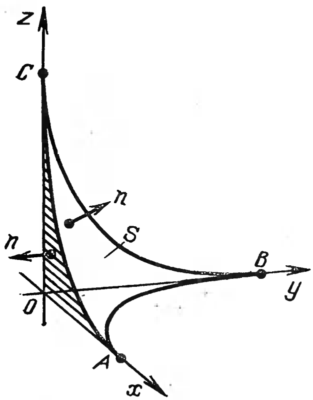


Рис. 33

$$\iint\limits_{\partial G}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,dS=\iiint\limits_{G}\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV=0,$$

т. е. $\Pi+\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3=0$, а $\Pi=-(\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3)$.

Вычислим, например, $\Pi_3$:

$$\Pi_3=\iint\limits_{S_3}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{n})\,dS.$$

Здесь $\boldsymbol{n}=(0;\ -1;\ 0)$, $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$. За параметры на $S_3$ — криволинейном треугольнике $AOC$ — возьмем $x$ и $z$. Дуга $AC$ задается уравнением $\sqrt{x}+\sqrt{z}=\sqrt{r}$, т. е. $x=(\sqrt{r}-\sqrt{z})^2$, $0\leqslant z\leqslant r$. Находим

$$\Pi_3=\iint\limits_{OAC}(-z)\,dx\,dz=-\int\limits_0^r z\,dz\int\limits_0^{(\sqrt{r}-\sqrt{z})^2}dx=-\frac{r^3}{30}.$$

Таковы же $\Pi_1$ и $\Pi_2$. Следовательно, $\Pi=3\cdot\frac{r^3}{30}=\frac{r^3}{10}$. ▲

Пример 3. Доказать формулу (31).

△ По формуле (12), полагая $\boldsymbol{a}=\nabla v$, получаем

$$\operatorname{div}(u\nabla v)=(\nabla u,\ \nabla v)+u(\nabla,\ \nabla v).$$

Отсюда, учитывая, что $(\nabla,\ \nabla v)=\operatorname{div}\operatorname{grad}v=\Delta v$, находим

$$(\nabla u,\ \nabla v)=\operatorname{div}(u\nabla v)-u\,\Delta v,$$

и, следовательно,

$$\iiint\limits_G(\nabla u,\ \nabla v)\,dV=\iiint\limits_G\operatorname{div}(u\nabla v)\,dV-\iiint\limits_G u\,\Delta v\,dV.$$

Полагая $\boldsymbol{a}=u\nabla v$ и применяя к первому слагаемому правой части формулу (27), получаем (31). ▲

Пример 4. Пусть $\gamma$ — часть линии пересечения эллипсоида $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ с цилиндром $x^2+y^2=1$, лежащая в замкнутой области $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (рис. 34) и ориентированная по возрастанию ординат точек. Найти работу поля $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$: 1) вдоль $\gamma$, 2) вдоль $\gamma_1$ — части $\gamma$, лежащей в первом октанте.

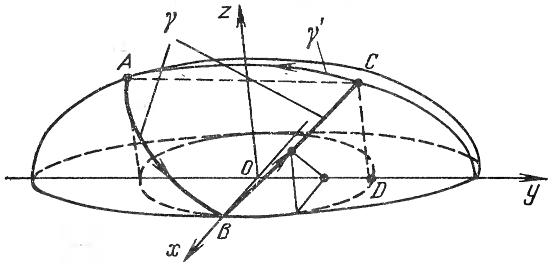


Рис. 34

△ 1) Легко найти, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. Воспользуемся формулой Стокса (23). Замкнем $\gamma$ дугой $\gamma' = AC$ (рис. 34), лежащей в пересечении эллипсоида с плоскостью $Oyz$. Контур $\Gamma = ABCA$ — это край части $S$ поверхности эллипсоида. По формуле (23)

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int_{S} (\boldsymbol{n}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a})\, dS = 0.$$

Отсюда

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} + \int_{\gamma'} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0.$$

Дугу $\gamma'$ замкнем отрезком $AC$, направленным от $A$ к $C$. Получившийся контур служит краем части плоскости $Oyz$. Из того, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, как и выше, получаем

$$\int_{\gamma'} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} + \int_{AC} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0.$$

На отрезке $AC$

$$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{k}, \quad d\boldsymbol{r} = (0;\ dy;\ 0),$$

поэтому

$$\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{AC} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0.$$

Отсюда следует, что и

$$\int_{\gamma'} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0, \quad \int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0.$$

2) I способ. Вычислим работу по $\gamma'$ непосредственно, используя параметризацию $\gamma'$. Полагая

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,$$

из уравнения эллипсоида получаем $z=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi$. Тогда на $\gamma'$

$$\boldsymbol{a}=\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\boldsymbol{k},$$

$$d\boldsymbol{r}=\left(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\boldsymbol{k}\right)d\varphi,$$

поэтому

$$\int\limits_{\gamma'}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(-\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+\frac{3}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi=3/8.$$

II способ. Контур $\gamma'$ взаимно однозначно проектируется на ось $Oy$. Опустим перпендикуляры из точек контура на эту ось. Они образуют гладкую поверхность, край которой состоит кроме $\gamma'$ еще из ломаной $CDOB$. Используя формулу (23) и то, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$, получаем

$$\int\limits_{\gamma'}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}+\int\limits_{CD}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}+\int\limits_{DO}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}+\int\limits_{OB}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=0.$$

На $OB$ $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{j}$, $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\,dx$, поэтому

$$\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{OB}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=0.$$

Аналогично $\int\limits_{DO}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=0$. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma'}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=-\int\limits_{CD}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_{DC}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}.$$

На $DC$ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}\,dz$, поэтому

$$\int\limits_{CD}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int\limits_{0}^{\sqrt{3}/2}z\,dz=3/8.$$

Таким образом, как и ранее, $\int\limits_{\gamma'}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=3/8$. ▲

**4. Потенциальные и соленоидальные поля.** Все поля в этом пункте считаем непрерывно дифференцируемыми.

Поле $\boldsymbol{a}$ в $\Omega$ называют *безвихревым*, если

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o} \quad \text{в } \Omega.$$

Поле $\boldsymbol{a}$ в $\Omega$ называют *потенциальным*, если существует на $\Omega$ скалярное поле $u$ такое, что

$$\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}u. \tag{35}$$

Функцию $u$ называют *потенциалом* поля $\boldsymbol{a}$.

Для потенциальности поля $\boldsymbol{a}$ в $\Omega$ необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому кусочно-гладкому замкнутому контуру равнялась нулю:

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = 0.$$

Если это условие выполнено, то потенциал поля определяется по формуле

$$u = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} + \text{const}, \tag{36}$$

где $M_0$ — фиксированная точка $\Omega$, интеграл берется по любой кусочно-гладкой кривой, соединяющей $M_0$ и $M$.

Условие

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \tag{37}$$

необходимо для потенциальности поля, но, вообще говоря, не достаточно.

Если область $\Omega$ односвязна, то условие (37) достаточно для потенциальности поля. Говорят, что область $\Omega$ *односвязна*, если любой принадлежащий ей кусочно-гладкий замкнутый контур можно стянуть в точку этой области так, что во всех промежуточных положениях при стягивании контур будет оставаться в $\Omega$ (в этом случае говорят, что любой замкнутый контур гомотопен точке). Например, всякая выпуклая область односвязна.

В односвязной области безвихревое поле потенциально.

Поле $\boldsymbol{a}$ в $\Omega$ называют *соленоидальным*, если для любой области $G \subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial G$ поток поля $\boldsymbol{a}$ через эту границу равен нулю, т. е.

$$\iint_{\partial G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS = 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к $\partial G$.

Для соленоидальности поля необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{38}$$

Векторное поле $\boldsymbol{A}$ называют *векторным потенциалом* поля $\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$.

Условие (38) необходимо, но, вообще говоря, не достаточно для существования векторного потенциала.

Любое гладкое поле $\boldsymbol{a}$ в $\Omega$ является суммой безвихревого и соленоидального полей (*теорема Гельмгольца*).

Потенциальное соленоидальное поле называют *гармоническим* (*лапласовым*). В односвязной области поле $\boldsymbol{a}$, у которого

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0,$$

гармонично.

**12.1.** Найти поверхность уровня поля $u = x^2 - y^2 + z^2$, содержащую точку: а) (1; 1; 1); б) (1; 2; 1).

**12.2.** Написать уравнение нормали в точке (2; 2; —2) к поверхности уровня поля $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, проходящей через эту точку.

**12.3.** Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{r} = (x;\ y;\ z)$. Найти поверхность уровня поля:

1) $u = \frac{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})}{(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r})}$.

2) $u = e^{(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r})}$.

**12.4.** Найти поверхности уровня поля $u = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^3}$ и $\max u$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**12.5.** Найти поверхности уровня поля

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

и $\max u$, $\min u$ в шаре $(x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 1$.

**12.6.** Найти $\operatorname{grad} u(M_0)$, если:

1) $u = xy + yz + zx$; $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

2) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $M_0(1;\ 1;\ -1)$.

3) $u = \frac{9(x + y + z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $M_0(1;\ -2;\ -2)$.

4) $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$; $M_0(0;\ 0;\ 0)$.

**12.7.** В каких точках $\operatorname{grad}(x + y^2 + 18z^3 - 3xyz)$: а) перпендикулярен оси $Oz$; б) параллелен оси $Oz$; в) равен нулю?

**12.8.** Найти угол между $\operatorname{grad} u(M_1)$ и $\operatorname{grad} u(M_2)$, если:

1) $u = (x + y)e^{x+y}$; $M_1(0;\ 0)$, $M_2(1;\ 1)$.

2) $u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y + z}$; $M_1(1;\ 1;\ 0)$, $M_2(-1;\ 0;\ 1)$.

3) $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$; $M_1(1;\ 2;\ 2)$, $M_2(-3;\ 1;\ 0)$.

4) $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $M_1\left(3;\ \sqrt{3};\ -2\right)$, $M_2\left(\sqrt{3};\ 1;\ 2\sqrt{3}\right)$.

**12.9.** На поверхности уровня поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, проходящей через точку (1; 1; 1), найти наименьшее значение $|\operatorname{grad} u|$.

**12.10.** Найти $\inf|\operatorname{grad} u|$ и $\sup|\operatorname{grad} u|$ в области $1 < z < 2$, если $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

**12.11.** Пусть $u$ и $v$ — дифференцируемые поля, $\alpha$ и $\beta$ — числа. Доказать, что:

1) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad}u+\operatorname{grad}v$.
2) $\operatorname{grad}(\alpha u)=\alpha\operatorname{grad}u$.
3) $\operatorname{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\operatorname{grad}u+\beta\operatorname{grad}v$.
4) $\operatorname{grad}(uv)=v\operatorname{grad}u+u\operatorname{grad}v$.
5) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\operatorname{grad}u-u\operatorname{grad}v}{v^2}$, $\quad v\neq 0$.

**12.12.** Указать в $\mathbb{R}^3$ такие дифференцируемые поля $u$ и $v$, что векторы $\nabla u$ и $\nabla v$ не коллинеарны ни в одной точке (для обычного вектора $\boldsymbol{p}$ векторы $\boldsymbol{p}u$ и $\boldsymbol{p}v$ обязательно коллинеарны).

**12.13.** Пусть $u$ — дифференцируемое поле, $f(t)$ — дифференцируемая функция, $t\in\mathbb{R}$. Доказать, что

$$\operatorname{grad}f(u)=f'(u)\operatorname{grad}u.$$

**12.14.** Пусть $u$ и $v$ — дифференцируемые поля, $f(t;\ s)$ — дифференцируемая функция, $(t;\ s)\in\mathbb{R}^2$. Доказать, что

$$\operatorname{grad}f(u;\ v)=\frac{\partial f}{\partial t}(u;\ v)\operatorname{grad}u+\frac{\partial f}{\partial s}(u;\ v)\operatorname{grad}v.$$

**12.15.** Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$, $r=|\boldsymbol{r}|$. Найти $\operatorname{grad}u$, если:

1) $u=r$. 2) $u=r^2$.
3) $u=1/r$. 4) $u=\ln r$.
5) $u=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})$. 6) $u=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r})$.
7) $u=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r})$. 8) $u=|[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}]|^2$.

**12.16.** Доказать, что $\operatorname{grad}u(M)$ перпендикулярен поверхности уровня поля $u$, проходящей через точку $M$.

**12.17.** Пусть $u$ — непрерывно дифференцируемое поле, $u_0=u(M_0)$, $\nabla u(M_0)\neq 0$, $l_0$ — нормаль в точке $M_0$ к поверхности уровня $u=u_0$.

1) Доказать, что существуют такие окрестность точки $M_0$ и число $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, в этой окрестности есть только одна точка пересечения $M=M(\varepsilon)$ нормали $l_0$ с поверхностью уровня $u=u_0+\varepsilon$.

2) Найти длину отрезка $MM_0$ с точностью до $o(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$.

**12.18.** Пусть $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиус-векторы двух фиксированных точек, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$,

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|=\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+(z+z_j)^2},\quad j=1,\ 2,$$

$$u=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|.$$

Доказать, что $\operatorname{grad}u$ в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ составляет равные углы с векторами $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2$. Объяснить, используя это, оптическое свойство эллипсоида.

**12.19.** Пусть функция $f(r)$ дифференцируема, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$, $r=|\boldsymbol{r}|$. Доказать, что

$$\nabla f(r)=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

**12.20.** Пусть вектор-функции $\boldsymbol{a}(r)$ и $\boldsymbol{b}(r)$ дифференцируемы, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z$, $r=|\boldsymbol{r}|$. Доказать, что:

1) $\nabla(\boldsymbol{a}(r),\ \boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}(r)+(\boldsymbol{a}'(r),\ \boldsymbol{r})\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

2) $\nabla(\boldsymbol{a}(r),\ \boldsymbol{b}(r))=((\boldsymbol{a}',\ \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}'))\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

**12.21.** Выразить $\operatorname{grad} u$:

1) в цилиндрических координатах $r$, $\varphi$, $z$,

2) в сферических координатах $r$, $\varphi$, $\psi$,

используя соответствующие орты $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ и $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\psi$, касательные к координатным линиям.

**12.22.** Проверить, что вектор $\operatorname{grad} u$ не зависит от выбора декартовой системы координат.

**12.23.** Доказать, что для дважды дифференцируемых полей $u$ и $v$

$$\Delta(uv)\equiv\nabla^2(uv)=v\nabla^2u+2(\nabla u,\ \nabla v)+u\nabla^2v.$$

**12.24.** Найти производную поля $u$ по направлению единичного вектора $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$, если $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\boldsymbol{r}=(x;\ y;\ z)$:

1) $u=r$. 2) $u=1/r$.

3) $u=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{a}=\mathbf{const}$. 4) $u=f(r)$.

**12.25.** Найти производную поля $u=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ в точке $M(x;\ y;\ z)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

**12.26.** Пусть $u$ и $v$ — дифференцируемые поля. Найти производную поля $u$ по направлению вектора $\operatorname{grad} v$.

**12.27.** По какой кривой следует двигаться из точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, чтобы поле $u=\dfrac{x^2}{2}+y^2-z^2$ имело наибыстрейшее убывание, если:

а) $M_0(1;\ 1;\ 0)$; б) $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

**12.28.** Найти линии наибыстрейшего изменения плоских полей:

1) $u=x^2-y^2$. 2) $u=xy$.

3) $u=\dfrac{x^2}{2}+y^2$. 4) $u=y^2/x$.

**12.29.** Найти линии наибыстрейшего изменения трехмерных полей:

1) $u=x^2+2y^2+z^2$.

2) $u=x^2+y^2+z^2$.

3) $u=xyz$.

**12.30.** Пусть в звездной*) относительно точки $A$ области $\Omega$ задано гладкое поле $u$ и $|\nabla u| \leqslant c$. Доказать, что для любой точки $B \subset \Omega$

$$|u(B) - u(A)| \leqslant c|B - A|,$$

где $|B - A|$ — расстояние между $A$ и $B$. Для выпуклой области доказать справедливость этого неравенства для любых $A$ и $B$ из $\Omega$.

Найти векторные линии поля $\boldsymbol{a}$ (12.31—12.32), если

**12.31.** 1) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}$. 2) $\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$.

3) $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. 4) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$.

5) $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$.

**12.32.** 1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$.

2) $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} = \mathbf{const}$.

3) $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$, $r = |\boldsymbol{r}|$.

4) $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]$, $\boldsymbol{c} = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$.

5) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — постоянные векторы, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$.

6) $\boldsymbol{a} = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$.

7) $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

**12.33.** Найти векторную линию поля $\boldsymbol{a}$, проходящую через точку $M$, если:

1) $\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, $c = \mathrm{const}$, $M(1;\ 0;\ 0)$.

2) $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - y^3\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$; $M(1/2;\ -1/2;\ 1)$.

3) $\boldsymbol{a} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$; $M(1;\ 1;\ 0)$.

**12.34.** Найти векторные линии напряженности магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника постоянного тока.

**12.35.** Для поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$ найти уравнение векторной трубки, содержащей окружность $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

**12.36.** Для поля $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{z} - \dfrac{\boldsymbol{k}}{y}$ найти векторную трубку, содержащую кривую $y = z$, $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

**12.37.** Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать их и проверить, используя символ $\nabla$ и правила действия с ним ($\alpha$, $\beta$ — числа, $u$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля):

1) $\operatorname{div}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha \operatorname{div}\boldsymbol{a} + \beta \operatorname{div}\boldsymbol{b}$.

2) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a}) = (\operatorname{grad} u, \boldsymbol{a}) + u \operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

---

*) Область называют *звездной* относительно точки $A$, если для любой точки $B$ этой области отрезок $AB$ принадлежит области.

**12.38.** Полагая $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, если:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$. 2) $\boldsymbol{a}=r\boldsymbol{r}$.

3) $\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. 4) $\boldsymbol{a}=\dfrac{-x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5) $\boldsymbol{a}=(6x^2y^2-z^3+yz-5)\boldsymbol{i}+(4x^3y+xz+2)\boldsymbol{j}+$
$+(xy-3xz^2-3)\boldsymbol{k}$.

**12.39.** Выразить в координатной форме $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$.

**12.40.** Найти:

1) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}u)$. 2) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad}v)$.

**12.41.** Найти ($\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$):

1) $\operatorname{div}\operatorname{grad}r^2$. 2) $\operatorname{div}\operatorname{grad}(1/r)$.

3) $\operatorname{div}r\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}=\mathbf{const}$. 4) $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{r})$.

5) $\operatorname{div}\operatorname{grad}f(r)$. 6) $\operatorname{div}(f(r)\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{c}=\mathbf{const}$.

7) $\operatorname{div}[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}]$, $\boldsymbol{c}=\mathbf{const}$. 8) $\operatorname{div}[\boldsymbol{r},[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r}]]$, $\boldsymbol{c}=\mathbf{const}$.

**12.42.** Решить уравнение ($\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$):

1) $\operatorname{div}(u(r)\boldsymbol{r})=0$.

2) $\operatorname{div}\operatorname{grad}u(r)=0$.

3) $\operatorname{div}(u(r)\boldsymbol{r})=\lambda u(r)$, $\lambda\neq 3$.

**12.43.** Найти дивергенцию гравитационного поля нескольких точечных масс.

**12.44.** Среда вращается как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. Найти в фиксированный момент времени дивергенцию поля линейных скоростей $\boldsymbol{v}$ и поля ускорений $\boldsymbol{w}$ точек среды.

**12.45.** Доказать, что $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ не зависит от выбора декартовой системы координат.

**12.46.** Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ плоского поля $\boldsymbol{a}$ в полярных координатах.

**12.47.** Найти $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$ трехмерного поля:

1) в цилиндрических координатах;

2) в сферических координатах.

**12.48.** Найти $\left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$:

1) $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(r)$. 2) $\operatorname{div}(u(r)\boldsymbol{a}(r))$.

**12.49.** Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать и проверить их, используя символ $\nabla$ и правила действия с ним ($\alpha$, $\beta$ — числа, $u$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор):

1) $\operatorname{rot}(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})=\alpha\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+\beta\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

2) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{c})=[\operatorname{grad}u,\ \boldsymbol{c}]$.

3) $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+[\operatorname{grad}u,\ \boldsymbol{a}]$.

4) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}]=\boldsymbol{c}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c},\ \nabla)\boldsymbol{a}$.

5) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b},\ \nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a},\ \nabla)\boldsymbol{b}$.

6) $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{b})$.

**12.50.** Найти ($\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы, $u(r)$ — дифференцируемое поле):

1) $\operatorname{rot} \boldsymbol{r}$. 2) $\operatorname{rot}(r\boldsymbol{a})$.

3) $\operatorname{rot}((\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b})$. 4) $\operatorname{rot}(u(r)\boldsymbol{a})$.

5) $\operatorname{rot}(u(r)\boldsymbol{r})$.

**12.51.** Вычислить $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ в точке $M_0$, если:

1) $\boldsymbol{a} = xyz\boldsymbol{i} + (2x + 3y - z)\boldsymbol{j} + (x^2 + z^2)\boldsymbol{k}$; $M_0(1; 3; 2)$.

2) $\boldsymbol{a} = \frac{y}{z}\boldsymbol{i} + \frac{z}{x}\boldsymbol{j} + \frac{x}{y}\boldsymbol{k}$; $M_0(1; 2; -2)$.

**12.52.** Для любого вектора $\boldsymbol{p}$ векторы $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}]$ и $\boldsymbol{a}$ перпендикулярны (если они не нулевые). Верно ли это для векторов $[\nabla, \boldsymbol{a}]$ и $\boldsymbol{a}$?

**12.53.** Найти угол между $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_1)$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_2)$, если:

1) $\boldsymbol{a} = (x^2 + y^2)\boldsymbol{i} + (y^2 + z^2)\boldsymbol{j} + (z^2 + x^2)\boldsymbol{k}$;

$$M_1(1; 2; 3), \quad M_2(1; 1; -1).$$

2) $\boldsymbol{a} = z^3\boldsymbol{i} + (x^3 + y^3)\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$; $M_1(1; 2; 0)$, $M_2(1; 12; 4)$.

**12.54.** Найти:

1) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{const}$.

2) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{r}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]]$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{const}$.

**12.55.** Проверить в координатной форме:
1) формулу (18); 2) формулу (19).

**12.56.** Равенство

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$$

проверить в координатной форме, а также записать и получить его, используя символ $\nabla$ и правила действия с ним.

**12.57.** Найти $\operatorname{rot}\operatorname{grad}(1/r)$.

**12.58.** Получить формулы:

1) $\nabla(\nabla, u\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \nabla)\nabla u$, $\boldsymbol{c} = \mathbf{const}$.

2) $\nabla(\nabla, u\boldsymbol{a}) = u\nabla(\nabla, \boldsymbol{a}) + (\nabla, \boldsymbol{a})\nabla u +$
$$+ [\nabla u, [\nabla, \boldsymbol{a}]] + (\nabla u, \nabla)\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}, \nabla)\nabla u.$$

3) $[\nabla, [\nabla u, \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{c}, \nabla)\nabla u - \boldsymbol{c}\Delta u$.

**12.59.** Показать, что:
1) $\operatorname{div}[\nabla u, \nabla v] = 0$.
2) Векторы $\boldsymbol{a} = u \operatorname{grad} v$ и $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ перпендикулярны.

**12.60.** Найти компоненты $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ плоского поля $\boldsymbol{a}$ в полярных координатах.

**12.61.** Найти компоненты $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ трехмерного поля $\boldsymbol{a}$:
1) в цилиндрических координатах;
2) в сферических координатах.

**12.62.** Найти $\operatorname{rot}(u(r)\,\boldsymbol{a}(r))$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**12.63.** Записать $\Delta u=\operatorname{div}\operatorname{grad}u$:

1) в цилиндрических координатах;

2) в сферических координатах.

**12.64.** Среда вращается как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. Пусть $\boldsymbol{v}$ — поле линейных скоростей точек в фиксированный момент времени. Найти $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ (воспользоваться цилиндрическими координатами).

**12.65.** В простейшем случае *система уравнений Максвелла* электромагнитного поля имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=[\nabla,\ \boldsymbol{H}],\quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}=[\nabla,\ \boldsymbol{E}],$$
$$(\nabla,\ \boldsymbol{E})=0,\quad (\nabla,\ \boldsymbol{H})=0.$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ — векторные поля электрической и магнитной напряженности, $\varepsilon$, $\mu$, $c=\text{const}>0$. Полагая все функции достаточно гладкими, доказать, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{E},\quad \frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{H}.$$

**12.66.** Пусть в области $\Omega$ введена ортогональная система криволинейных координат $(\xi;\ \eta;\ \zeta)$:

$$x=x(\xi;\ \eta;\ \zeta),\quad y=y(\xi;\ \eta;\ \zeta),\quad z=z(\xi;\ \eta;\ \zeta),$$

где правые части — непрерывно дифференцируемые функции. Пусть $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\zeta$ — единичные орты этой системы (векторы, касательные к координатным линиям и направленные по возрастанию координат, $\boldsymbol{e}_\xi\perp\boldsymbol{e}_\eta$, $\boldsymbol{e}_\eta\perp\boldsymbol{e}_\zeta$, $\boldsymbol{e}_\zeta\perp\boldsymbol{e}_\xi$). Пусть $H_\xi$, $H_\eta$, $H_\zeta$ — *коэффициенты Ламэ*, т. е. $H_\xi=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2}$ и т. д. Доказать, что

1) $$\operatorname{grad}u=\frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi}\boldsymbol{e}_\xi+\frac{1}{H_\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_\eta+\frac{1}{H_\zeta}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\boldsymbol{e}_\zeta. \tag{39}$$

2) $$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\left(\frac{\partial(H_\eta H_\zeta a_\xi)}{\partial\xi}+\frac{\partial(H_\zeta H_\xi a_\eta)}{\partial\eta}+\frac{\partial(H_\xi H_\eta a_\zeta)}{\partial\zeta}\right). \tag{40}$$

3) $$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\begin{vmatrix} H_\xi\boldsymbol{e}_\xi & H_\eta\boldsymbol{e}_\eta & H_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta\\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\\ H_\xi a_\xi & H_\eta a_\eta & H_\zeta a_\zeta\end{vmatrix}. \tag{41}$$

**12.67.** Пользуясь формулами (39)—(41), получить выражения для $\operatorname{grad}u$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$: 1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.

Найти поток поля $\boldsymbol{a}$ через ориентированную нормалью $\boldsymbol{n}$ поверхность $S$ $(\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|)$ **(12.68—12.69)**:

**12.68.** 1) $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, где $a_x$, $a_y$, $a_z = \text{const}$, $S$ — круг радиуса $R$, лежащий в плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = d$.

2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, $S$ — внешняя сторона конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$.

3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$, $S$ — внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^3$, $S$ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

5) $\boldsymbol{a} = f(r)\boldsymbol{r}$, $S$ — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**12.69.** 1) $\boldsymbol{a} = (x - 2z;\ x + 3y + z;\ 5x + y)$; $S$ — противоположная началу координат сторона плоского треугольника с вершинами $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$.

2) $\boldsymbol{a} = (x^2;\ y^2;\ z^2)$; $S$ — внешняя сторона полной поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3) $\boldsymbol{a} = (y^2;\ x^2;\ z^2)$; $S$ — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, расположенная в первом октанте между плоскостями $z = 0$ и $z = a$, $a > 0$.

4) $\boldsymbol{a} = (0;\ y^2;\ z)$; $S$ — ограниченная часть внешней стороны параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченная плоскостью $z = 2$.

5) $\boldsymbol{a} = \left(x;\ y;\ \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right)$; $S$ — часть внешней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = \sqrt{3}$.

6) $\boldsymbol{a} = (y;\ z;\ x)$; $S$ — часть внутренней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная в области $x > |z|$.

7) $\boldsymbol{a} = (3x;\ -y;\ -z)$; $S$ — часть внешней стороны параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенная в первом октанте.

8) $\boldsymbol{a} = (xy;\ yz;\ zx)$; $S$ — часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенная в первом октанте.

9) $\boldsymbol{a} = (xz;\ yz;\ z^2)$; $S$ — часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, расположенная в области $z > 2$.

10) $\boldsymbol{a} = (x;\ y;\ xyz)$; $S$ — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная в области $x > |y|$ и отсеченная плоскостью $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 - y^2$.

11) $\boldsymbol{a} = (xy - y^2;\ -x^2 + xy + 2x;\ z)$; $S$ — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, отсеченная конусом $z^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2$.

**12.70.** Найти поток поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность $S$ непосредственно или по теореме Гаусса — Остроградского, если:

1) $\boldsymbol{a} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$; $S$ — внешняя поверхность куба $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$.

2) $\boldsymbol{a} = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$; $S$ — полная внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x + y - z = 1$, $y = 0$, $x = 0$.

3) $\boldsymbol{a} = y^2z\boldsymbol{i} - yz^2\boldsymbol{j} + x(y^2 + z^2)\boldsymbol{k}$; $S$ — полная внешняя поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant x \leqslant a$.

4) $\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$; $S$ — полная внешняя поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H$.

5) $\boldsymbol{a}=(x+z)\boldsymbol{i}+(y+x)\boldsymbol{j}+(z+y)\boldsymbol{k}$; $S$ — внешняя поверхность тела $x^2+y^2\leqslant R^2$, $0\leqslant z\leqslant y$.

6) $\boldsymbol{a}=x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}+xyz\boldsymbol{k}$; $S$ — внешняя поверхность тела $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

7) $\boldsymbol{a}=x^2yz\boldsymbol{i}+xy^2z\boldsymbol{j}+xyz^2\boldsymbol{k}$; $S$ — часть внешней стороны эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, расположенная в первом октанте.

8) $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$; $S$ — половина внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=2x$, $z\geqslant 0$.

9) $\boldsymbol{a}=(z^n-y^n)\boldsymbol{i}+(x^n-z^n)\boldsymbol{j}+(y^n-x^n)\boldsymbol{k}$; $S$ — половина внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$.

**12.71.** Пусть $A(\boldsymbol{r})=\sum\limits_{i,\ j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ — положительно определенная квадратичная форма, $\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$. Найти поток поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}\cdot(A(\boldsymbol{r}))^{-3/2}$ через единичную сферу $|\boldsymbol{r}|=1$.

**12.72.** Указать с точностью до $o(\varepsilon^3)$ приближенное значение потока поля $\boldsymbol{a}$:

1) Из задачи **12.38**, 4) через внешнюю сторону сферы с центром $(3;\ 4;\ 0)$ и радиусом $\varepsilon$.

2) Из задачи **12.38**, 5) через внешнюю сторону поверхности куба с центром $(1;\ 1;\ 2)$ и ребром длины $\varepsilon$.

**12.73.** Доказать формулу (28).

**12.74.** Пусть поле $\boldsymbol{a}$ непрерывно дифференцируемо в $\Omega$, $G$ — произвольная область с кусочно-гладкой границей, $\overline{G}\subset\Omega$. Доказать, что поток $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ через $\partial G$ равен нулю.

**12.75.** Пусть ограниченная область $G$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial G$, ориентированную внешней нормалью. Доказать, что поток радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ через $\partial G$ равен $3\mu G$, где $\mu G$ — объем $G$.

**12.76.** Пусть кусочно-гладкая граница $\partial G$ области $G$, ориентирована нормалью $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Доказать, что

$$\iint\limits_{\partial G}\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{c}})\,dS=0.$$

**12.77.** Доказать формулы:

1) (29). 2) (30). 3) (32). 4) (33). 5) (34).

**12.78.** Пусть поле $u$ дважды непрерывно дифференцируемо в $\Omega$, $G$ — область из $\Omega$ такая, что $\overline{G}\subset\Omega$ и граница $\partial G$ является поверхностью уровня поля $u$. Доказать, что

$$\iiint\limits_{G}\Delta u\,dV=\pm\iint\limits_{\partial G}|\nabla u|\,dS,$$

где следует выбрать один из знаков. Объяснить выбор знака.

**12.79.** Доказать, что

$$\iiint\limits_{G}(\nabla u,\ [\nabla,\ \boldsymbol{a}])\,dV=\iint\limits_{\partial G}(\boldsymbol{a},\ \nabla u,\ \boldsymbol{n})\,dS.$$

**12.80.** Пусть $u$ и $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемые поля в $\Omega$, $G$ — область из $\Omega$, $\bar{G} \subset \Omega$, $\partial G$ — кусочно-гладкая поверхность, ориентированная внешней нормалью. Доказать, что

$$\iint_{\partial G} (u\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, dS = \iiint_G (u(\nabla, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \nabla u))\, dV.$$

**12.81.** Пусть $S$ — гладкая поверхность, ориентированная нормалью $\boldsymbol{n}$, пусть замыкание $S$ не содержит начала координат. Показать, что интеграл

$$\iint_S \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})}{r^2}\, dS$$

есть поток некоторого поля через $S$.

**12.82.** Пусть $G$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, ориентированной внешней нормалью $\boldsymbol{n}$, $O \notin \bar{G}$, $\boldsymbol{r} = (x;\ y;\ z)$, $r = |\boldsymbol{r}|$. Доказать, что:

1) $$\iiint_G \frac{1}{r}\, dV = \frac{1}{2} \iint_{\partial G} \cos(\widehat{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}})\, dS.$$

2) $$\iiint_G \frac{1}{r^p}\, dV = \frac{1}{3-p} \iint_{\partial G} \frac{\cos(\widehat{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}})}{r^{p-1}}\, dS, \quad p \neq 3.$$

**12.83.** Пусть ограниченная область $G$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial G$, ориентированную внешней нормалью, $M_0$ — фиксированная точка $G$,

$$\boldsymbol{a}(M) = \overline{M_0 M} / |M_0 M|^3,$$

$S_\varepsilon(M_0)$ — сфера с центром $M_0$ и радиусом $\varepsilon$, лежащая в $G$, ориентированная внешней нормалью. Доказать, что поток $\boldsymbol{a}$ через $\partial G$ равен потоку $\boldsymbol{a}$ через $S_\varepsilon(M_0)$.

**12.84.** Пусть ограниченная область $G$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial G$, ориентированную внешней нормалью, $M_0$ — фиксированная точка,

$$\boldsymbol{a}(M) = \overline{M_0 M} / |M_0 M|^3.$$

Найти поток поля $\boldsymbol{a}$ через $\partial G$, если:

1) $M_0 \notin \bar{G}$. 2) $M_0 \in G$.

**12.85.** В условиях задачи **12.83** пусть $M_0 \in \partial G$ и в окрестности $M_0$ граница $\partial G$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $\partial G_\varepsilon$ — часть границы $\partial G$, лежащая внутри шара $|\overline{M_0 M}| \leqslant \varepsilon$, а $\Pi_\varepsilon$ — поток поля $\boldsymbol{a}$ через $\partial G \setminus \partial G_\varepsilon$. Найти $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon$.

**12.86.** Сформулировать аналог теоремы Гаусса — Остроградского для плоских областей и полей.

**12.87.** Пусть $\gamma$ — гладкая плоская кривая, замыкание которой не содержит начала координат, $\boldsymbol{n}$ — непрерывная единичная нормаль к $\gamma$. Показать, что интеграл Гаусса

$$\int\limits_{\gamma} \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\, ds$$

есть поток некоторого поля через $\gamma$.

**12.88.** Пусть в условиях задачи 12.87 $\gamma$ есть граница ограниченной области $G$. Вычислить интеграл Гаусса, если:

1) $O \notin \overline{G}$. 2) $O \in G$.

**12.89.** Покажите, что значение интеграла Гаусса задачи 12.87 равно полярному углу, под которым видна кривая $\gamma$ из начала координат.

Найти работу поля $\boldsymbol{a}$ вдоль прямой от точки $A(\boldsymbol{r}_1)$ до точки $B(\boldsymbol{r}_2)$ $(\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|)$ **(12.90—12.91)**:

**12.90.** 1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}$. 2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r$. 3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}/r^3$.

4) $\boldsymbol{a} = f(r)\,\boldsymbol{r}$, $f(r)$ — непрерывная функция, $r \geqslant 0$.

5) $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}]$, $\boldsymbol{c} = \mathrm{const}$.

**12.91.** 1) $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{i}}{y+z} + \dfrac{\boldsymbol{j}}{z+x} + \dfrac{\boldsymbol{k}}{x+y}$;

$$A(-1;\ 0;\ 3),\ B(0;\ -1;\ 2).$$

2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}e^{y-z} + \boldsymbol{j}e^{z-x} + \boldsymbol{k}e^{x-y}$; $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 3;\ 2)$.

3) $\boldsymbol{a} = \dfrac{y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 - y^2 + z^2 - x + z}}$; $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(6;\ 6;\ 6)$.

**12.92.** Вычислить работу плоского поля $\boldsymbol{a}$ вдоль кривой $\gamma$, если:

1) $\boldsymbol{a} = (x+y)\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$; $\gamma$ — часть графика $y = |x|$ от точки $(-1;\ 1)$ до точки $(2;\ 2)$.

2) $\boldsymbol{a} = \dfrac{y^2\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\gamma$ — полуокружность $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1;\ 0)$ до точки $(-1;\ 0)$ в области $y > 0$.

3) $\boldsymbol{a} = f(x)\boldsymbol{i} + f(y)\boldsymbol{j}$; $\gamma$ — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ от точки $(1; 0)$ до точки $(0;\ 1)$, расположенная в первом квадранте ($f(x)$ — непрерывная функция).

**12.93.** Вычислить работу поля $\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ от точки $A(a;\ 0;\ 0)$ до точки $B(a;\ 0;\ 2\pi b)$:

1) вдоль винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$,

2) вдоль отрезка $AB$.

Является ли данное поле потенциальным?

**12.94.** Найти по формуле Стокса (23) циркуляцию поля $\boldsymbol{a}$ вдоль контура Г, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если:

1) $\boldsymbol{a} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$; $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$.

2) $\boldsymbol{a} = (y+z)\,\boldsymbol{i} + (z+x)\,\boldsymbol{j} + (x+y)\,\boldsymbol{k}$;

$$\Gamma = \{4(x^2 + y^2) = z^2,\ x + y + z = 1\}.$$

3) $\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$; $\Gamma=\{z=x^2+y^2,\ z+y=2\}$.

4) $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$; $\Gamma=\{x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z\geqslant 0\}$.

5) $\boldsymbol{a}=z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$; $\Gamma=\{y^2+z^2=9,\ 3z+4x=5\}$.

6) $\boldsymbol{a}=zx\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$; $\Gamma=\{y^2+z^2=1,\ x+y+z=1\}$.

**12.95.** Для поля $\boldsymbol{a}=-\dfrac{y\boldsymbol{i}}{x^2+y^2}+\dfrac{x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$ найти циркуляцию:

1) По окружности $x^2+y^2=R^2$, $z=z_0$, ориентированной против часовой стрелки при взгляде из точек оси $Oz$, где $z>0$.

2) По окружности $(x-R)^2+(y-2R)^2=R^2$, $z=z_0$, ориентация произвольна.

**12.96.** Найти циркуляцию поля $\boldsymbol{a}=\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}+z\boldsymbol{k}$ по окружности

$$\Gamma=\{x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0\},$$

ориентированной против часовой стрелки при взгляде из точек оси $Oz$, где $z>1$.

**12.97.** В условиях задачи **12.64** найти циркуляцию поля $\boldsymbol{v}$:

1) По окружности радиуса $R$, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и ориентирована по направлению вращения.

2) По окружности радиуса $R$, которая ориентирована так же, как и в 1), но плоскость которой составляет угол $\alpha$ с осью вращения.

**12.98.** В условиях задачи **12.64** примем ось вращения за ось $Oz$, направив ее по вектору угловой скорости. Пусть $G$ — ограниченная односвязная область в плоскости $Oxy$ с границей $\gamma$ — кусочно-гладким простым замкнутым контуром, $Ц$ — цилиндр с основанием $\bar{G}$ и образующими, параллельными оси вращения. Пусть $\Gamma$ — замкнутая кусочно-гладкая кривая на поверхности цилиндра $Ц$, которая взаимно однозначно проектируется на $\gamma$. Доказать, что циркуляция поля $\boldsymbol{v}$ по $\Gamma$ равна $2\omega\cdot\mu G$, где $\mu G$ — площадь $G$.

**12.99.** Магнитное поле прямого бесконечного проводника постоянного тока $I\,(I>0)$ задается как поле вектора напряженности $\boldsymbol{H}$. Если ось $Oz$ совместить с проводником по направлению тока, то

$$\boldsymbol{H}=2I\,\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}.$$

1) Убедиться, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{o}$ (в отличие от $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}$ из задачи **12.64**).

2) Найти циркуляцию поля $\boldsymbol{H}$ по окружности радиуса $R$ с центром на оси $Oz$,

а) лежащей в плоскости, перпендикулярной оси $Oz$;

б) лежащей в плоскости, которая составляет угол $\alpha$ с осью $Oz$.

3) Взяв такие же, как и в задаче **12.98**, область $G$ с границей $\gamma$, цилиндр $Ц$ и кривую $\Gamma$ на его поверхности и допустив, что ось $Oz$ не является образующей цилиндра $Ц$, доказать, что циркуляция $\boldsymbol{H}$ по $\Gamma$ равна циркуляции $\boldsymbol{H}$ по $\gamma$.

4) Допустив, что $O \in G$, и взяв окружность с центром $O$, лежащую в $G$, доказать, что циркуляции $\boldsymbol{H}$ по $\gamma$ и по этой окружности равны.

5) Доказать, что если контур $\Gamma$ (из 3)) не охватывает ось $Oz$, т. е. проводник с током, то циркуляция $H$ по $\Gamma$ равна нулю, а если $\Gamma$ охватывает ось $Oz$, то циркуляция $H$ по $\Gamma$ такая же, как и по окружности из п. 2).

**12.100.** Найти с точностью до $o(\varepsilon^2)$ абсолютную величину циркуляции поля $\boldsymbol{a}$ по окружности

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2, \quad x+y+z=3,$$

если:

1) $\boldsymbol{a}=\frac{1}{y}\boldsymbol{i}+\frac{1}{z}\boldsymbol{j}+\frac{1}{x}\boldsymbol{k}$.

2) $\boldsymbol{a}=\frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i}-\frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j}+\sqrt{xy}\,\boldsymbol{k}$.

**12.101.** Доказать:

1) Формулу (24). 2) Формулу (25). 3) Формулу (26).

**12.102.** Пусть $u$ и $\boldsymbol{a}$ — непрерывно дифференцируемые поля в $\Omega$, $M \in \Omega$. Рассмотрим совокупность содержащих $M$ областей $G \subset \Omega$, для которых справедлива формула (27). Пусть $d(G)$ — диаметр, $\mu(G)$ — объем $G$. Доказать, что:

1) $\operatorname{grad} u(M)=\lim\limits_{d(G)\to 0}\frac{1}{\mu(G)}\iint\limits_{\partial G} u\boldsymbol{n}\,dS$.

2) $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)=\lim\limits_{d(G)\to 0}\frac{1}{\mu(G)}\iint\limits_{\partial G}[\boldsymbol{n},\boldsymbol{a}]\,dS$.

**12.103.** Какие из указанных полей потенциальны в $\mathbb{R}^3$?

1) $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$.

2) $\boldsymbol{a}=xz\boldsymbol{i}+zy\boldsymbol{j}+yx\boldsymbol{k}$.

3) $\boldsymbol{a}=(ax+y+bz)\boldsymbol{i}+(2x+cy+dz)\boldsymbol{j}+(bx+dy+cz)\boldsymbol{k}$.

4) $\boldsymbol{a}=yz\cos xy\boldsymbol{i}+xz\cos xy\boldsymbol{j}+\sin xy\boldsymbol{k}$.

**12.104.** Потенциально ли поле

$$\boldsymbol{H}=2I\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}, \quad (x;\ y)\neq(0;\ 0),$$

1) в полупространстве $x>0$;

2) во всем пространстве без оси $Oz$?

**12.105.** Проверить, что поле

$$\boldsymbol{H}=2I\frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}$$

потенциально в полупространстве $y>0$, и найти его потенциал.

**12.106.** Проверить потенциальность и найти потенциал поля:

1) $\boldsymbol{a}=(y+z)\boldsymbol{i}+(z+x)\boldsymbol{j}+(x+y)\boldsymbol{k}$.

2) $\boldsymbol{a}=\dfrac{yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}}{1+x^2y^2z^2}$.

3) $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+e^z\boldsymbol{k}$.

4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r$. 5) $\boldsymbol{a}=r\boldsymbol{r}$, $(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ r=|\boldsymbol{r}|)$.

**12.107.** Пусть $f(r)$, $r>0$, — дифференцируемая функция. Доказать, что поле (центральное) $\boldsymbol{a}=f(r)\boldsymbol{r}$ потенциально при $r>0$ $(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ r=|\boldsymbol{r}|)$. Найти потенциал $\boldsymbol{a}$.

**12.108.** Доказать, что потенциал $u$ непрерывно дифференцируемого поля $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

**12.109.** Доказать, что если поле $\boldsymbol{a}$ потенциально в звездной (см. задачу **12.30**) относительно точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ области $\Omega$, то его потенциал в точке $M(\boldsymbol{r})$ определяется формулой

$$u(\boldsymbol{r})=\int\limits_0^1(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0+t(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)),\ \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,dt+\text{const}.$$

**12.110.** Доказать, что положения устойчивого равновесия частицы в потенциальном силовом поле $\boldsymbol{F}=-\operatorname{grad}u$ находятся в точках минимума потенциала $u$.

**12.111.** Доказать, что потенциальное поле не имеет замкнутых векторных линий.

**12.112.** Является ли поле $\boldsymbol{a}$ потенциальным, соленоидальным, если $(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ r=|\boldsymbol{r}|)$:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^3$; 2) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r$?

**12.113.** Является ли поле $\boldsymbol{a}$ соленоидальным, если:

1) $\boldsymbol{a}=x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}+y(x^2-z^2)\boldsymbol{j}+z(y^2+x^2)\boldsymbol{k}$.

2) $\boldsymbol{a}=(1+2xy)\boldsymbol{i}-y^2z\boldsymbol{j}+(z^2y-2yz+1)\boldsymbol{k}$.

3) $\boldsymbol{a}=x^2yz\boldsymbol{i}+xy^2z\boldsymbol{j}-xyz^2\boldsymbol{k}$.

4) $\boldsymbol{a}=\dfrac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{x^2+y^2}+xy\boldsymbol{k}$.

**12.114.** Доказать, что условие (38) необходимо и достаточно для соленоидальности поля.

**12.115.** Найти такую дифференцируемую функцию $\Phi$, чтобы поле $\boldsymbol{a}=\Phi(r)\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, было соленоидальным.

**12.116.** Поток поля $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^3$, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, определенного в области $r>0$, через сферу $r=1$ равен $4\pi$. Означает ли это, что данное поле несоленоидально при том определении соленоидальности, которое принято в этом параграфе?

**12.117.** 1) Пусть $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ — векторные потенциалы поля $\boldsymbol{a}$. Доказать, что поле $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2$ безвихревое.

2) Пусть $\boldsymbol{A}$ — векторный потенциал поля $\boldsymbol{a}$, поле $\boldsymbol{b}$ безвихревое. Доказать, что $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}$ — также векторный потенциал поля $\boldsymbol{a}$.

**12.118.** Проверить соленоидальность поля $\boldsymbol{a}$ и найти его векторный потенциал, если:

1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор.
2) $\boldsymbol{a}=2yx\boldsymbol{k}$.
3) $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$.
4) $\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$.
5) $\boldsymbol{a}=3y^2\boldsymbol{i}-3x^2\boldsymbol{j}-(y^2+2x)\boldsymbol{k}$.
6) $\boldsymbol{a}=ye^z\boldsymbol{i}+ze^x\boldsymbol{j}+xe^y\boldsymbol{k}$.

**12.119.** Доказать, что если векторное поле $\boldsymbol{a}$ непрерывно дифференцируемо и соленоидально в области $G$, звездной (см. задачу **12.30**) относительно точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)\in G$, то

$$\boldsymbol{A}(M)=\int_0^1 [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0+t(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)),\ \boldsymbol{r}]\,t\,dt$$

— один из его векторных потенциалов ($\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{r}$ — радиус-векторы точек $M_0$ и $M$).

**12.120.** Найти векторный потенциал магнитного поля бесконечного прямого проводника постоянного тока $I$ (ось $Oz$ направить по проводнику, см. **12.99**).

**12.121.** Электрический заряд $q$, движущийся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, создает в пространстве (вакууме) в фиксированный момент времени магнитное поле напряженности

$$\boldsymbol{H}(M)=\frac{[q\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{r}]}{4\pi r^3},$$

где $\boldsymbol{r}$ — вектор с началом в заряде, а концом в $M$, $r=|\boldsymbol{r}|$. Найти векторный потенциал этого поля.

**12.122.** Доказать, что векторные линии соленоидального поля либо замкнуты, либо оканчиваются на границе области определения поля.

**12.123.** Доказать, что поток соленоидального поля через поперечное сечение его векторной трубки одинаков вдоль всей трубки.

**12.124.** Пусть $u$ — дважды непрерывно дифференцируемое поле в $\Omega$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — дифференцируемые поля в $\Omega$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\operatorname{grad} u$. Доказать, что для того, чтобы поле $\boldsymbol{b}$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы поле $u$ удовлетворяло уравнению $\Delta u=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

**12.125.** Доказать гармоничность плоского поля

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}/r^2,\quad \boldsymbol{r}=(x;\ y),\quad r=|\boldsymbol{r}|.$$

**12.126.** Доказать гармоничность поля сил тяготения точечной массы и поля кулоновых сил точечного заряда.

**12.127.** Доказать, что потенциал гармонического поля есть функция гармоническая, т. е. $\Delta u=0$.

**12.128.** Пусть ограниченная область $G$ имеет кусочно-гладкую границу $\partial G$, функция $u$, определенная в $\bar{G}$, гармонична в $G$, а $\operatorname{grad} u$ непрерывен в $\bar{G}$. Доказать, что:

1) $\iint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, где $n$ — нормаль к $\partial G$.

2) Если $u = 0$ на $\partial G$, то $u = 0$ в $\bar{G}$, т. е. гармоническая функция однозначно определяется своими значениями на границе.

3) Если $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\partial G$, то $u = \text{const}$ в $\bar{G}$, т. е. гармоническая функция определяется с точностью до постоянной значениями своей нормальной производной на границе.

**12.129.** В условиях задачи **12.128** пусть $x \in G$, $\Omega_\varepsilon(x)$ — шар с центром $x$ и радиусом $\varepsilon$, лежащий в $G$. Взяв $v = \frac{1}{4\pi |x - y|}$, $y \in \bar{G}$, $y \neq x$, и применив формулу Грина (32) к области $G \setminus \Omega_\varepsilon(x)$, доказать, что

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \left( u(y) \nabla_y \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \nabla u(y),\ n(y) \right) dS_y,$$

где нижний символ $y$ указывает переменную точку, $n(y)$ — единичная внешняя нормаль к границе в точке $y$.

**12.130.** Пусть функция $u$ гармонична в окрестности точки $x \in \mathbb{R}^3$, $S_R(x)$ и $\Omega_R(x)$ — сфера и шар радиуса $R$ с центром $x$, лежащие в этой окрестности. Доказать теоремы о среднем для гармонических функций:

1) $u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S_R(x)} u(y)\, dS.$

2) $u(x) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{\Omega_R(x)} u(y)\, dV.$

**12.131.** Из уравнений электростатики

$$(\nabla, E) = \rho/\varepsilon_0, \quad [\nabla, E] = o,$$

где $E$ — поле электрической напряженности, $\rho$ — плотность распределения зарядов, $\varepsilon_0 = \text{const} > 0$, вывести *закон Гаусса*

$$\iint\limits_{\partial G} (n, E)\, dS = Q/\varepsilon_0$$

о пропорциональности потока напряженности через границу области $G$ (с внешней нормалью $n$) и полного заряда $Q$, находящегося в этой области.

**12.132.** Пусть поле скоростей $v$ движущейся сплошной среды потенциально. Доказать, что если среда несжимаема, то потенциал $u$ поля $v$ гармоничен (можно воспользоваться тем, что объемный расход среды через любую замкнутую поверхность равен нулю).

## ГЛАВА III

# ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

## § 13. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Если при каждом значении $\alpha \in E \subset \mathbb{R}$ функция $f(x;\ \alpha)$ интегрируема по Риману как функция от $x$ на отрезке $[a; b]$, то интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x;\ \alpha)\,dx \tag{1}$$

называют *собственным интегралом, зависящим от параметра* $\alpha$. Наряду с интегралами вида (1) рассматривают интегралы более общего вида

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x;\ \alpha)\,dx, \tag{2}$$

зависящие от параметра.

**1. Непрерывность интеграла по параметру.** Если функция $f(x;\ \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\ \alpha):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}, \tag{3}$$

то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра $\alpha$ на отрезке $[\alpha_1;\ \alpha_2]$.

В частности, если функция $f(x; \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $K$ и $\alpha_0 \in [\alpha_1; \alpha_2]$, то

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_a^b f(x;\ \alpha)\,dx = \int_a^b \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(x;\ \alpha)\,dx, \tag{4}$$

т. е. возможен предельный переход под знаком интеграла (1).

Пример 1. Найти $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x + \cos \alpha x)\, e^{x \sin \alpha}\, dx$.

△ Так как подынтегральная функция непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\ \alpha):\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi,\ -1 \leqslant \alpha \leqslant 1\},$$

то искомый предел $A$ равен $\int_{-\pi}^{\pi} f(x;\ 0)\,dx$, где

$$f(x;\ 0)=\lim_{\alpha\to 0}(x+\cos\alpha x)\,e^{x\sin\alpha}=x+1.$$

Следовательно,

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\,dx=2\pi. \ \blacktriangle$$

**2. Интегрирование интегралов, зависящих от параметра.** Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике (3), то интеграл (1) есть функция, интегрируемая на отрезке $[\alpha_1;\ \alpha_2]$, и справедливо равенство

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_a^b f(x;\ \alpha)\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\ \alpha)\,d\alpha\right)dx. \qquad (5)$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^1\frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\ln x}\,dx,\quad 0<\alpha_1\leqslant\alpha_2.$$

$\triangle$ Рассмотрим функцию $f(x;\ \alpha)=x^\alpha$. Эта функция непрерывна в прямоугольнике $K=\{(x;\ \alpha)\colon 0\leqslant x\leqslant 1,\ \alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2\}$, где $\alpha_1>0$. Применяя формулу (5), получаем

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_0^1 x^\alpha\,dx\right)d\alpha=\int_0^1\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}x^\alpha\,d\alpha\right)dx. \qquad (6)$$

Так как $\int_0^1 x^\alpha\,dx=1/(\alpha+1)$, то левая часть формулы (6) равна $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{\alpha+1}=\ln\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}$. Правая часть формулы (6) равна $I$, так как

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}x^\alpha\,d\alpha=\frac{x^{\alpha_2}-x^{\alpha_1}}{\ln x}.$$

Следовательно,

$$I=\ln\frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}. \ \blacktriangle$$

**3. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра.** Если функции $f(x;\ \alpha)$ и $\frac{\partial f(x;\ \alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике

(3), то интеграл (1) — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1; \alpha_2]$ функция, производную которой можно вычислить по *правилу Лейбница*:

$$I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f(x;\ \alpha)}{\partial \alpha} dx. \tag{7}$$

Пример 3. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} \frac{dx}{x}$.

△ Применяя формулу (7), получаем

$$I'(\alpha) = \int_1^2 e^{\alpha x^2} x\, dx = \left.\frac{e^{\alpha x^2}}{2\alpha}\right|_1^2 = \frac{e^{4\alpha} - e^{\alpha}}{2\alpha}. \ ▲$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x)\, dx, \quad \alpha \neq 0.$$

△ Пусть $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Так как функция

$$f(x;\ \alpha) = \ln(\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x)$$

непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f(x;\ \alpha)}{\partial \alpha}$ в прямоугольнике

$$K = \{(x;\ \alpha)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 > 0$, то по формуле (7) получаем

$$I'(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha \cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2 \cos^2 x} dx.$$

Используя подстановку $t = \operatorname{tg} x$, находим

$$I'(\alpha) = 2\alpha \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+\alpha^2}\right) dt =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left(\operatorname{arctg} t - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \pi/(\alpha+1),$$

откуда

$$I(\alpha) = \pi \ln(\alpha + 1) + C.$$

Так как $I(\alpha)$ — функция, непрерывная при $\alpha > 0$, и $I(1) = 0$, то $C = -\pi \ln 2$. Следовательно, $I(\alpha) = \pi \ln((\alpha+1)/2)$ при $\alpha > 0$. Учитывая, что $I(\alpha)$ — четная функция, отсюда получаем $I(\alpha) = \pi \ln((|\alpha| + 1)/2)$, если $\alpha \neq 0$. ▲

Если функции $f(x;\ \alpha)$ и $\frac{\partial f(x;\ \alpha)}{\partial \alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ дифференцируемы на отрезке

$[\alpha_1;\ \alpha_2]$, а их значения принадлежат отрезку $[a;\ b]$, то интеграл (2) — функция, дифференцируемая на отрезке $[c;\ d]$, причем

$$\Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha);\ \alpha)\,\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha);\ \alpha)\,\varphi'(\alpha) + \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x;\ \alpha)}{\partial \alpha}\,dx. \qquad (8)$$

Пример 5. Найти $\Phi'(\alpha)$, если

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} \operatorname{sh} \alpha x^2\,dx.$$

$\triangle$ По формуле (8) находим

$$\Phi'(\alpha) = \cos\alpha\cdot\operatorname{sh}(\alpha\sin^2\alpha) + \sin\alpha\cdot\operatorname{sh}(\alpha\cos^2\alpha) + \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 \operatorname{ch}\alpha x^2\,dx. \ \blacktriangle$$

---

**13.1.** Доказать, что функция $I(\alpha)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, если:

1) $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_0^1 \sin^2 \alpha x^2\,dx.$ 2) $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_{-1}^{2} \frac{x^2}{1 + x^2 + \alpha^2 x^4}\,dx.$

**13.2.** Найти пределы:

1) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2 x^4}\,dx.$ 2) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \alpha^2}\,dx.$

3) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\int\limits_2^4 \frac{x\,dx}{1 + x^2 + \alpha^6}.$ 4) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1}\int\limits_0^1 x^2 e^{\alpha x^3}\,dx.$

5) $\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^{\pi} x\cos(1+\alpha)\,x\,dx,$

**13.3.** Доказать, что функция $I(\alpha) = \displaystyle\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(x - \alpha)\,dx$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

**13.4.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0;\ 1]$. Доказать, что функция

$$I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}\,f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

**13.5.** Выяснить, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\int\limits_0^1 f(x;\ \alpha)\,dx = \int\limits_0^1 \lim_{\alpha\to 0} f(x;\ \alpha)\,dx,$$

если:

1) $f(x;\ \alpha)=\frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}$. 2) $f(x;\ \alpha)=\frac{2x\alpha^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$.

**13.6.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $a<a_0<x<b$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\int_{a_0}^{x}[f(t+\alpha)-f(t)]\,dt=f(x)-f(a_0).$$

**13.7.** Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a; b]$ и принимающих на этом отрезке неотрицательные значения, — равномерно сходится к нулю на множестве $E=\{x\colon 0<\delta\leqslant|x|\leqslant 1\}$ при любом $\delta>0$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\,dx=1.$$

Доказать, что для любой непрерывной на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}f(x)\,\varphi_n(x)\,dx=f(0).$$

**13.8.** Выяснить, равны ли интегралы

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x;\ \alpha)\,d\alpha\right)dx \quad\text{и}\quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x;\ \alpha)\,dx\right)d\alpha,$$

если:

1) $f(x;\ \alpha)=\frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}$. 2) $f(x;\ \alpha)=\frac{\alpha-x}{(\alpha+x)^3}$.

3) $f(x;\ \alpha)=\left(\frac{x^5}{\alpha^4}-\frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha}$.

**13.9.** Пусть функция $f(x;\alpha)$ при каждом $\alpha\in[\alpha_1;\alpha_2]$ интегрируема по $x$ на отрезке $[a; b]$ и пусть на этом отрезке существует функция $\varphi(x)$ такая, что $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}f(x;\ \alpha)=\varphi(x)$, где $\alpha_0\in\in[\alpha_1;\ \alpha_2]$, равномерно относительно $x\in[a;\ b]$. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x;\ \alpha)\,dx=\int\limits_a^b\varphi(x)\,dx.$

2) $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x;\ \alpha)\,g(x)\,dx=\int\limits_a^b\varphi(x)\,g(x)\,dx,$

где $g(x)$ — функция, интегрируемая на отрезке $[a;\ b]$.

**13.10.** Пользуясь формулой $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\displaystyle\int_0^1 \frac{d\alpha}{1+x^2\alpha^2}$, вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

**13.11.** Пользуясь формулой

$$\frac{1}{\sin x}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int_0^1 \frac{dt}{a^2-b^2t^2\sin^2 x},$$

где $a>b>0$, вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}.$$

**13.12.** Пусть $a>0$, $b>0$. Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$. 2) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$.

**13.13.** Найти $I'(\alpha)$, если:

1) $I(\alpha)=\displaystyle\int_0^1 \sin(\alpha x)\,dx$. 2) $I(\alpha)=\displaystyle\int_1^3 \frac{\cos(\alpha x^3)}{x}\,dx$.

3) $I(\alpha)=\displaystyle\int_1^2 e^{\alpha x^2}\frac{dx}{x}$. 4) $I(\alpha)=\displaystyle\int_2^3 \operatorname{ch}(\alpha^4x^2)\frac{dx}{x}$.

**13.14.** Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

1) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx$. 2) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$.

3) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 4) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{3\alpha}^{\alpha^2} e^{\alpha x^2}\,dx$.

5) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4x^2}\,dx$. 6) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2x^2)\frac{dx}{x}$.

7) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{\alpha e^{-\alpha}}^{\alpha e^{\alpha}} \ln(1+\alpha^2x^2)\,dx$.

8) $\Phi(\alpha)=\displaystyle\int_{\operatorname{ch}\alpha}^{\operatorname{sh}\alpha} \ln(1+x^2+\alpha^2)\,dx$.

**13.15.** Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции

$$I(\alpha)=\int_0^1 \ln(x^2+\alpha^2)\,dx \quad \text{при} \quad \alpha=0?$$

**13.16.** Пусть функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что функция $F(x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x+t)\,dt$, где $a>0$, имеет непрерывную производную на $\mathbb{R}$, и найти $F'(x)$.

**13.17.** С помощью дифференцирования интеграла $\int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру $\alpha$, где $\alpha>0$, вычислить интеграл $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

**13.18.** Применяя дифференцирование по параметру $\alpha$, вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

1) $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2-\sin^2\varphi)\,d\varphi, \quad \alpha>1.$

2) $I(\alpha)=\int_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx, \quad |\alpha|<1.$

3) $I(\alpha)=\int_0^{\pi} \ln\frac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}, \quad |\alpha|<1.$

4) $I(\alpha)=\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

**13.19.** Пусть функция $f(x;\ \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K=\{(x;\ \alpha):\ a\leqslant x\leqslant b,\quad \alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2\},$$

а функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a;\ b]$. Доказать, что:

1) Функция $F(\alpha)=\int_a^b f(x;\ \alpha)\,g(x)\,dx$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1;\ \alpha_2]$.

2) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)\,d\alpha=\int_a^b\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\ \alpha)\,g(x)\,d\alpha\right)dx.$

3) Функция $F(\alpha)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, причем

$$F'(\alpha)=\int_a^b \frac{\partial f(x;\ \alpha)}{\partial\alpha}\,g(x)\,dx,$$

при дополнительном условии, что функция $\frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial \alpha}$ непрерывна в прямоугольнике $K$.

**13.20.** Пусть $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha (x+\alpha)f(x)\,dx$, где $f(x)$ — дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Найти $F''(\alpha)$.

**13.21.** Пусть $F(\alpha)=\int\limits_a^b f(x)|x-\alpha|\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция. Найти $F''(\alpha)$.

**13.22.** Пусть

$$F(\alpha)=\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^h f(\xi+\eta+\alpha)\,d\eta\right)d\xi,$$

где $h>0$, $f$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. Найти $F''(\alpha)$.

**13.23.** Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, $x_0\in(a;\ b)$, $x\in(a;\ b)$, $k\neq 0$. Доказать, что функция

$$y(x)=\frac{1}{k}\int\limits_{x_0}^x f(t)\sin k(x-t)\,dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y''+k^2y=f(x).$$

**13.24.** Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, $x_0\in(a;\ b)$, $x\in(a;\ b)$. Доказать, что функция

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt,\quad \text{где}\quad n\in\mathbb{N},$$

удовлетворяет условиям

$$F(x_0)=F'(x_0)=\ldots=F^{(n-1)}(x_0)=0,\quad F^{(n)}(x)=f(x).$$

**13.25.** Доказать, что функция

$$u(r)=\int\limits_0^\pi e^{nr\cos\theta}\,d\theta$$

при любом $n\in\mathbb{Z}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-n^2u=0.$$

**13.26.** Доказать, что функция $u(x)$ удовлетворяет *уравнению Бесселя*

$$x^2u''+xu'+(x^2-n^2)u=0,$$

если:

1) $u(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi,\quad n\in\mathbb{N}.$

2) $u(x)=x^n\int\limits_0^{\pi}\cos(x\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi,\quad n\in\mathbb{N}.$

**13.27.** Рассмотрим полные эллиптические интегралы

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$K(k)\equiv F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

где $0<k<1$. Доказать, что:

1) $E'(k)=\frac{E-K}{k},\quad K'(k)=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{K}{k}.$

2) $E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$

3) $\int\limits_0^k tK(t)\,dt=E(k)-(1-k^2)K(k).$

4) $\int\limits_0^k tE(t)\,dt=\frac{1}{3}((1+k^2)E(k)-(1-k^2)K(k)).$

**13.28.** Пусть $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$ при $x\neq 0$, $\varphi(0)=1$. Показать, что:

1) $x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)=\int\limits_0^x t^n\cos\left(t+\frac{n\pi}{2}\right)dt,\quad n\in\mathbb{N},\quad x\in\mathbb{R}.$

2) $|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant\frac{1}{n+1},\quad n\in\mathbb{N},\quad x\in\mathbb{R}.$

**13.29.** Пусть функция $\varphi(x)$ и ее производная $\varphi'(x)$ непрерывны на отрезке $[0;\ a]$, и пусть

$$F(t)=\int\limits_0^t\frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{t-x}}.$$

Доказать, что при $t\in(0;\ a)$ справедливо равенство

$$F'(t)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{t}}+\int\limits_0^t\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx.$$

**13.30.** Пусть

$$K(x;\ y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{если } x\leqslant y,\\ y(1-x), & \text{если } x>y,\end{cases}$$

и пусть $\varphi(y)$ — непрерывная на отрезке $[0;\ 1]$ функция. Показать, что функция

$$u(x)=\int_0^1 K(x;\ y)\,\varphi(y)\,dy$$

удовлетворяет на отрезке $[0;\ 1]$ уравнению

$$u''(x)=-\varphi(x).$$

**13.31.** Найти дважды дифференцируемую на $\mathbb{R}$ функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению:

1) $\varphi(x)=x+\int\limits_0^x (y-x)\,\varphi(y)\,dy.$

2) $\varphi(x)=1+\lambda\int\limits_0^x (x-y)\,\varphi(y)\,dy,\quad \lambda>0.$

3) $\varphi(x)=\lambda\int\limits_0^x (x-y)\,\varphi(y)\,dy+x^2,\quad \lambda>0.$

**13.32.** Найти $F''_{xy}(x;\ y)$, если

$$F(x;\ y)=\int_{x/y}^{xy} (x-yt)\,f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — дифференцируемая функция, $y\neq 0$.

**13.33.** Пусть $f$ — дважды дифференцируемая, а $F$ — дифференцируемая функция. Доказать, что функция

$$u(x;\ t)=\frac{1}{2}\left(f(x-at)+f(x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(\xi)\,d\xi$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a\neq 0,$$

и следующим начальным условиям:

$$u(x;\ 0)=f(x),\quad u'_t(x;\ 0)=F(x).$$

**13.34.** Показать, что если функция $f$ непрерывна на отрезке $[0;\ a]$, $\xi\in[0;\ a]$ и $(x-\xi)^2+y^2+z^2\neq 0$, то функция

$$u(x;\ y;\ z)=\int_0^a \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

## § 14. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

**1. Определение равномерной сходимости интеграла.** В этом параграфе определение, признаки сходимости и критерий равномерной сходимости формулируются для несобственных интегралов вида

$$\int_{a}^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx. \tag{1}$$

Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

Интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha \in E$, называют *равномерно сходящимся на множестве* $E$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon$, что для всех $\alpha \in E$ и для всех $\xi \geqslant \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\xi}^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in [\alpha;\ +\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta \in E$ и $\xi_\delta \in [\delta;\ +\infty)$ такие, что

$$\left|\int_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x;\ \alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{3}$$

то интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha \in E$, *сходится неравномерно на множестве* $E$.

Пример 1. Доказать, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$:

а) сходится равномерно на множестве $E = [b;\ +\infty)$, где $b > 0$,

б) сходится неравномерно на множестве $E_1 = (0;\ +\infty)$.

$\triangle$ а) Пусть $\xi > 0$, $\alpha \geqslant b > 0$. Так как

$$\int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = e^{-\alpha\xi}/\alpha$$

и $\alpha \geqslant b$, то неравенство

$$0 < \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx \leqslant \frac{e^{-\xi b}}{b} < \varepsilon$$

для каждого $\varepsilon > 0$ выполняется при всех $\alpha \in E$, если $\xi > \frac{1}{b}\ln\frac{1}{\varepsilon b}$.

Обозначим $\delta_\varepsilon = \max(\sigma_\varepsilon;\ 0)$, где $\sigma_\varepsilon = \frac{2}{b}\ln\frac{1}{b\varepsilon}$. Тогда неравенство (2) для данного интеграла справедливо при всех $\xi \in [\delta_\varepsilon;\ +\infty)$ и при всех $\alpha \in E$, т. е. интеграл сходится равномерно.

б) Для произвольного числа $\delta > 0$ выберем $\xi_\delta = 1 + \delta$, $\alpha_\delta = 1/(1+\delta)$. Тогда

$$\int_{\xi_\delta}^{+\infty} e^{-x\alpha_\delta}\,dx = \frac{e^{-\xi_\delta \alpha_\delta}}{\alpha_\delta} = (1+\delta)\,e^{-1} \geqslant e^{-1},$$

т. е. неравенство (3) выполняется при $\varepsilon_0 = e^{-1}$. Следовательно, интеграл сходится неравномерно на множестве $(0;\ +\infty)$. ▲

**2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла.** Если на промежутке $[a; +\infty)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x;\alpha)| \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in [a; +\infty)$ и для всех $\alpha \in E$, и если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл (1) сходится *абсолютно* и *равномерно* на множество $E$.

Пример 2. Доказать равномерную сходимость интеграла $I(\alpha)$ на множестве $E$, если:

1) $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2}\,dx, \quad E = \mathbb{R}.$

2) $I(\alpha) = \int\limits_3^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}}\,dx, \quad E = [0;\ 2].$

△ 1) Так как $\left|\frac{\sin \alpha x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса данный интеграл сходится равномерно на множестве $\mathbb{R}$.

2) Если $\alpha \in [0;\ 2]$, $x \in [3;\ +\infty)$, то $0 \leqslant \ln^\alpha x \leqslant \ln^2 x$, и поэтому

$$0 \leqslant \frac{\ln^\alpha x}{x^{5/4}} \leqslant \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}.$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_3^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^{5/4}}\,dx$ следует равномерная сходимость данного интеграла на множестве $E$. ▲

**3. Признак Дирихле равномерной сходимости интеграла.** Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,g(x;\ \alpha)\,dx$$

сходится равномерно по $\alpha$ на множестве $E$, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции $f$, $g$, $g'_x$ непрерывны по $x$ на множестве $[a;\ +\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $g(x;\ \alpha) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;

2) функция $g'_x(x;\ \alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака при изменении $x$ на промежутке $[a;\ +\infty)$;

3) функция $f$ для каждого $\alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную, т. е. существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| \int_a^x f(t;\ \alpha)\, dt \right| \leqslant M$$

для всех $x \in [a;\ +\infty)$ и для всех $\alpha \in E$.

Пример 3. Доказать, что интеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

сходится равномерно по $\alpha$ на множестве $E = [b;\ +\infty)$, где $b > 0$.

△ Пусть $F(x;\ \alpha) = \int_0^x \sin \alpha t\, dt$, тогда

$$F(x;\ \alpha) = \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha}$$

и $|F(x; \alpha)| \leqslant 2/b$ для всех $x \in [0; +\infty)$ и для всех $\alpha \geqslant b$. Кроме того, $1/x \to 0$ при $x \to +\infty$, причем функция $1/x$ не зависит от $\alpha$. По признаку Дирихле данный интеграл сходится равномерно по $\alpha$ на множестве $[b;\ +\infty)$, где $b > 0$. ▲

**4. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла.** Интеграл (1) сходится равномерно на множестве $E$ тогда и только тогда, когда выполняется *условие Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon \in (a;\ +\infty)$ такое, что для любых $\xi' \in [\delta_\varepsilon;\ +\infty)$, $\xi'' \in [\delta_\varepsilon;\ +\infty)$ и для всех $\alpha \in E$ выполняется неравенство

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x;\ \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Если условие Коши не выполняется, т. е. существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (a;\ +\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta \in E$, $\xi'_\delta$ и $\xi''_\delta$, где $\xi'_\delta \geqslant \delta$, $\xi''_\delta \geqslant \delta$, такие, что

$$\left| \int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x;\ \alpha_\delta)\, dx \right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{4}$$

то интеграл (1) не является равномерно сходящимся на множестве $E$.

Пример 4. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится неравномерно на множестве $E$, если:

1) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx,\quad E=(0;\ +\infty).$

2) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx,\quad E=[0;\ 1].$

△ 1) Для любого $\delta>0$ выберем $\alpha_\delta=1/(1+\delta)^2$, $\xi'_\delta=\delta$, $\xi''_\delta=\delta+1$. Тогда

$$\int\limits_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} e^{-\alpha_\delta x^2}\,dx \geqslant e^{-\alpha_\delta\left(\xi''_\delta\right)^2}\left(\xi''_\delta-\xi'_\delta\right)=e^{-1}=\varepsilon_0,$$

т. е. выполняется условие (4). Следовательно, данный интеграл, сходящийся при каждом $\alpha\in E$, сходится неравномерно на множестве $E$.

2) Для любого $\delta>0$ выберем $\alpha_\delta=\delta$, $\xi'_\delta=\pi/(3\delta)$, $\xi''_\delta=\pi/(2\delta)$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} \frac{\sin \alpha_\delta x}{x}\,dx\right|=\left|\int\limits_{\pi/(3\delta)}^{\pi/(2\delta)} \frac{\sin \delta x}{x}\,dx\right|=\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,dt=\varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0>0$. Поэтому интеграл, сходящийся при каждом $\alpha\in[0;\ 1]$, сходится неравномерно на множестве $[0;\ 1]$. ▲

**5. Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру.** Если функция $f(x;\ \alpha)$ непрерывна на множестве

$$D=\{(x;\ \alpha):\ a\leqslant x<+\infty,\ \alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2\}$$

и если интеграл $I(\alpha)=\int\limits_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha$ на отрезке $[\alpha_1;\ \alpha_2]$, то *функция $I(\alpha)$ непрерывна на отрезке* $[\alpha_1;\ \alpha_2]$.

---

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E$ (**14.1—14.5**):

**14.1.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha},\quad E=[\alpha_0;\ +\infty),\ \alpha_0>1.$

2) $I(\alpha)=\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha},\quad E=(0;\ \alpha_0),\ \alpha_0<1.$

3) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>1$.

4) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{1/2}\frac{dx}{x\,|\ln x|^{\alpha}}$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>1$.

5) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x^4}\,dx$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>0$.

6) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty}x^{\alpha}e^{-2x}\,dx$, $E=[1;\ 3]$.

**14.2.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos 2x\,dx$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>0$.

2) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln^2 x\cdot\sin 3x}{(x-1)^{\alpha}}\,dx$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>1$.

3) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\ln^3 x}{x^2+\alpha^4}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

4) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+(x-\alpha)^4}$, $E=(-\infty;\ a)$, $a>0$.

5) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}x^{\alpha-1}\ln^3 x\,dx$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>0$.

6) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)\cdot\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2}\,dx$, $E=[-a;\ a]$, $a>0$.

**14.3.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{4+x^2}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

2) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2-x)}}\,dx$, $E=(-1/2;\ 1/2)$.

3) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{\alpha}\operatorname{arctg}\alpha x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $E=[0;\ 2]$.

4) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$, $E=[\alpha_0;\ +\infty)$, $\alpha_0>0$.

5) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x \cdot \ln x}{\sqrt{x}}\, dx, \quad E=[\alpha_0;\ +\infty),\ \alpha_0>0.$

6) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(x+1)\ln^2 x}\, dx, \quad E=[\alpha_0;\ +\infty),\ \alpha_0>0.$

**14.4.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\, dx, \quad E=[0;\ +\infty).$

2) $I(\alpha)=\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x}} e^{-\alpha x}\, dx, \quad E=[0;\ +\infty).$

3) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}\, dx, \quad E=\mathbb{R}.$

4) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^5)}{x}\, dx, \quad E=[\alpha_0;\ +\infty),\ \alpha_0>0.$

5) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \cos(\alpha x^2)\, dx, \quad E=[1;\ +\infty).$

6) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(\alpha \operatorname{sh} x)\, dx, \quad E=[1/2;\ +\infty).$

**14.5.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x^{\alpha}\, dx, \quad E=[\alpha_0;\ +\infty),\ \alpha_0>1.$

2) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\alpha \cos(\alpha^2 x)}{\alpha+x^{\alpha}}\, dx, \quad E=[3;\ 5].$

3) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \sin 2x \cdot \sin(\alpha/x)\, dx, \quad E=[0;\ 1/2].$

4) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^4 x)}{x+\alpha^2}\, dx, \quad E=[1;\ +\infty).$

5) $I(\alpha)=\int\limits_{0}^{+\infty} (\alpha^5+x^3)\, e^{-\alpha x^4}\, dx, \quad E=[1;\ 4].$

6) $I(\alpha)=\int\limits_{2}^{+\infty} x^{\alpha} e^{-2x^{\alpha}}\, dx, \quad E=[1;\ 2].$

**14.6.** Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E_1$ и сходится неравномерно на множестве $E_2$:

1) $I(\alpha)=\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}, \quad E_1=[-1;\ 2/3],\ E_2=[-1;\ 1).$

2) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^\alpha}, \quad E_1=[3;\ +\infty),\ E_2=(1;\ +\infty).$

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}, \quad E_1=(-\infty;\ 0],\ E_2=[0;\ +\infty).$

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\,dx, \quad E_1=[0;\ 2],\ E_2=[0;\ +\infty).$

5) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^4}\,dx, \quad E_1=[\alpha_0;\ +\infty),\ \alpha_0>0;\ E_2=(0;\ +\infty).$

6) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x}\sin x\,dx, \quad E_1=[0;\ 1],\ E_2=[1;\ +\infty)$

Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве $E$ (**14.7—14.8**):

**14.7.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}, \quad E=(1;\ +\infty).$

2) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx, \quad E=[0;\ 1].$

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}\,dx, \quad E=(0;\ +\infty).$

4) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx, \quad E=[0;\ +\infty).$

5) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \sin\alpha\cdot e^{-\alpha^2(1+x^2)}\,dx, \quad E=\mathbb{R}.$

6) $I(\alpha)=\int\limits_0^{1} \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}, \quad E=(0;\ 2).$

**14.8.** 1) $I(\alpha)=\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx, \quad E=[0;\ 1/2].$

2) $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx, \quad E=[0;\ 1].$

3) $I(\alpha)=\int\limits_1^2 \frac{dx}{|\ln(\alpha x)|^{\alpha}}\,dx, \quad E=[1/2;\ 5/8].$

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\,dx, \quad E=[0;\ 1),$

5) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+x^{\alpha}}\,dx, \quad E=(0;\ +\infty).$

6) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha}{x^3}\, e^{-\alpha/(2x^2)}\,dx, \quad E=[1;\ +\infty).$

**14.9.** Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Доказать, что на множестве $[0;\ +\infty)$ равномерно сходятся интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^{+\infty} e^{-\alpha x^2} f(x)\,dx.$$

**14.10.** Доказать, что если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а функция $g(x, \alpha)$ монотонна по $x$ на множестве $D=[a;+\infty)$ для каждого $\alpha \in E$ и равномерно ограничена на множестве

$$G=\{(x;\ \alpha):\ x \in D,\ \alpha \in E\},$$

т. е. существует число $M>0$ такое, что $|g(x;\ \alpha)| \leqslant M$ для всех $(x;\ \alpha) \in G$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g(x;\ \alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha$ на множестве $E$.

**14.11.** Доказать, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,g(x;\ \alpha)\,dx$ сходится равномерно по $\alpha$ на множестве $E$, если функция $f(x;\ \alpha)$ интегрируема по $x$ на отрезке $[a;\ A]$ для любого $A>a$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно $\alpha$ на множестве $E$, а функция $g(x;\ \alpha)$ равномерно ограничена на множестве

$$G=\{(x;\ \alpha):\ a \leqslant x < +\infty,\ \alpha \in E\}.$$

**14.12.** Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[0; a]$ для любого $a>0$, и пусть существует число $\alpha_0$ такое, что функция

$$F(A)=\int_0^A e^{-\alpha_0 x} f(x)\,dx$$

ограничена на множестве $[0; +\infty)$. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$ сходится равномерно на множестве $[\alpha_0+\delta; +\infty)$, где $\delta>0$.

**14.13.** Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[0; +\infty)$, интегрируема по Риману на отрезке $[0; A]$ для любого $A>0$, и пусть существует число $\alpha_0$ такое, что сходится интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} f(x)\,dx.$$

Доказать, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$$

сходится равномерно на множестве $[\alpha_0; +\infty)$.

**14.14.** Исследовать на равномерную сходимость на множестве $E$ интеграл $I(\alpha)$:

1) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt[3]{x^2}} \operatorname{arctg}(\alpha x)\,dx, \quad E=\{\alpha\colon |\alpha|\geqslant 1\}.$

2) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{x}} \dfrac{dx}{4+\alpha^2x^2}, \quad E=\mathbb{R}.$

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(e^x-x)}{x^\alpha}\,dx, \quad E=(2; 3).$

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,dx, \quad E=\{\alpha\colon -\infty<\alpha<-1/2\}.$

5) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cdot \operatorname{arctg}(\alpha x)\,dx, \quad E=\mathbb{R}.$

6) $I(\alpha)=\int\limits_0^{1} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\cdot 2^{\alpha x}\,dx, \quad E=(-\infty; 1].$

**14.15.** Доказать равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+1}=1.$

2) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\frac{dx}{1+\alpha^2x^2}=0.$

3) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^\alpha}\,dx=1.$

4) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\alpha^2\sin x\,e^{-\alpha^2x^2}\,dx=1/2.$

5) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx=\pi/2.$

6) $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\alpha^2\sin x\,e^{-\alpha^2x^2}\,dx=0.$

**14.16.** Доказать, что функция $F(\alpha)$ непрерывна на множестве $E$, если:

1) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx,\quad E=\mathbb{R}.$

2) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx,\quad E=\mathbb{R}.$

3) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\sin(\alpha x^2)\,dx,\quad E=[1;+\infty).$

4) $F(\alpha)=\int\limits_0^{1}\frac{\sin(\alpha/x)}{x^\alpha}\,dx,\quad E=(0;1).$

5) $F(\alpha)=\int\limits_0^{1}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,\quad E=[0;1).$

6) $F(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\sin(\alpha/x^2)\sqrt{\ln x}\,dx,\quad E=\mathbb{R}.$

Исследовать функцию $F(\alpha)$ на непрерывность на множестве $E$ (14.17—14.18):

**14.17.** 1) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$, $E=(2;\ +\infty)$.

2) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}\,dx$, $E=[0;\ +\infty)$.

3) $F(\alpha)=\int\limits_0^{1}\frac{\ln x}{(x-\alpha)^2+4}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

4) $F(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$, $E=(0;\ +\infty)$.

5) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^\alpha x}$, $E=[0;\ 1)$.

6) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

**14.18.** 1) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha^2 x}\,dx$, $E=\mathbb{R}$.

2) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos x^2\,dx$, $E=[0;\ +\infty)$.

3) $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx$, $E=(0;\ 1)$.

4) $F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$, $E=(0;\ 2)$.

**14.19.** Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx=\int\limits_0^{+\infty}f(x)\,dx,$$

если функция $f$ интегрируема на промежутке $(0;\ +\infty)$.

**14.20.** Доказать, что если функция $f$ абсолютно интегрируема на промежутке $(0;\ +\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{+\infty}f(x)\cos nx\,dx=0.$$

**14.21.** Доказать, что если функция $f$ непрерывна и ограничена на промежутке $[0; +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha f(x)}{x^2+\alpha^2}\,dx=f(0).$$

**14.22.** Законен ли переход к пределу при $\alpha\to+0$ под знаком интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx?$$

**14.23.** Доказать, что если функция $f$ непрерывна и ограничена на промежутке $[0; \infty)$ и $f(0)=0$, а функция $g$ абсолютно интегрируема на $[0; +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_0^{+\infty}f(\alpha/x)\,g(x)\,dx=0.$$

**14.24.** Пусть функция $f(x; \alpha)$ при $\alpha\in E$ интегрируема по $x$ (в собственном смысле) на отрезке $[a; A]$ при любом $A>a$ и на каждом таком отрезке при $\alpha\to\alpha_0$, $\alpha_0\in E$, стремится равномерно относительно $x$ к предельной функции $\varphi(x)$, и пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x; \alpha)\,dx$ сходится равномерно на множестве $E$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^{+\infty}f(x; \alpha)\,dx=\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

**14.25.** Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^{+\infty}f(x; \alpha)\,dx=\int\limits_a^{+\infty}\lim_{\alpha\to\alpha_0}f(x; \alpha)\,dx,$$

если $f(x; \alpha)\rightrightarrows f(x; \alpha_0)$ в каждом конечном интервале $(a; A)$, где $a<A<+\infty$, $\alpha\in[\alpha_1; \alpha_2]$, $\alpha_0\in[\alpha_1; \alpha_2]$, и если существует функция $F(x)$ такая, что при $|f(x;\alpha)|\leqslant F(x)$ для всех $\alpha\in\in[\alpha_1; \alpha_2]$ и для всех $x\in[a, +\infty)$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty}F(x)\,dx$ сходится.

---

## § 15. Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов

**1. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.** Если функции $f(x; \alpha)$ и $f'_\alpha(x; \alpha)$ непрерывны на множестве

$$G=\{(x; \alpha):\ a\leqslant x<+\infty,\ \alpha_1\leqslant\alpha\leqslant\alpha_2\},$$

интеграл

$$I(\alpha)=\int_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx$$

сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1;\ \alpha_2]$, а интеграл

$$\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\ \alpha)\,dx$$

сходится равномерно по $\alpha$ на отрезке $[\alpha_1;\ \alpha]$, то

$$I'(\alpha)=\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\ \alpha)\,dx \qquad (1)$$

при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ (*правило Лейбница*).

**2. Интегрирование несобственного интеграла по параметру.** Если функция $f(x;\ \alpha)$ непрерывна на множестве

$$G=\{(x;\ \alpha):\ a \leqslant x < +\infty,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$$

и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx$ равномерно сходится по $\alpha$ на отрезке $[\alpha_1;\ \alpha_2]$, то справедлива формула

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx=\int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\ \alpha)\,d\alpha. \qquad (2)$$

Если $f(x;\ \alpha) \geqslant 0$ на множесте $G$, то равенство (2) остается в силе также и для бесконечного промежутка $(\alpha_1;\ \alpha_2)$ в предположении, что внутренние интегралы в равенстве (2) являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства (2) имеет смысл.

Если функция $f(x;\ \alpha)$ непрерывна на множестве

$$\tilde{G}=\{(x;\ \alpha):\ a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant \alpha < +\infty\},$$

интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx \quad \text{и} \quad \int_c^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,d\alpha$$

сходятся равномерно соответственно по $\alpha$ и $x$ на отрезках $[c;\ \xi]$ и $[a;\ \eta]$ при каждом фиксированном $\xi \in (c;\ +\infty)$ и $\eta \in \in (a;\ +\infty)$ и если, кроме того, хотя бы один из повторных ин-интегралов

$$\int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} |f(x;\ \alpha)|\,dx,\quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x;\ \alpha)|\,d\alpha$$

сходится, то сходятся и равны между собой оба повторных интеграла от функции $f$, т. е.

$$\int_c^{+\infty} d\alpha \int_a^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x;\ \alpha)\,d\alpha. \qquad (3)$$

При вычислении несобственных интегралов часто используются указанные ниже интегралы (4)—(7).

Если $\alpha > 0$, то для любого $\beta \in \mathbb{R}$ справедливы формулы

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad (4)$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (5)$$

Формулы (4)—(5) можно получить, используя метод интегрирования по частям.

Если функция $f$ непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$ и для каждого $A > 0$ сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, то при любых $a > 0$, $b > 0$ справедлива *формула Фруллани*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln(b/a). \qquad (6)$$

Если интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, где $f$ — непрерывная на промежутке $[a;\ +\infty)$ функция, расходится, но существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ и, кроме того, сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx$, то, применив формулу (6) к функции $\tilde{f}(x) = f(x) - f(+\infty)$, получим равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0) - f(+\infty))\ln(b/a). \qquad (7)$$

Пример 1. Вычислить *интеграл Дирихле*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx. \qquad (8)$$

△ Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha;\ \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \quad \beta > 0. \tag{9}$$

При фиксированном $\beta > 0$ интеграл (9) сходится для каждого $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов, так как функция $\frac{1}{x} e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0;\ +\infty)$, а функция $\sin \alpha x$ имеет при $\alpha \neq 0$ ограниченную первообразную $\left(\int_0^x \sin \alpha t\, dt = \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha}\right)$. При $\alpha = 0$ интеграл (9) равен нулю. Кроме того, интеграл

$$K(\alpha;\ \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx,$$

полученный из (9) дифференцированием по $\alpha$ подынтегральной функции, сходится равномерно по $\alpha$ на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса. Используя правило Лейбница (1) и формулу (4), получаем

$$\Phi'_\alpha(\alpha;\ \beta) = K(\alpha;\ \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{10}$$

Интегрируя на отрезке $[0;\ \alpha]$ равенство (10), находим

$$\Phi(\alpha;\ \beta) - \Phi(0;\ \beta) = \beta \int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Так как $\Phi(0;\ \beta) = 0$, то отсюда следует, что при любом $\beta > 0$ справедлива формула

$$\Phi(\alpha;\ \beta) = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta),$$

т. е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}. \tag{11}$$

Вычислим интеграл (8), считая, что $\alpha > 0$. Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha > 0$ интеграл (9) сходится равномерно по $\beta$ на отрезке $[0;\ 1]$, так как функция $\sin \alpha x$ имеет ограниченную первообразную ($\alpha > 0$ фиксировано), а функция $g = e^{-\beta x}/x$ монотонно убывает ($g'_x < 0$ при $x > 0$, $\beta \geqslant 0$) и $g(x;\ \beta) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на отрезке $[0;\ 1]$. По признаку Дирихле интеграл (11) сходится равномерно по $\beta$ на отрезке $[0;\ 1]$. Из равномерной сходимости интеграла (11) и непрерывности функции $e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ на множестве

$$G = \{(x;\ \beta):\ 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$$

следует непрерывность по $\beta$ функции $\Phi(\alpha; \beta)$ на отрезке $[0; 1]$ и, в частности, непрерывность по $\beta$ этой функции справа в точке $\beta = 0$. Это означает, что в интеграле (11) можно перейти к пределу при $\beta \to +0$ под знаком интеграла. Следовательно,

$$\lim_{\beta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что $\frac{\sin \alpha x}{x}$ — нечетная по $\alpha$ функция, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangle \tag{12}$$

Пример 2. Вычислить *интегралы Лапласа*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx \quad \text{и} \quad K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx.$$

$\triangle$ Пусть $\alpha > 0$. Так как функция $\frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}$ непрерывна при любых $\alpha$ и $x$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} \right) dx = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx$$

сходится равномерно по $\alpha$ на отрезке $[\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, то, применяя правило Лейбница (1), получаем

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx. \tag{13}$$

Складывая почленно равенство (13) с равенством

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \quad \text{где} \quad \alpha > 0,$$

находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1 + x^2)} dx.$$

Дифференцируя полученное равенство почленно, имеем

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx.$$

Таким образом, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(\alpha)-I(\alpha)=0$, общее решение которого имеет вид

$$I(\alpha)=C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}. \tag{14}$$

Заметим, что

$$|I(\alpha)|\leqslant I(0)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi/2.$$

Кроме того $e^{-\alpha}\to 0$ при $\alpha\to+\infty$, а $e^{\alpha}\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$. Отсюда следует, что в формуле (14) $C_1=0$, и поэтому $I(\alpha)=C_2e^{-\alpha}$. Полагая $\alpha=0$ и учитывая, что $I(0)=\pi/2$, получаем $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}$ при $\alpha>0$. Так как $I(\alpha)$ — четная функция, то

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|},\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{15}$$

Из равенства (13) следует, что

$$I'(\alpha)=-K(\alpha).$$

Следовательно,

$$K(\alpha)=-\left(\frac{\pi}{2}e^{-\alpha}\right)'=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad \alpha>0,$$

т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad \alpha>0,$$

откуда в силу нечетности функции $K(\alpha)$ следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\cdot e^{-|\alpha|},\quad \alpha\in\mathbb{R}. \blacktriangle \tag{16}$$

Пример 3. Вычислить интеграл *Эйлера — Пуассона* $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

$\triangle$ Положим $x=yt$, где $t>0$ ($t$ — фиксированное число). Тогда $I=\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2t^2}t\,dy$, откуда

$$I\cdot e^{-t^2}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(y^2+1)t^2}t\,dy. \tag{17}$$

Интегрируя обе части равенства (17) по $t$ на промежутке $[0;+\infty)$, получаем

$$I\cdot\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int\limits_0^{+\infty}dt\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2(1+y^2)}t\,dy. \tag{18}$$

Левая часть (18) равна $I^2$. Вычислим правую часть $K$ равенства (18), изменив порядок интегрирования:

$$K=\int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)}t\,dt.$$

Так как

$$\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2(1+y^2)}\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)}\frac{d\,((1+y^2)\,t^2)}{1+y^2}=$$

$$=-\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{1}{2(1+y^2)},$$

то

$$K=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\pi/4.$$

Следовательно, $I^2=K=\pi/4$, откуда $I=\sqrt{\pi}/2$, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}/2. \tag{19}$$

Перестановка порядка интегрирования в равенстве (18) законна, так как подынтегральная функция $g=te^{-t^2(1+y^2)}$ неотрицательна при $t\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ и непрерывна, интегралы от функции $g$, взятые по $t$ и $y$, сходятся равномерно по $y$ и $t$ соответственно на отрезках $[0;\xi]$ и $[0;\eta]$ при любых $\xi>0$ и $\eta>0$ (признак Вейерштрасса), а один из повторных интегралов сходится и равен $\pi/4$. ▲

Пример 4. Вычислить *интеграл Лапласа*

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx.$$

△ Дифференцируя интеграл $I(\alpha)$ по $\alpha$, получаем

$$I'(\alpha)=-2\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx. \tag{20}$$

Применение правила Лейбница законно, так как функция $e^{-x^2}\cos 2\alpha x$ непрерывна при $x\geqslant 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, интеграл $I(\alpha)$ сходится при каждом $\alpha\in\mathbb{R}$, а интеграл в правой части (20) сходится равномерно по $\alpha$ на $\mathbb{R}$ (признак Вейерштрасса). Преобразуем равенство (20), применяя метод интегрирования по частям:

$$I'(\alpha)=e^{-x^2}\sin 2\alpha x\,\Big|_0^{+\infty}-2\alpha\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что $I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha)$ или $\frac{dI(\alpha)}{I(\alpha)} =$ $= -2\alpha\, d\alpha$, откуда

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2}.$$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$$

(пример 3); получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}. \blacktriangle \tag{22}$$

Пример 5. Вычислить *интегралы Френеля*

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx \quad \text{и} \quad I_1 = \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

$\triangle$ Полагая $x^2 = t$, запишем интеграл $I$ в следующем виде:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt. \tag{23}$$

Пусть $t > 0$, тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du, \tag{24}$$

для получения которого достаточно в интеграле $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du$ сделать замену переменной по формуле $\sqrt{t}\, u = x$ и воспользоваться интегралом (19). Из (23) и (24) следует, что

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du. \tag{25}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t\, dt.$$

Используя формулу (5), находим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}. \tag{26}$$

Вычислим интеграл (26). Заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{dx}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^4} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2)\,dx}{x^2+1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d\,(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \pi/\sqrt{2},$$

откуда $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования в формуле (25) можно воспользоваться (см. (23)) при $\alpha \neq 0$ равенством

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t}\sin t\,dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\,du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha^2)}\sin t\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+\alpha^2)^2}.$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \to 0$ (законность перехода к пределу следует из равномерной сходимости интегралов), получим равенство (26), из которого следует, что

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{27}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \ \blacktriangle \tag{28}$$

---

**15.1.** Пусть $a > 0$, $b > 0$. Применяя формулу Фруллани (6), вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x}\,dx$. 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x}\,dx$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx$. 4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx$.

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (15.2—15.4):

**15.2.** 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2}\,dx$. 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx$. 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x}\,dx$.

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\,dx$. 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\,dx$.

**15.3.** 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\,dx$. 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x}\,dx$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx$. 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x}\,dx$.

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^4 x}{x}\,dx$. 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^7 x}{x}\,dx$.

**15.4.** 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^6 x}{x}\,dx$. 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sin \alpha x - \sin 2\alpha x}{x^3}\,dx$.

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2}\,dx$. 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\,dx$.

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x + \cos \beta x - 2}{x^2}\,dx$, 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos \alpha x}{x^2}\,dx$.

$\alpha > 0$, $\beta > 0$.

**15.5.** Используя интеграл Дирихле (12) или интеграл Фруллани (6), вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq \beta.$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin x - \sin \alpha x}{x^2}\, dx, \quad \alpha > 0.$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos x - \sin \alpha x}{x^2}\, dx, \quad \alpha > 0.$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2}\, dx.$ 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x \cos \alpha x}{x^3}\, dx, \quad \alpha > 3.$

**15.6.** С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx, \quad \beta > 0.$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx, \quad \beta > 0.$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x\, dx,$

$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \neq 0.$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x\, dx,$

$\alpha > 0,\ \beta > 0.$

5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{x^2 (x^2 + \beta^2)}\, dx, \ \alpha > 0,\ \beta > 0.$

**15.7.** Доказать, что если $\alpha > 0$, то

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1 + x^2)}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \alpha).$$

**15.8.** Используя результат примера **15.7**, доказать, что:

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln 2.$

2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

**15.9.** Пользуясь тем, что $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\,dx=\frac{1}{\alpha}$ при $\alpha>0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}\ln^m x\,dx$, где $m\in\mathbb{N}$.

**15.10.** Пользуясь формулой $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2a}$ $(a>0)$, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},\quad\text{где } n\in\mathbb{N}.$$

**15.11.** Пользуясь тем, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$ при $\alpha>0$, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx=\pi(b-a)/2.$$

**15.12.** Пользуясь тем, что $\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}$ при $\alpha>0$, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a},\quad a>0,\ b>0.$$

**15.13.** Используя интеграл Эйлера — Пуассона (19), доказать, что:

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\alpha x^2+2\beta x)}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/\alpha},\quad \alpha>0.$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(ax^2+2bx)\,e^{-(\alpha x^2+2\beta x)}\,dx=\frac{(\alpha+2\beta^2)\,a-4\alpha\beta b}{2\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/\alpha},$

$\alpha>0.$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx=2\sqrt{\pi}\,(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}),\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/(4\alpha)},\quad \alpha>0.$

5) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2\alpha},\quad \alpha>0.$

**15.14.** Пользуясь тем, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, где $\alpha > 0$, доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Вычислить интеграл (**15.15—15.19**):

**15.15.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{1+x^2}\,dx$, $\alpha > 0$. 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos\beta x}{x^2}\,dx$, $\alpha > 0$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^4}\,dx$. 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx$. 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2+2bx+c}$, $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

**15.16.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x \frac{dx}{x}$, $\alpha > 0$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x\,dx$, $\alpha > 0$. 4) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\,dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x \frac{dx}{x^2}$, $\alpha > 0$. 6) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $|\alpha| \leqslant 1$.

**15.17.** 1) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $|\alpha| \leqslant 1$. 2) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $\alpha \leqslant 1$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+\beta^2x^2)}{(1+x)^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

**15.18.** 1) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}\,dx\quad |\alpha|\leqslant 1.$

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx,\quad \alpha>0.$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\operatorname{arctg}\beta x}{x^3}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha^2/x^2}-e^{-\beta^2/x^2}\right)dx,\quad \alpha\beta\neq 0.$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\,dx,\quad \alpha>0,\ \beta>0.$

**15.19.** 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2+2bx+c)\,dx,\quad a>0.$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}e^{-\lambda x}\,dx,\quad \lambda>0.$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\cos 2ax\,dx.$ 4) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\cos 2ax\,dx.$

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}\cos\alpha x-e^{-bx}\cos\beta x}{x}\,dx,\quad a>0,\ b>0.$

**15.20.** Доказать, что функция

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}\,dx$$

непрерывна и дифференцируема на $\mathbb{R}$.

**15.21.** Доказать, что если $a>0$, $\delta>0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-axt^2}\,dt=\sqrt{\pi/a}.$$

**15.22.** Доказать, что интеграл Дирихле

$$I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$$

имеет при $\alpha\neq 0$ производную, однако ее нельзя найти с помощью правила Лейбница.

**15.23.** Выяснить, допустима ли перестановка порядка интегрирования в следующих случаях:

$$1)\ \int\limits_1^{+\infty}dy\int\limits_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\,dx.\qquad 2)\ \int\limits_1^{+\infty}dx\int\limits_0^{1}\frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy.$$

**15.24.** Используя представление *бесселевой функции нулевого порядка* $I_0(x)$ формулой

$$I_0(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}I_0(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\quad a>0.$$

**15.25.** *Многочлены Чебышёва — Эрмита* определяются формулами

$$H_0(x)\equiv 1,\quad H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}H_m(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}\,dx=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq n,\\ 2^n n!\,\sqrt{\pi}, & \text{если } m=n.\end{cases}$$

**15.26.** Доказать, что если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то функция

$$u(x;\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)}\,d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальному условию

$$\lim_{t\to+0}u(x;\ t)=f(x).$$

**15.27.** Доказать тождество:

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x^2}\,dx = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin(x-\alpha)}{x}\,dx, \quad \alpha > 0.$$

2) $$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2+a^2}\,dx, \quad a > 0.$$

3) $$\int_0^{x} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t}\,dt.$$

**15.28.** Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2bx\,dx = e^{-b^2} \int_0^{b} e^{t^2}\,dt.$$

**15.29.** Доказать, что

1) $$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}, \quad a > 0.$$

2) $$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{a^2+b^2}}, \quad a > 0.$$

3) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|\alpha|\sqrt{2}} \cos|\alpha|\sqrt{2}.$$

4) $$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin\frac{\alpha^2}{x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|\alpha|\sqrt{2}} \sin|\alpha|\sqrt{2}.$$

---

## § 16. Эйлеровы и некоторые другие интегралы

Интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx, \tag{1}$$

сходящийся при $p > 0$, называют *гамма-функцией*, а интеграл

$$\mathrm{B}(p;\ q) = \int_0^{1} x^{p-1} (1-x)^{q-1}\,dx, \tag{2}$$

сходящийся при $p > 0$ и $q > 0$, называют *бета-функцией*.

Интегралы (1) и (2) называют также *эйлеровыми интегралами второго* и *первого рода* соответственно.

Отметим основные формулы для интеграла (1):

а) *формула понижения*

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p), \quad p>0; \tag{3}$$

б) *формула дополнения*

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0<p<1. \tag{4}$$

Так как $\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=1$, то из формулы (3) следует, что

$$\Gamma(n+1)=n!, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Связь между бета-функцией и гамма-функцией выражается формулой

$$\mathrm{B}(p;\ q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ p>0,\ q>0. \tag{5}$$

Пример 1. Вычислить *интеграл Эйлера*

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx, \quad 0<\alpha<1.$$

△ Обозначим

$$I_1=\int\limits_0^1\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx, \quad I_2=\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx.$$

Пусть $0<x<1$, тогда

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{\alpha+k-1}. \tag{6}$$

Если $\alpha\in(0;\ 1)$, $x\in(0;\ 1)$, $f(x;\ \alpha)=x^{\alpha-1}/(1+x)$, $f_n(x;\ \alpha)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{\alpha+k-1}$, то

$$|f(x;\ \alpha)-f_n(x;\ \alpha)|=\left|\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}-\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\left(1+(-1)^{n+1}x^n\right)\right|=$$

$$=\frac{x^{\alpha+n-1}}{1+x}\leqslant\frac{x^{n-1}}{2}.$$

Так как

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx=1/n\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

то ряд (6) можно почленно интегрировать на отрезке [0; 1]. Поэтому

$$I_1=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha+k}.$$

Преобразуя интеграл $I_2$ с помощью подстановки $x=1/t$, получаем

$$I_2=-\int_1^0\frac{1}{t^{\alpha-1}(1+1/t)}\frac{dt}{t^2}=\int_0^1\frac{t^{-\alpha}\,dt}{1+t}.$$

Интегрируя почленно на отрезке [0; 1] ряд, получаемый из ряда (6) заменой $\alpha-1$ на $-\alpha$, найдем

$$I_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha-k}.$$

Следовательно,

$$I=I_1+I_2=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right). \tag{7}$$

Воспользуемся известным разложением функции $1/\sin z$ (см. [6]) на простые дроби:

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k\pi}+\frac{1}{z+k\pi}\right).$$

Полагая $z=\alpha\pi$, где $0<\alpha<1$, получаем

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}\right). \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\quad 0<\alpha<1. \ \blacktriangle \tag{9}$$

Пример 2. Доказать формулу (5).

$\triangle$ Полагая $x=(1+t)y$ (где $t>0$) в формуле (1):

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

получаем

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(1+t)^{\alpha}}=\int_0^{+\infty}y^{\alpha-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Пусть $\alpha = p + q$, где $p > 0$, $q > 0$. Тогда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}\, dy.$$

Умножая обе части этого равенства на $t^{p-1}$ и интегрируя по $t$ от 0 до $+\infty$, получаем

$$\Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1}\, dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y}\, dy. \qquad (10)$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства (10), полагая $t = x/(1-x)$; получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\, dt = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1}\, dx = \mathrm{B}(p;\ q). \qquad (11)$$

Меняя в правой части равенства (10) порядок интегрирования и используя формулу (11), находим

$$\Gamma(p+q)\,\mathrm{B}(p;\ q) = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y}\, dy \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-y} \frac{\Gamma(p)}{y^p}\, dy = \Gamma(p)\,\Gamma(q),$$

откуда следует формула (5).

Обоснование перестановки порядка интегрирования в правой части (10) проводится аналогично тому, как это делалось в примере 3 § 15. ▲

Пример 3. Доказать формулы (3) и (4).

△ а) В интеграле (1) заменяем $p$ на $p+1$, а затем, интегрируя по частям, получаем

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\, dx = -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx = p\Gamma(p).$$

б) Полагая в формуле (11) $q = 1 - p$, где $0 < p < 1$, и используя формулу (9), получаем

$$B(p;\ 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}. \qquad (12)$$

С другой стороны, из равенства (5) находим

$$B(p;\ 1-p) = \Gamma(p)\,\Gamma(1-p), \qquad (13)$$

так как $\Gamma(1) = 1$. Из равенств (12) и (13) следует формула (4). ▲

**Пример 4.** С помощью эйлеровых интегралов вычислить интегралы

$$\text{а) } I_1=\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x-2)^2}. \quad \text{б) } I_2=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,dx.$$

△ а) Применяя подстановку $x/(2-x)=t$, получаем

$$x=\frac{2t}{t+1},\quad 1-x=\frac{1-t}{t+1},\quad \frac{dx}{(x-2)^2}=\frac{dt}{2}.$$

Следовательно,

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int_0^1 t^{-1/3}(1-t)^{1/3}\,dt.$$

Используя формулы (2), (5), (3), (4) и учитывая, что $\Gamma(2)=1$, находим

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,\mathrm{B}(2/3;\ 4/3)=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,\frac{\Gamma(2/3)\,\Gamma(4/3)}{\Gamma(2)}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,\frac{1}{3}\,\Gamma(1/3)\,\Gamma(2/3)=\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}\,\frac{\pi}{\sin(\pi/3)}=$$
$$=\pi/(3\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2})=\pi\Big/\left(3\sqrt[6]{108}\right).$$

б) Полагая $x^2=t$, получаем

$$I_2=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{1/4}-1}{t+1}\ln t\,dt.$$

Воспользуемся формулой (12). Из этой формулы следует, что интеграл $I_2$ равен производной от функции

$$\varphi(p)=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{t+1}\,dt$$

в точке $p=1/4$. Следовательно,

$$I_2=\frac{d}{dp}\left(\frac{\pi}{4\sin\pi p}\right)\Bigg|_{p=1/4}=-\frac{\pi^2\cos\pi p}{4\sin^2\pi p}\Bigg|_{p=1/4}=-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}.\ ▲$$

---

**16.1.** Доказать равенства:

1) $\mathrm{B}(m;\ n)=\dfrac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!},\quad m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}.$

2) $\Gamma(a+n)=(a+n-1)(a+n-2)\ldots(a+1)\,a\cdot\Gamma(a),\ n\in\mathbb{N}.$

3) $\mathrm{B}(p;\ q)=\mathrm{B}(q;\ p),\quad p>0,\ q>0.$

4) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$ 5) $\mathrm{B}(1/2;\ 1/2)=\pi.$

6) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\quad n\in\mathbb{N}.$

**16.2.** Доказать, что $\Gamma(p)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем

$$\Gamma^{(m)}(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^m e^{-x}\,dx.$$

**16.3.** Доказать, что

$$\Gamma(\alpha)\sim 1/\alpha \text{ при } \alpha\to+0 \text{ и } \Gamma(\alpha)\to+\infty \text{ при } \alpha\to+\infty.$$

**16.4.** Доказать формулу

$$\Gamma(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+\alpha)}+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,\quad \alpha>0.$$

**16.5.** Доказать, что функция $\Gamma(\alpha)$ является строго выпуклой вверх на интервале $(0;\ +\infty)$.

**16.6.** Выразить через значения гамма-функции интегралы:

1) $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-\alpha x}\,dx,\quad p>0,\ \alpha>0.$ 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx,\quad \alpha>0.$

3) $\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x^\beta}\,dx,\quad \alpha>-1,\ \beta>0.$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}}e^{-\alpha/2x^2}\,dx,\quad \alpha>0,\ n\in\mathbb{N}.$

5) $\int\limits_0^{1} (\ln(1/x))^{\alpha-1}x^{\beta-1}\,dx,\ \alpha>0,\ \beta>0.$ 6) $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^p\frac{dx}{x^2},\ p>-1.$

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}e^{px}\,dx,\quad p>0.$ 8) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^\alpha},\quad \alpha>1/2.$

Используя эйлеровы интегралы, вычислить интегралы (16.7—16.12):

**16.7.** 1) $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$ 2) $\int\limits_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}.$

3) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}}.$ 4) $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}}.$

5) $\int\limits_1^{2}\sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}\,dx.$ 6) $\int\limits_0^{3}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^2(3-x)^3}}.$

**16.8.** 1) $\int\limits_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\frac{dx}{(x+3)^2}$. 2) $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x+2)^2}$.

3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-x^3}}$. 4) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(2-x)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

5) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{(x+1)^3}\,dx$. 6) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(x+1)^3}\,dx$.

**16.9.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

3) $\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{x/2}}{e^{2x}+1}\,dx$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}}\,dx,\quad 0<\alpha<\beta$. 6) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^{\alpha}}{(x+1)^3}\,dx,\quad -1<\alpha<2$.

**16.10.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x+1}\,dx$. 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}\,dx,\quad a\neq 0$. 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\ln x}{1+x^2}\,dx,\quad |\alpha|<1$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}\,(x+2)}\,dx$. 6) $\int\limits_{-1}^{1} \ln\frac{1+x}{1-x}\,\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$.

**16.11.** 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1}\ln(x-1)}{x^2+3x}\,dx$. 2) $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x-2}}\,dx$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2}\,dx,\quad a\neq 0$. 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}\ln^2 x}{1+x^2}\,dx,\quad |\alpha|<1$.

5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$. 6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$.

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln x}{1+x}\,dx,\quad 0<\alpha<1$. 8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx$.

**16.12.** 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^2}\,dx, \quad 0<\alpha<2.$

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad -2<p<2.$

3) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^{\alpha} x}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx, \quad 0<\alpha<1.$ 4) $\int\limits_0^{1} x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx.$

5) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}.$ 6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^3)^2}.$

7) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha-1}}{1+x^2}\,dx, \quad 0<\alpha<1.$ 8) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x\cos^6 x\,dx.$

9) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{2\alpha-1} x\,dx, \quad 0<\alpha<1.$

Выразить через значения бета-функции интегралы (**16.13—16.14**):

**16.13.** 1) $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^{\alpha}}}, \quad \alpha>0.$

2) $\int\limits_0^{1} x^{\alpha}(1-x^{\beta})^{\gamma}\,dx, \quad \alpha>-1,\ \beta>0,\ \gamma>-1.$

3) $\int\limits_0^{a} x^{\alpha-1}(a-x)^{\beta-1}\,dx, \quad a>0,\ \alpha>0,\ \beta>0.$

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\beta}}\,dx, \quad 0<\alpha<\beta.$ 5) $\int\limits_0^{1} \frac{x^{3\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^3}}\,dx, \quad \alpha>-1/3.$

6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{(a+bx^{\beta})^{p}}\,dx, \quad a>0,\ b>0,\ \beta>0, \quad 0<(\alpha+1)/\beta<p.$

**16.14.** 1) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{p} x}{1+\cos x}\,dx, \quad p>1.$

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\alpha-1} x\cos^{\beta-1} x}{(\sin x+\cos x)^{\alpha+\beta}}\,dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0.$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2\alpha-1} x \cos^{2\beta-1} x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^{\alpha+\beta}}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ a > 0,\ b > 0.$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{\alpha-1} x \cos^{\alpha-1} x}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^{\alpha}}\, dx, \quad \alpha > 0,\ ab > 0.$

5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x\, dx, \quad \alpha > -1,\ \beta > -1.$

6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^{\alpha-1} x}{(1+\beta\cos x)^\alpha}\, dx, \quad 0 < |\beta| < 1,\ \alpha > 0.$

7) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2\alpha-1}(1-x)^{2\beta-1}}{(1+x^2)^{\alpha+\beta}}\, dx, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$

8) $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}{(x+c)^{\alpha+\beta+2}}\, dx, \quad 0 < a < b,\ c > 0,\ \alpha > -1,\ \beta > -1.$

**16.15.** Доказать равенства:

1) $\displaystyle \mathrm{B}(p;\ q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx, \quad p > 0,\ q > 0.$

2) $\displaystyle \mathrm{B}(p;\ q) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{p-1} + x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}\, dx, \quad p > 0,\ q > 0.$

3) $\displaystyle \mathrm{B}(p;\ p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \mathrm{B}(1/2;\ p), \quad p > 0.$

4) $\displaystyle \mathrm{B}(p;\ q) = \frac{q-1}{p+q-1} \mathrm{B}(p;\ q-1), \quad p > 0,\ q > 1.$

**16.16.** Выразить через гамма-функцию интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-\alpha x} \ln x\, dx, \quad \alpha > 0,\ p > -1.$$

**16.17.** Доказать равенства:

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}}.$ 2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma^2(1/4).$

(Указание. Положить $\cos\theta = 1 - 2\sqrt{x}$.)

3) $\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin\theta}{1+r\cos\theta}\right)^{\alpha-1}\frac{d\theta}{1+r\cos\theta}=\frac{2^{\alpha-1}}{(1-r^2)^{\alpha/2}}\frac{[\Gamma(\alpha/2)]^2}{\Gamma(\alpha)},\quad |r|<1.$

(Указание. Положить $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\sqrt{x}$.)

4) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int\limits_0^1\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}.$

5) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^4}\,dx\cdot\int\limits_0^{+\infty}x^2e^{-x^4}\,dx=\pi/(8\sqrt{2}).$

6) $\prod\limits_{k=1}^{n}\int\limits_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x^n}\,dx=(1/n)^{n-1/2}(2\pi)^{(n-1)/2}.$

Указание. Воспользоваться формулой дополнения (4) и равенством

$$\frac{z^n-1}{z-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{2k\pi i/n}).$$

**16.18.** Используя равенство

$$\frac{1}{x^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-xt}\,dt\quad (x>0,\quad p>0),$$

найти интегралы:

1) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^p}\,dx,\quad \alpha>0,\ 0<p<1.$

2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x^p}\,dx,\quad 0<p<2,\ \alpha>0.$

**16.19.** Вычислить интеграл:

1) $I(p)=\int\limits_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx,\quad 0<p<1.$

(Указание. $I(p)=\lim\limits_{\lambda\to+0}[\mathrm{B}(p;\ \lambda)-\mathrm{B}(1-p;\ \lambda)]$.)

2) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\beta x}\,dx,\quad 0<\alpha<\beta.$

(Указание. $e^{-2\beta x}=t$.)

3) $I=\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\,dx$. (Указание. Использовать равенство $I=\int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-x)\,dx$ и формулу дополнения (4).)

4) $I(a)=\int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(x)\,dx,\quad a>0.$

(Указание. Продифференцировать интеграл $I(a)$ по параметру и использовать формулу понижения (3).)

5) $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin\pi x\,dx.$

6) $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2\pi n x\,dx,\quad n\in\mathbb{N}.$

**16.20.** Доказать *формулы Эйлера*:

1) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x.$

2) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x,\quad \lambda>0,\quad x>0,$ $|\alpha|<\pi/2.$

---

## § 17. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

**1. Интеграл Фурье.** Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на любом отрезке действительной прямой, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные. Тогда в точках непрерывности функция $f$ представляется в виде *интеграла Фурье*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \tag{1}$$

а в точках разрыва функции $f$ левую часть равенства (1) следует заменить на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция $f$ имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является четной, справедливо равенство

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy, \tag{2}$$

где

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{3}$$

а в случае, когда $f$ — нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy, \tag{4}$$

где

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{5}$$

Формулу (1) можно записать в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iy(x-t)}\,dt, \tag{6}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

Пример 1. Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если:

1) $f(x)=e^{-\alpha|x|}$, $\alpha>0$. 2) $f(x)=\begin{cases} -1, & \text{если } -1<x<0,\\ 1, & \text{если } 0<x<1,\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

$\triangle$ 1) Так как $f$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ четная функция, то, используя формулы (2), (3) и формулу (4) § 15, получаем

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos yt\,dt=\frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2+y^2)},$$

$$e^{-\alpha|x|}=\frac{2\alpha}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos yx}{\alpha^2+y^2}\,dy, \quad x\in\mathbb{R}.$$

2) Функция $f$ является нечетной и непрерывной на $\mathbb{R}$, кроме точек $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Используя формулы (3) и (4), находим

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\sin yt\,dt=\frac{2(1-\cos y)}{\pi y},$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y}\sin xy\,dy, \tag{7}$$

если $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$. При $x=1$ должно выполняться равенство

$$\frac{f(1-0)+f(1+0)}{2}=\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y}\sin y\,dy.$$

Полагая $y=2t$, отсюда находим

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^3 t\cos t}{t}\,dt=\frac{\pi}{16}.$$

Если в (7) положить $x=1/2$, то

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{1-\cos y}{y}\sin\frac{y}{2}\,dy.$$

Полагая здесь $y=2t$, найдем

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t}\,dt=\frac{\pi}{4}. \ \blacktriangle$$

**2. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье.** Функцию $\hat{f}$, определяемую формулой

$$\hat{f}(y)=V.\,P.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{-iyt}\,dt, \tag{8}$$

называют *преобразованием Фурье* функции $f$ и обозначают также и через $F[f]$, а функцию $\tilde{f}$, определяемую формулой

$$\tilde{f}(y)=V.\,P.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{iyt}\,dt, \tag{9}$$

называют *обратным преобразованием Фурье* функции $f$ и обозначают $F^{-1}[f]$.

Если функция $f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то интегралы (8) и (9) существуют как несобственные, а не только в смысле главного значения.

Отметим следующие свойства преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье.

1) *Формула обращения.* Если непрерывная функция $f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то

$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f.$$

2) *Линейность.* Если существуют преобразование Фурье функций $f$ и $g$, то при любых комплексных $\alpha$ и $\beta$ справедливо равенство

$$F[\alpha f+\beta g]=\alpha F[f]+\beta F[g].$$

Аналогичное утверждение справедливо и для обратного преобразования Фурье.

3) *Непрерывность.* Если функция $f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то ее преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ — непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, причем

$$\lim_{y\to+\infty} \hat{f}(y) = \lim_{y\to-\infty} \hat{f}(y) = 0.$$

4) *Преобразование Фурье производной.* Если функция $f$ и ее производные до $n$-го порядка включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

5) *Производная преобразования Фурье.* Если функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(y) = F[f]$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до $n$-го порядка включительно, причем

$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k F\left[x^k f(x)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Пример 2. Найти преобразование Фурье функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$. 2) $f(x) = x^2 e^{-|x|}$.

3) $f(x) = \dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

△ 1) Так как функция $f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то ее преобразование Фурье существует и выражается формулой

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ixy}\, dx. \tag{12}$$

Преобразуя интеграл (12) и используя формулу (4) § 15, получаем

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} 2e^{-\alpha x} \cdot \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2}\, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos xy\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}.$$

Таким образом,

$$F[e^{-\alpha|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}, \quad \alpha > 0. \tag{13}$$

2) Применяя формулы (11) и (13), находим

$$F[x^2 e^{-|x|}] = -\{F[e^{-|x|}]\}'' = -\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+y^2}\right)'' =$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - 3y^2}{(1+y^2)^3}.$$

3) Используя формулу (10), получаем

$$F[f] = (iy)^3 F\left[\frac{1}{1+x^2}\right],$$

где

$$F\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{ixy}+e^{-ixy}}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-|y|}$$

(см. §15, формула (15)). Следовательно, $F[f] = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, y^3 e^{-|y|}$. ▲

---

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье (**17.1—17.4**):

**17.1.** 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < \tau, \\ 0, & \text{если } |x| > \tau. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{a}, & \text{если } |x| \leqslant a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$

3) $f(x) = \operatorname{sign}(x-a) - \operatorname{sign}(x-b), \quad b > a.$

4) $f(x) = 1/(x^2+a^2), \quad a \neq 0.$

**17.2.** 1) $f(x) = x/(x^2+a^2), \quad a \neq 0.$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi/2. \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \sin \omega x, & \text{если } |x| \leqslant 2\pi n/\omega, \\ 0, & \text{если } |x| > 2\pi n/\omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \omega > 0. \end{cases}$

**17.3.** 1) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x, \quad \alpha > 0.$

2) $f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \quad \alpha > 0.$

3) $f(x) = e^{-x^2}$. 4) $f(x) = xe^{-x^2}$.

**17.4.** 1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \quad \alpha > 0. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} \sin \omega x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \quad \alpha > 0. \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 < x < \pi n, \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > \pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

**17.5.** Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty;\ 0)$, если:

1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}2-3x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 2/3,\\ 0, & \text{если } x>2/3.\end{cases}$

**17.6.** Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее четным образом на интервал $(-\infty;\ 0)$, если:

1) $f(x)=e^{-\alpha x},\quad x\geqslant 0,\ \alpha>0.$

2) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } x>1.\end{cases}$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$ (**17.7—17.9**):

**17.7.** 1) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}e^{ix}, & \text{если } |x|\leqslant \pi,\\ 0, & \text{если } |x|>\pi.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } |x|\leqslant \pi,\\ 0, & \text{если } |x|>\pi.\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если } |x|\leqslant \pi,\\ 0, & \text{если } |x|>\pi.\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}e^{ix}, & \text{если } x\in[0;\ \pi],\\ 0, & \text{если } x\notin[0;\ \pi].\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } x\in[0;\ \pi],\\ 0, & \text{если } x\notin[0;\ \pi].\end{cases}$

**17.8.** 1) $f(x)=xe^{-\alpha|x|},\quad \alpha>0.$ 2) $f(x)=e^{-x^2/2}.$

3) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x.$ 4) $f(x)=\dfrac{d}{dx}(xe^{-|x|}).$

5) $f(x)=\dfrac{d}{dx}(x^2e^{-|x|}).$ 6) $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|}).$

**17.9.** 1) $f(x)=\begin{cases}x\sin x, & \text{если } |x|\leqslant \pi,\\ 0, & \text{если } |x|>\pi.\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } 1<|x|\leqslant 2,\\ 0, & \text{если } |x|>2 \text{ и } |x|\leqslant 1.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2\cos x, & \text{если } |x|\leqslant\pi, \\ 0, & \text{если } |x|>\pi. \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2, & \text{если } |x|\leqslant 1, \\ 1, & \text{если } 1<|x|<2, \\ 0, & \text{если } |x|\geqslant 2. \end{cases}$

**17.10.** Пусть $\hat{f}(y)=F[f(x)]$. Доказать, что:

1) $F[e^{i\alpha x}f(x)]=\hat{f}(y-\alpha), \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

2) $F[f(x-\alpha)]=e^{-i\alpha y}\hat{f}(y), \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

3) $F[\cos\alpha x\cdot f(x)]=\dfrac{\hat{f}(y-\alpha)+\hat{f}(y+\alpha)}{2}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

4) $F[\sin\alpha x\cdot f(x)]=\dfrac{\hat{f}(y-\alpha)-\hat{f}(y+\alpha)}{2i}, \quad \alpha\in\mathbb{R}.$

**17.11.** Пусть функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}$, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,dt\to 0 \quad \text{при} \quad |x|\to+\infty.$$

Доказать, что

$$F[\varphi]=-\frac{i}{y}\hat{f}(y), \quad \text{где} \quad \hat{f}(y)=F[f].$$

**17.12.** Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=1/(1+x^{12})$ имеет непрерывную производную десятого порядка.

**17.13.** Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=xe^{-|x|^3}$ есть бесконечно дифференцируемая функция.

**17.14.** Пусть $\hat{f}(y)$ — преобразование Фурье функции $1/(1+|x|^5)$. Доказать, что:

1) $\hat{f}(y)$ имеет непрерывную на $\mathbb{R}$ производную третьего порядка.

2) $\hat{f}(y)=O(1/y^5)$ при $y\to\infty$.

3) $\hat{f}(y)=o(1/y^5)$ при $y\to\infty$.

**17.15.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные. Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(y)|^2\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{f}(y)|^2\,dy,$$

где $\hat{f}(y)=F[f]$, $\tilde{f}(y)=F^{-1}[f]$.

**17.16.** Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Доказать, что:

1) Функция $h(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$, которую называют *сверткой* функций $f$ и $g$ и обозначают $f*g$, непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$.

2) $F[f*g]=F[f]\cdot F[g]$.

**17.17.** Найти $\varphi(y)$, если:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(y)\cos xy\,dy=1/(1+x^2)$.

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}, \quad x>0$.

ГЛАВА IV

# ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## § 18. Метрические пространства

**1. Метрика. Предел последовательности.** Множество $X$ называют *метрическим пространством*, если на совокупности упорядоченных пар $(x;\ y)$ элементов этого пространства определена такая неотрицательная функция $\rho(x;\ y)$, называемая *расстоянием* (или *метрикой*), что

1) $\rho(x;\ y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$, $x, y\in X$;

2) $\rho(x;\ y)=\rho(y;\ x)$ для всех $x, y\in X$;

3) $\rho(x;\ y)\leqslant\rho(x;\ z)+\rho(z;\ y)$ для всех $x, y, z\in X$.

Свойства 1)—3) называют также *аксиомами метрики*, причем третью аксиому — *аксиомой треугольника*. Элементы метрического пространства называют *точками*.

Пример 1. Доказать, что множество $B(E)$ всех ограниченных на некотором множестве $E$ функций, принимающих действительные значения, является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x;\ y)=\sup_{t\in E}|x(t)-y(t)|. \tag{1}$$

△ Из формулы (1) сразу следуют свойства 1) и 2) расстояния. Докажем свойство 3). Если $x, y, z\in B(E)$, то для любого $t\in E$ имеем

$$|x(t)-y(t)|=|[x(t)-z(t)]+[z(t)-y(t)]|\leqslant$$
$$\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|,$$

поэтому

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\sup_E|x(t)-z(t)|+\sup_E|z(t)-y(t)|,$$

откуда

$$\sup_E|x(t)-y(t)|\leqslant\sup_E|x(t)-z(t)|+\sup_E|z(t)-y(t)|.$$

Это в силу формулы (1) означает, что $\rho(x;y)\leqslant\rho(x;\ z)+\rho(z;\ y)$. ▲

Пример 2. Доказать, что множество $l_2$ всевозможных последовательностей $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ действительных чисел, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2<+\infty$, является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x;\ y) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}; \qquad (2)$$

$$x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots),\quad y=(y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots)\in l_2.$$

△ Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2<+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2<+\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2<+\infty. \qquad (3)$$

Для любого натурального $m$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{m}(x_n-y_n)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{m}(x_n-z_n)^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{m}(z_n-y_n)^2},$$

так как оно представляет собой неравенство треугольника в пространстве $\mathbb{R}^m$. Перейдя к пределу при $m\to\infty$ в этом неравенстве, получим

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-z_n)^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(z_n-y_n)^2}. \qquad (4)$$

Положив здесь $z_n=0$, $n=1, 2, \ldots$, будем иметь

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}y_n^2}.$$

Из этого неравенства следует, что определение (2) имеет смысл: если выполняются условия (3), то ряд, стоящий в правой части равенства (2) сходится. Неравенство (4) является, очевидно, неравенством треугольника для метрики (2). Выполнение же свойств 1) и 2) метрики непосредственно следует из формулы (2). ▲

Всякое подмножество метрического пространства $X$ в свою очередь является метрическим пространством относительно метрики пространства $X$, и его называют *подпространством* пространства $X$.

Два метрических пространства $X$ и $X'$ называют *изометричными*, если между их точками существует взаимно однозначное соответствие $f$, сохраняющее расстояние, т. е. такое, что если

$$x'=f(x),\quad y'=f(y),\quad x\in X,\quad y\in X,\quad x'\in X',\quad y'\in X',$$

то

$$\rho(x;\ y)=\rho(x';\ y')$$

(такие соответствия также называют *изометричными*).

Последовательность точек $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ метрического пространства $X$ называют *сходящейся* к его *точке* $x$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n;\ x)=0$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ или $x_n\to x$

при $n \to \infty$ и говорят, что точка $x$ является *пределом* данной последовательности.

Две метрики $\rho$ и $\rho'$ на множестве $X$ называют *эквивалентными*, если для любой последовательности $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ точек множества $X$ условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n; x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho'(x_n; x) = 0$.

Сходимость последовательности точек $x_n \in B(E)$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $B(E)$ с метрикой (1) означает равномерную сходимость на множестве $E$ последовательности функций $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

*Диаметром* $\operatorname{diam} E$ множества $E$ метрического пространства $X$ называют величину

$$\operatorname{diam} E \overset{\text{def}}{=} \sup_{x,\, y \in E} \rho(x; y). \tag{5}$$

Множество, диаметр которого конечен, называют *ограниченным*.

Для всякого множества $E \subset X$ множество $X \setminus E$ называют его *дополнением* в пространстве $X$.

В метрическом пространстве $X$ *открытым шаром* $U(x; \varepsilon)$ с центром в точке $x \in X$ и радиусом $\varepsilon > 0$ или $\varepsilon$-окрестностью точки $x$ называют множество

$$U(x; \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X \mid \rho(y; x) < \varepsilon\}. \tag{6}$$

Множество точек

$$\{y \in X \mid \rho(y; x) \leqslant \varepsilon\} \tag{7}$$

называют *замкнутым шаром* с центром в точке $x$ и радиусом $\varepsilon$.

---

**18.1.** Доказать, что для любых трех точек $x$, $y$, $z$ метрического пространства $X$ справедливо неравенство

$$|\rho(x; z) - \rho(y; z)| \leqslant \rho(x; y).$$

**18.2.** Доказать, что для любых четырех точек $x$, $y$, $u$, $v$ метрического пространства $X$ справедливо неравенство

$$|\rho(x; u) - \rho(y; v)| \leqslant \rho(x; y) + \rho(u; v).$$

**18.3.** Доказать, что нижеуказанные функции являются метриками на соответствующих множествах:

1) $\rho(x; y) = |x - y|$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2) $\rho(z; w) = |z - w|$ на множестве всех комплексных чисел $\mathbb{C}$, $z, w \in \mathbb{C}$.

3) $\rho(x; y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ на множестве точек $n$-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1; \ldots; x_n)$, $y = (y_1; \ldots; y_n) \in \mathbb{R}^n$,

4) $\rho(x; y)=\sup\limits_{t\in E}|x(t)-y(t)|$ на множестве $B_{\mathbb{C}}(E)$ всех комплекснозначных функций, ограниченных на произвольно заданном множестве $E$.

5) $\rho(x; y)=\int\limits_{G}|x(t)-y(t)|\,dt$ на множестве $CL_1(\overline{G})$ всех функций, непрерывных на замыкании $\overline{G}$ открытого измеримого по Жордану множества $G\subset\mathbb{R}^n$.

6) $\rho(x; y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x(t)-y(t)|\,dt$ на множестве $CL_1(\mathbb{R})$ всех функций, непрерывных и абсолютно интегрируемых на числовой оси $\mathbb{R}$.

7) $\rho(x; y)=\sqrt{\int\limits_{G}[x(t)-y(t)]^2\,dt}$ на множестве $CL_2(\overline{G})$ всех действительных функций, непрерывных на замыкании $\overline{G}$ открытого измеримого множества $G\subset\mathbb{R}^n$.

8) $\rho(x; y)=\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[x(t)-y(t)]^2\,dt}$ на множестве $CL_2(\mathbb{R})$ всех действительных непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, у которых сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,dt$.

**18.4.** Доказать, что множество $l_\infty$ всевозможных последовательностей $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ действительных чисел, для которых $\sup\limits_{n}|x_n|<+\infty$, является метрическим пространством с метрикой $\rho(x; y)=\sup\limits_{n}|x_n-y_n|$, $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$, $y=(y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots)\in l_\infty$.

**18.5.** Доказать, что множество $l_p$, $1\leqslant p<+\infty$, всевозможных последовательностей $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ действительных чисел, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty$, является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x; y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}, \tag{8}$$

$$x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots),\quad y=(y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots)\in l_p.$$

**18.6.** Будут ли образовывать метрические пространства последовательности $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ комплексных чисел с метриками, введенными в задачах **18.4** и **18.5** ($x_n, y_n\in\mathbb{C}$, $n=1, 2, \ldots$)?

**18.7.** Доказать, что множество $CL_p(\overline{G})$, $1\leqslant p<+\infty$, всех функций, непрерывных на замыкании $\overline{G}$ открытого измеримого по Жордану множества $G \subset \mathbb{R}^n$, является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x;\ y) = \left( \int\limits_G |x(t) - y(t)|^p\, dt \right)^{1/p}. \tag{9}$$

**18.8.** Будет ли образовывать метрическое пространство множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;\ b]$, если $\rho(x;\ y) = \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$?

**18.9.** Пусть $(a;\ b)$ — конечный или бесконечный интервал: $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Доказать, что множество $CL_p(a;\ b)$ всех непрерывных на интервале $(a;\ b)$ функций, для которых интеграл $\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt$ сходится, является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x;\ y) = \left( \int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt \right)^{1/p}. \tag{10}$$

**18.10.** Является ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если под расстоянием между $x$ и $y$ понимать $\sin^2(x - y)$?

**18.11.** Является ли метрическим пространством множество точек окружности, если расстоянием между точками считать длину наименьшей дуги, соединяющей данные точки?

**18.12.** Является ли метрическим пространством множество всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;\ b]$ функций, если

$$\rho(x;\ y) = \max_{[a;\ b]} |x'(t) - y'(t)|?$$

**18.13.** Является ли метрическим пространством непустое множество $X$, если $\rho(x;\ y) = 0$ при $x = y$ и $\rho(x;\ y) = 1$ при $x \neq y$?

**18.14.** Будет ли на множестве всех числовых последовательностей $x = (x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ $(x_n \in \mathbb{R}$ или $x_n \in \mathbb{C},\ n = 1,\ 2,\ \ldots)$ метрикой функция

$$\rho(x;\ y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$x = (x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots), \quad y = (y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots)?$$

**18.15.** Является ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства $X$, если «расстояние» между множествами $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset X$ определить равенством $\rho(E_1;\ E_2) = \inf\limits_{x \in E_1,\ y \in E_2} \rho(x;\ y)$?

**18.16.** Пусть на множестве упорядоченных пар $(x;\ y)$ элементов множества $X$ определена неотрицательная функция

$\rho(x; y)$, удовлетворяющая всем аксиомам метрики, кроме первой, которая выполняется в ослабленном виде: для любого элемента $x \in X$ имеет место равенство $\rho(x; x) = 0$. Элементы $x$ и $y$ множества $X$ назовем эквивалентными, если $\rho(x; y) = 0$. Пусть $X^* = \{x^*\}$ — множество всех классов эквивалентных элементов множества $X$. Доказать, что функция $\rho^*(x^*, y^*) = \rho(x; y)$, где $x \in \in x^* \in X^*$, $y \in y^* \in X^*$, не зависит от выбора элементов $x$ и $y$ соответственно в классах $x^*$, $y^*$ и является метрикой на множестве $X^*$.

**18.17.** Доказать, что если $X$ и $Y$ — метрические пространства соответственно с метриками $\rho_X$ и $\rho_Y$, то функция

$$\rho((x_1; y_1), (x_2; y_2)) = \sqrt{[\rho_X(x_1; x_2)]^2 + [\rho_Y(y_1; y_2)]^2}$$

является метрикой в их произведении $X \times Y$, называемом в этом случае *произведением метрических пространств* $X$ и $Y$.

**18.18.** Пусть $\rho(x; y)$ — метрика на множестве $X$. Доказать, что функции

$$\rho_1(x; y) = \frac{\rho(x; y)}{1 + \rho(x; y)},$$

$$\rho_2(x; y) = \min\{\rho(x; y); 1\}, \quad \rho_3(x; y) = \ln(1 + \rho(x; y))$$

являются метриками на множестве $X$, эквивалентными метрике $\rho$.

**18.19.** Привести пример последовательности непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, сходящейся в пространстве $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. 18.3. 7)), но не сходящейся равномерно на отрезке $[a; b]$. (В случае отрезка будем писать $CL_p[a; b]$ вместо $CL_p([a; b])$, $1 \leqslant p < +\infty$, см. 18.7, 18.3. 5) и 18.3. 7).)

**18.20.** Привести пример последовательности функций, принадлежащих пространству $CL_2[0; 1]$, сходящейся в пространстве $CL_1[0; 1]$, но не сходящейся в пространстве $CL_2[0; 1]$.

**18.21.** Привести пример последовательности непрерывных функций, сходящейся в каждой точке отрезка $[a; b]$, но не сходящейся в пространстве $CL_2[a; b]$.

**18.22.** Привести пример последовательности функций, сходящейся в пространстве $CL_1[0; 1]$, но не сходящейся ни в какой точке отрезка $[0; 1]$.

**18.23.** Будут ли эквивалентными на множестве непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций метрики пространств $CL_1[a; b]$ и $CL_2[a; b]$?

**18.24.** Доказать, что для эквивалентности метрик $\rho_1$ и $\rho_2$ на множестве $X$ достаточно, чтобы существовали две такие постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ и чтобы для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполнялось неравенство $c_1\rho_1(x; y) \leqslant \rho_2(x; y) \leqslant c_2\rho_1(x; y)$. Показать, что это условие не является необходимым для эквивалентности метрик $\rho_1$ и $\rho_2$.

**18.25.** Доказать, что в метрическом пространстве последовательность может иметь только один предел.

**18.26.** Доказать, что множество значений сходящейся последовательности точек метрического пространства является ограниченным множеством.

**18.27.** Может ли быть неограниченной последовательность функций $x_n$: $[0; 1] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходящаяся в пространстве $CL_2[0; 1]$? (См. **18.3. 7**).)

**18.28.** Если $x^{(m)} = (x_1^{(m)}; \ldots; x_n^{(n)}; \ldots) \in l_\infty$, $m = 1, 2, \ldots$ (см. **21.4**) и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует конечный предел $\lim\limits_{m \to \infty} x_n^{(m)} = a_n$, то будет ли последовательность $(a_1; \ldots; a_n; \ldots)$ всегда принадлежать $l_\infty$? Если $\lim\limits_{m \to \infty} x_n^{(m)} = a_n$ и $a = (a_1; \ldots; a_n; \ldots) \in l_\infty$, то будет ли верным утверждение, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = a$ в $l_\infty$?

**18.29.** Доказать, что для любых двух различных точек метрического пространства существуют непересекающиеся шары с центрами в этих точках.

**18.30.** Доказать, что множество $E$ метрического пространства ограничено тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ существует такое $\varepsilon > 0$, что шар с центром в точке $x$ радиуса $\varepsilon$ содержит в себе множество $E$.

**18.31.** Доказать, что если множество ограничено в пространстве $C[a; b]$ непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций с метрикой

$$\rho(x; y) = \max_{[a;\, b]} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in C[a; b],$$

то оно ограничено и в любом пространстве $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **18.7**).

**18.32.** Верно ли, что если множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций ограничено в некотором пространстве $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$, то оно ограничено и в пространстве $C[a; b]$? (См. **18.31**.)

**18.33.** При каких условиях на последовательность $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве $l_2$ (см. **21.5**) будут ограниченными множества:

1) параллелепипед

$$\{x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots) \in l_2 \,|\, |x_n| < a_n,\ n = 1, 2, \ldots\};$$

2) *эллипсоид*

$$\left\{ x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots) \in l_2 \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{a_n^2} < 1 \right\}?$$

**18.34.** Может ли шар радиуса 4 быть собственным подмножеством шара радиуса 3?

---

**2. Окрестности. Открытые и замкнутые множества. Граница множеств. Связные множества.** Пусть $X$ — метрическое пространство. Точку $x \in X$ называют *внутренней точкой* множества $E \subset X$, если у нее существует $\varepsilon$-окрестность, содержащаяся в $E$.

Если каждая точка множества $E \subset X$ внутренняя, то его называют *открытым*.

Всякое открытое множество, содержащее точку $x \in X$, называют *окрестностью* этой точки и обозначают $U(x)$.

Точку $x \in X$ называют *точкой прикосновения множества* $E \subset X$, если каждая окрестность этой точки пересекается с множеством $E$.

Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset X$ называют его *замыканием* и обозначают $\bar{E}$. Очевидно, $E \subset \bar{E}$.

Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Если у точки $x \in E \subset X$ существует окрестность, не содержащая никаких других точек множества $E$, кроме самой точки $x$, то эту точку называют *изолированной точкой* множества $E$.

Точку $x \in X$ называют *предельной точкой* множества $E \subset X$, если каждая окрестность точки $x$ содержит по крайней мере одну точку множества $E$, отличную от $x$.

Точку $x \in X$ называют *граничной точкой* множества $E \subset X$, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие множеству $E$, так и не принадлежащие ему. Совокупность всех граничных точек множества $E$ называют его *границей* и обозначают $\partial E$.

Множество, которое нельзя представить как объединение двух непустых непересекающихся замкнутых в их объединении множеств, называют *связным*.

Связное открытое множество называют *областью*.

Пример 3. Доказать, что множество открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто (открыто).

$\triangle$ Если $G$ — открытое множество метрического пространства $X$, то никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения его дополнения $F = X \setminus G$, так как множество $G$, будучи открытым, является окрестностью точки $x$ и не содержит точек множества $F$. Следовательно, все точки прикосновения множества $F$ содержатся в нем, что и означает его замкнутость.

Если $F$ — замкнутое множество, $G = X \setminus F$ и $x \in G$, то в силу замкнутости $F$ точка $x$ не является его точкой прикосновения, а поэтому существует ее окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с множеством $F$ и, следовательно, такая, что $U(x) \subset G$. Таким образом, любая точка $x \in G$ является внутренней, а это и означает, что $G$ — открытое множество.

Итак, множество $G$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $F = X \setminus G$ замкнуто. Отсюда сразу следует, что множество $F$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $G = X \setminus F$ открыто. $\blacktriangle$

---

**18.35.** Доказать, что $\varepsilon$-окрестность точки метрического пространства является открытым множеством.

**18.36.** Доказать, что множество внутренних точек любого множества метрического пространства является открытым множеством.

**18.37.** Доказать, что множество внутренних точек любого множества метрического пространства является объединением всех открытых множеств, содержащихся в данном множестве.

**18.38.** Привести пример открытого множества подпространства метрического пространства, которое не является открытым в самом пространстве.

**18.39.** Привести пример замкнутого множества подпространства метрического пространства, которое не является замкнутым в самом пространстве.

В задачах **18.40—18.48** доказать сформулированные утверждения.

**18.40.** Подмножество $E$ подпространства $Y$ метрического пространства $X$ открыто (замкнуто) тогда и только тогда, когда оно является пересечением открытого (замкнутого) в $X$ множества с подпространством $Y$.

**18.41.** Если $G$ — открытое, а $F$ — замкнутое множества метрического пространства $X$, то $G \setminus F$ — открытое в $X$ множество.

**18.42.** Пересечение конечной совокупности и объединение любой совокупности открытых множеств являются открытыми множествами. Привести пример бесконечного множества открытых множеств, пересечение которых не является открытым множеством.

**18.43.** Объединение конечной совокупности и пересечение любой совокупности замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

**18.44.** Для того чтобы точка $x$ метрического пространства $X$ была точкой прикосновения множества $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность точек $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

**18.45.** Для того чтобы точка $x$ метрического пространства $X$ была предельной точкой множества $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы любая окрестность точки $x$ содержала бесконечно много точек множества $E$.

**18.46.** Множество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит в себе множество всех своих предельных точек.

**18.47.** Замыкание множества в метрическом пространстве является замкнутым множеством.

**18.48.** Замкнутый шар метрического пространства является замкнутым множеством.

**18.49.** Может ли замкнутый шар не быть замыканием открытого шара с тем же центром и радиусом?

**18.50.** Верны ли утверждения:

1) Множество внутренних точек пересечения двух множеств является пересечением множеств их внутренних точек.

2) Множество внутренних точек пересечения любой совокупности множеств является пересечением множеств их внутренних точек.

Если нет, то имеется ли в какую-нибудь сторону включение?

**18.51.** Верны ли утверждения:

1) Множество внутренних точек объединения двух множеств является объединением множеств их внутренних точек.

2) Множество внутренних точек объединения любой совокупности множеств является объединением множеств их внутренних точек.

Если нет, то имеется ли в какую-нибудь сторону включение?

**18.52.** Верны ли утверждения:

1) Замыкание объединения двух множеств является объединением их замыканий.

2) Замыкание объединения любой совокупности множеств является объединением замыканий этих множеств.

Если нет, то имеется ли в какую-нибудь сторону включение?

**18.53.** Верны ли утверждения:

1) Замыкание пересечения двух множеств является пересечением их замыканий.

2) Замыкание пересечения любой совокупности множеств является пересечением замыканий этих множеств.

Если нет, то имеется ли в какую-нибудь сторону включение?

В задачах **18.54—18.59** доказать сформулированные утверждения.

**18.54.** Замыкание множества является пересечением всех замкнутых множеств, содержащих в себе данное множество.

**18.55.** Граница множества является замкнутым множеством.

**18.56.** Для любого множества $\bar{E} = E \cup \partial E$.

**18.57.** Непустое подмножество метрического пространства открыто тогда и только тогда, когда оно не пересекается со своей границей.

**18.58.** Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои граничные точки.

**18.59.** Границы объединения, пересечения и разности двух множеств содержатся в объединении границ этих множеств.

**18.60.** Построить пример бесконечной совокупности множеств, граница объединения которых не содержится в объединении их границ.

В задачах **18.61—18.67** доказать сформулированные утверждения.

**18.61.** Множество предельных точек множества замкнуто.

**18.62.** Для любого множества $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \bar{E}$.

**18.63.** Если $x(t)$ — непрерывная на метрическом пространстве $X$ функция, то для любого числа $a \in \mathbb{R}$ множества $\{t \in X \mid x(t) \leqslant a\}$ и $\{t \in X \mid x(t) \geqslant a\}$ замкнуты, а множества $\{t \in X \mid x(t) < a\}$ и $\{t \in X \mid x(t) > a\}$ открыты.

**18.64.** Если $x(t)$ — непрерывная на подмножестве $E$ метрического пространства $X$ функция, то для любых чисел $a \in \mathbb{R}$, множества $\{t \in E \mid x(t) \leqslant a\}$ и $\{t \in E \mid x(t) \geqslant a\}$ замкнуты, а множества $\{t \in E \mid x(t) < a\}$ и $\{t \in E \mid x(t) > a\}$ открыты в множестве $E$, рассматриваемом как подпространство метрического пространства $X$.

**18.65.** Если $x(t)$ — непрерывная на подмножестве $E$ метрического пространства $X$ функция, то для любых чисел $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, множество $\{t \in E \mid a < x(t) < b\}$ является открытым в $E$ множеством.

**18.66.** Параллелепипед

$$\{x = (x_1; \ \ldots; \ x_n; \ \ldots) \in l_p \mid |x_n| < 1, \ n = 1, 2, \ldots\}$$

является открытым, а параллелепипед

$$\{x = (x_1; \ \ldots; \ x_n; \ \ldots) \in l_p \mid |x_n| \leqslant 1, \ n = 1, 2, \ldots\}$$

— замкнутым в пространстве $l_p$ множеством, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **18.5**).

**18.67.** Если $x(t) \in C[a; \ b]$ (см. **18.31**), то множество функций

$$\{y(t) \in C[a; \ b] \mid \forall t \in [a; \ b]: \ y(t) \leqslant x(t)\}$$

замкнуто в пространстве $C[a; \ b]$.

**18.68.** Будет ли замкнутым в пространстве $C[a; \ b]$ (см. **18.31**) множество многочленов 1) степени $\leqslant n$, 2) $= n$?

В задачах **18.69—18.86** доказать сформулированные утверждения.

**18.69.** Если $A$ и $B$ — замкнутые (открытые) множества соответственно в метрических пространствах $X$ и $Y$, то $A \times B$ является замкнутым (открытым) множеством в произведении $X \times Y$ метрических пространств $X$ и $Y$ (см. **18.17**).

**18.70.** Если связное множество содержит более одной точки, то оно не имеет изолированных точек.

**18.71.** Объединение двух пересекающихся связных множеств является связным множеством.

**18.72.** Для того чтобы объединение $A \cup B$ двух связных множеств $A$ и $B$ метрического пространства было связным, необходимо и достаточно, чтобы $(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \neq \varnothing$.

**18.73.** Если $A$ и $B$ — непустые открытые (замкнутые) множества метрического пространства и $\bar{A} \cap \bar{B} = \varnothing$, то множество $A \cup B$ несвязно.

**18.74.** Если сумма и пересечение двух замкнутых множеств метрического пространства связны, то и оба этих множества связны.

**18.75.** Объединение возрастающей последовательности связных множеств является связным множеством.

**18.76.** Объединение любой совокупности связных множеств, имеющих непустое пересечение, является связным множеством.

**18.77.** Если для любых двух точек множества $A$ существует связное множество, содержащее эти точки и содержащееся в множестве $A$, то $A$ является связным множеством.

**18.78.** Замыкание связного множества связно.

**18.79.** Если $A$ — связное множество и $A \subset B \subset \bar{A}$, то $B$ — также связное множество.

**18.80.** Подмножество числовой прямой является связным тогда и только тогда, когда оно является конечным или бесконечным промежутком.

**18.81.** Множество точек плоскости, у которых обе координаты рациональны, несвязно.

**18.82.** Множество точек плоскости, у которых по крайней мере одна координата иррациональна, является связным множеством.

**18.83.** Для того чтобы множество $A \times B$, лежащее в произведении $X \times Y$ метрических пространств $X$ и $Y$, было связным (см. **18.17**), $A \subset X$, $B \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы оба множества $A$ и $B$ были связны.

**18.84.** Пространство $\mathbb{R}^n$ является областью.

**18.85.** Открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ является областью.

**18.86.** Открытый шар в пространстве $l_\infty$ является областью (см. **18.1**).

---

**3. Полные метрические пространства. Компакты.** Последовательность $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ точек метрического пространства называют *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon$, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n; x_m) < \varepsilon. \qquad (11)$$

Метрическое пространство называют *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его точек сходится к его же точке.

Пример 4. Доказать полноту пространства $l_2$ (см. пример 2).

△ Пусть последовательность точек

$$x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}; \ldots; x_n^{(m)}; \ldots\right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

является фундаментальной последовательностью в пространстве $l_2$. Следовательно, для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon$, что для всех $k$, $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(k)};\ x^{(m)}) \underset{(2)}{=} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k)} - x_n^{(m)})^2} \underset{(11)}{<} \varepsilon. \qquad (12)$$

Поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n^{(m)} - x_n^{(k)}| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^{(k)} - x_n^{(m)})^2},$$

то из (12) следует, что для любого фиксированного $n$ числовая последовательность $(x_1^{(m)};\ \ldots;\ x_n^{(m)};\ \ldots)$ является фундаментальной, а поэтому сходится. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x_n^{(m)} = x_n$, покажем, что тогда

$$x = (x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in l_2 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x.$$

В самом деле, из (12) следует, что для любого фиксированного $n_0 \in \mathbb{N}$ и всех $k$, $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{n_0} (x_n^{(k)} - x_n^{(m)})^2} < \varepsilon.$$

Перейдя здесь к пределу сначала при $k \to \infty$, а затем при $n_0 \to \infty$, получим, что для всех $m > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(m)})^2} \leqslant \varepsilon. \qquad (13)$$

Из $x^{(m)} \in l_2$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(m)2} < +\infty, \qquad (14)$$

а поэтому

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} [(x_n - x_n^{(m)}) + x_n^{(m)}]^2} \underset{(4)}{\leqslant}$$

$$\underset{(4)}{\leqslant} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^{(m)})^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(m)2}} \underset{(13),\,(14)}{<} +\infty.$$

Итак, $x \in l_2$, а тогда в силу произвольного выбора $\varepsilon > 0$ выполнение условия (13) при $m > n_\varepsilon$ означает, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$. ▲

Множество $E \subset X$ называют *плотным* в метрическом пространстве $X$, если замыкание $\bar{E}$ множества $E$ совпадает со всем пространством $X$: $\bar{E} = X$.

Полное метрическое пространство $X^*$ называют *пополнением* метрического пространства $X$, если $X \subset X^*$ и $X$ плотно в $X^*$.

Метрическое пространство называют *сепарабельным*, если в нем существует счетное плотное множество.

Множество в метрическом пространстве называют *компактом*, если из любой последовательности его точек можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к его точке.

Если замыкание множества в метрическом пространстве является компактом, то такое множество называют *предкомпактным*.

Связный непустой компакт называют *континуумом*.

Пусть $E$ — подмножество метрического пространства $X$ и $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset X$ называют *ε-сетью* для множества $E$, если для любой точки $x \in E$ существует такая точка $y \in A$, что $\rho(x; y) < \varepsilon$.

Множество метрического пространства $X$ называют *вполне ограниченным*, если для него при любом $\varepsilon > 0$ в пространстве $X$ существует конечная ε-сеть

---

В задачах **18.87—18.99** доказать сформулированные утверждения:

**18.87.** Если последовательность точек метрического пространства сходится, то она фундаментальная.

**18.88.** Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то сходится и вся последовательность, причем к тому же пределу, что и указанная подпоследовательность.

**18.89.** Пространства: 1) $\mathbb{R}^n$; 2) $B(E)$ (см. пример 1); 3) $B_{\mathrm{C}}(E)$ (см. 18.3. 4)); 4) $CB(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из всех ограниченных непрерывных на $E$ функций с метрикой пространства $B(E)$; 5) $l_\infty$ (см. 18.4); 6) $l_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. 18.5) — являются полными.

**18.90.** Множество $l_\infty^{(0)}$ всех последовательностей действительных чисел $x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots)$, стремящихся к нулю с метрикой

$$\rho(x; y) = \max_n |x_n - y_n|,$$

$$x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots), \quad y = (y_1; \ldots; y_n; \ldots) \in l_\infty^{(0)},$$

является полным пространством.

**18.91.** Метрическое пространство $s$ всех последовательностей действительных чисел $x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ с метрикой

$$\rho(x; y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

$$x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots), \quad y = (y_1; \ldots; y_n; \ldots) \in s,$$

полно.

**18.92.** Пространство $C[a; b]$ (см. 18.31) полно.

**18.93.** Пространство $C^n[a; b]$ всех функций, имеющих на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную порядка $n$ с метрикой

$$\rho(x; y) = \sum_{k=0}^{n} \max_{[a; b]} |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|,$$

$$x(t), \quad y(t) \in C^n[a; b],$$

является полным.

**18.94.** Пространство $C^\infty[a; b]$ всех бесконечно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций с метрикой

$$\rho(x; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{[a; b]} |x^{(n)}(t) - y^{(n)}(t)|}{1 + \max\limits_{[a; b]} |x^{(n)}(t) - y^{(n)}(t)|},$$

$$x(t), \; y(t) \in C^\infty[a; b],$$

является полным.

**18.95.** Функцию $x(t)$ называют *удовлетворяющей условию Гёльдера степени* $\alpha$ на отрезке $[a; b]$, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $t_1, t_2 \in [a; b]$ выполняется неравенство $|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant c|t_2 - t_1|^\alpha$. Пространство $H^\alpha[a; b]$ всех функций, удовлетворяющих на отрезке $[a; b]$ условию Гёльдера степени $\alpha > 0$ с метрикой

$$\rho(x; y) = \max_{[a; b]} |x(t) - y(t)| + \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{|[x(t_2) - y(t_2)] - [x(t_1) - y(t_1)]|}{|t_2 - t_1|^\alpha},$$

$$x, \; y \in H^\alpha[a; b],$$

является полным.

**18.96.** Пространство $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных на числовой оси $\mathbb{R}$ функций с метрикой

$$\rho(x; y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{[-n; n]} |x(t) - y(t)|}{1 + \max\limits_{[-n; n]} |x(t) - y(t)|},$$

$$x, \; y \in C(\mathbb{R}),$$

является полным.

**18.97.** Подпространство непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a; b]$ (см. **18.31**) не является полным.

**18.98.** Пространство $CL_1[a; b]$ (см. **18.3.** 5)) не является полным.

**18.99.** Пространство $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **18.7**), не является полным.

**18.100.** Обозначим посредством $CB(a; b)$ подпространство пространства $B(a; b)$ (см. пример 1) ограниченных функций на конечном или бесконечном интервале $(a; b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, состоящее из всех непрерывных функций. Будет ли пространство $CB(a; b)$ полным?

**18.101.** Если метрическое пространство $X$ является полным с метрикой $\rho(x; y)$, то будет ли оно полным с метриками $\rho_1(x; y)$, $\rho_2(x; y)$ и $\rho_3(x; y)$ задачи **18.18**?

В задачах **18.102—18.105** доказать сформулированные утверждения.

**18.102.** В полном метрическом пространстве замкнутое подмножество полно.

**18.103.** Полное подпространство метрического пространства замкнуто.

**18.104.** Если множество $A$ плотно в метрическом пространстве $X$ и $A \subset B \subset X$, то множество $B$ также плотно в $X$.

**18.105.** Если множества плотны в метрическом пространстве, то их объединение также плотно в этом пространстве.

**18.106.** Привести пример двух плотных в метрическом пространстве множеств, пересечение которых не плотно в нем.

**18.107.** Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a; b]$ (см. **18.31**) 1) открытым, 2) замкнутым, 3) плотным?

В задачах **18.108—18.110** доказать сформулированные утверждения.

**18.108.** Множество непрерывных кусочно-линейных функций плотно в пространстве $C[a; b]$ (см. **18.31**).

**18.109.**

1) Множество многочленов плотно в пространстве $C^n[a; b]$ (см. **18.93**).

2) Множество многочленов плотно в пространствах $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **18.7**).

3) Множество тригонометрических многочленов полно в пространствах непрерывных периодических периода $2\pi$ функций с метриками

$$\rho(x; y) = \max_{[0; 2\pi]} |x(t) - y(t)|$$

и

$$\rho(x; y) = \left(\int_0^{2\pi} |x(t) - y(t)|^p \, dt\right)^{1/p} \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

**18.110.** В полном метрическом пространстве замыкание его подпространства является замкнутым множеством.

**18.111.** Числовую последовательность называют *финитной*, если в ней только конечное число членов отлично от нуля. Доказать, что подпространство финитных последовательностей пространства $l_\infty^{(0)}$ (см. **18.90**) не является полным. Является ли какое-нибудь из пространств $l_\infty^{(0)}$ и $l_\infty$ его пополнением?

**18.112.** Будет ли подпространство финитных последовательностей (см. **18.111**) пространства $l_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **18.5**), плотным в этом пространстве?

**18.113.** Пусть $(a;\ b)$ — конечный или бесконечный интервал: $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$; функцию $x(t)$ называют *финитной* на интервале $(a;\ b)$, если ее носителем *) является компакт, содержащийся в интервале $(a;\ b)$: $\operatorname{supp} x \subset (a;\ b)$. Будет ли множество $C_0^\infty(a;\ b)$ бесконечно дифференцируемых финитных на интервале $(a;\ b)$ функций плотно в пространстве $CL_p(a;\ b)$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. 18.7)? в пространстве $CB(a;\ b)$ (см. 18.89)?

**18.114.** Будет ли множество непрерывных финитных (см. 18.113) на интервале $(a;\ b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функций плотным в пространстве $C[a;\ b]$ (см. 18.31)?

В задачах **18.115—18.123** доказать сформулированные утверждения.

**18.115.** Две фундаментальные последовательности

$$(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \text{ и } (y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots)$$

метрического пространства $X$ называют *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n;\ y_n) = 0.$$

Пусть $X^*$ — множество всех классов, эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей пространства $X$; тогда если $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in x^*$, $(y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots) \in y^*$, то

1) числовая последовательность $\rho(x_n;\ y_n)$ фундаментальная и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n;\ y_n)$;

2) этот предел не зависит от выбора последовательностей

$$(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in x^*, \quad (y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots) \in y^*;$$

3) функция

$$\rho^*(x^*;\ y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n;\ y_n),$$

$$(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in x^*, \quad (y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots) \in y^*,$$

является метрикой на множестве $X^*$.

**18.116.** Отображение $f$, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ класс эквивалентных фундаментальных последовательностей $x^*$ (см. 18.115), содержащий стационарную последовательность $\{x;\ x;\ \ldots,\ x;\ \ldots\}$, является изометричным отображением $X$ в $X^*$.

**18.117.** Если $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in x^*$ (см. 18.115) и $f(x_n) = x_n^*$ (см. 18.116), то $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^*(x_n^*;\ x^*) = 0$ и множество $f(X)$ плотно в пространстве $X^*$.

**18.118.** Пространство $X^*$ (см. 18.115) полное.

**18.119.** Всякое метрическое пространство имеет пополнение.

**18.120.** Пополнение метрического пространства с точностью до изометрических отображений единственно.

---

*) *Носителем функции* называется замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Носитель функции $f(x)$ обозначается $\operatorname{supp} f(x)$.

**18.121.** Последовательность непустых множеств метрического пространства называют *последовательностью Коши*, если эти множества последовательно вложены друг в друга и их диаметры $\to 0$. Если последовательность $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ точек метрического пространства является фундаментальной, то последовательность множеств $E_n = (x_n; x_{n+1}; \ldots)$, $n = 1, 2, \ldots$, является последовательностью Коши.

**18.122.** В полном метрическом пространстве всякая последовательность Коши (см. 18.121) замкнутых множеств имеет непустое пересечение, состоящее из одной точки.

**18.123.** Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда всякая последовательность Коши (см. 18.121) его подмножеств имеет и притом единственную точку, являющуюся точкой прикосновения для всех множеств последовательности.

**18.124.** Построить пример последовательности замкнутых шаров некоторого метрического пространства, последовательно вложенных друг в друга, диаметры которых стремятся к нулю, а пересечение пусто.

**18.125.** Построить пример последовательности замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, полного метрического пространства, пересечение которых пусто.

В задачах **18.126—18.133** доказать сформулированные утверждения.

**18.126.** Если $X$ — полное метрическое пространство, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и все множества $F_n$ замкнуты, то по крайней мере одно из них содержит открытый шар.

**18.127.** Пространства $l_\infty^{(0)}$ (см. 18.90), $l_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. 18.5), $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. 18.7) являются сепарабельными.

**18.128.** Пространства $l_\infty$ (см. 18.4) и $B[a; b]$ (см. пример 1) не являются сепарабельными.

**18.129.** Систему $\Omega = \{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов), открытых множеств метрического пространства $X$ называют *его базой*, если каждое открытое множество пространства $X$ является объединением открытых, содержащихся в нем множеств системы $\Omega$. Метрическое пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда оно имеет счетную базу.

**18.130.** Если метрическое пространство не имеет счетной базы, то при некотором $\varepsilon > 0$ найдется несчетное множество элементов, взаимное расстояние между которыми не меньше $\varepsilon$. Верно ли обратное?

**18.131.** Компакт является замкнутым множеством в любом содержащем его метрическом пространстве.

**18.132.** Замкнутое подмножество компакта является компактом.

**18.133.** Для двух множеств $A$ и $B$ метрического пространства $X$ величину $\rho(A;\ B) = \inf\limits_{x \in A,\ y \in B} \rho(x;\ y)$ называют *расстоянием между множествами $A$ и $B$* (см. **18.15**). Если $A$ и $B$ — замкнутые непересекающиеся множества, из которых по крайней мере одно является компактом, то они находятся на положительном расстоянии.

**18.134.** Привести пример двух замкнутых непересекающихся множеств, расстояние между которыми равно нулю.

**18.135.** Доказать, что если $F_1$ и $F_2$ — замкнутые непересекающиеся множества в метрическом пространстве, то существуют открытые непересекающиеся множества $G_1 \supset F_1$ и $G_2 \supset F_2$.

**18.136.** Построить пример замкнутого множества $F$ в некотором метрическом пространстве $X$ и точки $x \in X$ таких, что для любой точки $y \in F$ выполняется неравенство

$$\rho(x;\ y) > \rho(x;\ F) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{z \in F} \rho(x;\ z).$$

**18.137.** Доказать, что если $F$ — компакт в метрическом пространстве $X$ и $x \in X$, то существует точка $y \in F$, ближайшая к точке $x$, т. е. такая, для которой $\rho(x;\ F) = \rho(x;\ y)$.

**18.138.** Привести пример полного метрического пространства $X$, замкнутого в нем множества $A$ и точки $x \in X$ таких, что в $A$ не существует ближайшей к $x$ точки (см. **18.137**).

В задачах **18.139—18.165** доказать сформулированные утверждения.

**18.139.** Для непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $x(t)$: $[a;\ b] \to \mathbb{R}$ и любого натурального числа $n$ существует многочлен $P$ наилучшего приближения степени $n$, т. е. такой многочлен $P$ степени не выше $n$, что, каков бы ни был многочлен $Q$ также степени не выше $n$, выполняется неравенство

$$\max_{[a;\ b]} |x(t) - P(t)| \leqslant \max_{[a;\ b]} |x(t) - Q(t)|.$$

**18.140.** Если $F_1$ и $F_2$ — компакты в метрическом пространстве $X$, то существуют такие точки $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$, что $\rho(x_1;\ x_2) = \rho(F_1;\ F_2)$ (см. **18.133**). Существенно ли условие компактности обоих множеств?

**18.141.** Всякое вполне ограниченное множество является ограниченным.

**18.142.** В пространстве $l_2$ (см. пример 2) замкнутый шар с центром в точке $(0;\ 0;\ \ldots;\ 0;\ \ldots)$ радиуса 1 ограничен, но не вполне ограничен и не является компактом.

**18.143.** Если множество вполне ограничено в некотором метрическом пространстве, то для этого множества при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon$-сеть, состоящая только из его точек.

**18.144.** Пространство $l_2$ (см. пример 2) не изометрично никакому конечномерному пространству $\mathbb{R}^n$.

**18.145.** Всякое ограниченное в $\mathbb{R}^n$ множество является и вполне ограниченным.

**18.146.** Множество $Q^\infty$ точек $x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ пространства $l_2$ (см. пример 2), координаты которых удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x_n \leqslant 1/2^n$, является вполне ограниченным множеством (множество $Q^\infty$ называют *гильбертовым кирпичем*).

**18.147.** Множество в метрическом пространстве вполне ограничено тогда и только тогда, когда каждая последовательность этого множества содержит фундаментальную последовательность.

**18.148.** Полное вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является компактом.

**18.149.** Метрическое пространство является компактом тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.

**18.150.** Компакт является ограниченным множеством в любом содержащем его метрическом пространстве.

**18.151.** Для того чтобы подмножество полного метрического пространства было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и вполне ограниченным.

**18.152.** Гильбертов кирпич (см. **18.146**) является компактом.

**18.153.** Для того чтобы множество, лежащее в полном метрическом пространстве, было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне ограниченным.

**18.154.** Компакт является сепарабельным метрическим пространством.

**18.155.** Из всякого покрытия сепарабельного метрического пространства открытыми множествами можно выделить счетное покрытие.

**18.156.** Для того чтобы сепарабельное метрическое пространство являлось компактом, необходимо и достаточно, чтобы любая последовательность непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, имела непустое пересечение.

**18.157.** Для того чтобы метрическое сепарабельное пространство было компактом, необходимо и достаточно, чтобы из любого его покрытия открытыми множествами можно было выделить конечное покрытие.

**18.158.** Для того чтобы произведение $X \times Y$ метрических пространств $X$ и $Y$ (см. **18.17**) было компактом, необходимо и достаточно, чтобы были компактами пространства $X$ и $Y$.

**18.159.** Если $A$ и $B$ — предкомпактные множества метрического пространства $X$, то множество чисел $\rho(x; y)$, где $x \in A$, $y \in B$, ограничено.

**18.160.** Пересечение любой совокупности компактов является компактом.

**18.161.** Объединение конечной совокупности компактов является компактом.

**18.162.** Пересечение последовательности континуумов, последовательно вложенных друг в друга, является континуумом.

**18.163.** Если $F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность компактов в метрическом пространстве $X$, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ и $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon$, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполняется включение

$$F_n \subset U(F; \varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in F} U(x; \varepsilon).$$

**18.164.** Если $F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность компактов в метрическом пространстве $X$, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, то для того, чтобы пересечение $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ состояло из одной точки, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

**18.165.** Если $F_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такая последовательность компактов в метрическом пространстве, что пересечение любой конечной совокупности этих компактов не пусто, то пересечение всех этих компактов также не пусто.

**18.166.** Верно ли утверждение: из любого покрытия компакта замыканиями открытых множеств можно выделить конечное покрытие?

**18.167.** Доказать, что, каково бы ни было конечное покрытие $\{G_k\}_{k=1}^{k=n}$ компакта $X$ открытыми множествами $G_k$, существует такое число $\delta > 0$, что для любого множества $E \subset X$, диаметр которого меньше $\delta$, найдется элемент $G_{k_0}$ заданного покрытия, содержащий в себе множество $E$: $G_{k_0} \supset E$.

---

**4. Отображения метрических пространств.** Пусть $X$ и $Y$ — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называют *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение равносильно следующему (см. **18.168**): отображение $f\colon X \to Y$ называют *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $U$ точки $x_0$, что $f(U) \subset V$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называют *непрерывным отображением* (пространства $X$ в пространство $Y$), если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называют *равномерно непрерывным на $X$ отображением*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, $x' \in X$, для которых $\rho(x'; x) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x'); f(x)) < \varepsilon$.

Последовательность отображений $f_n\colon X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, называют *равномерно сходящейся* к отображению $f\colon X \to Y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_\varepsilon$, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $\rho(f_n(x); f(x)) < \varepsilon$.

Отображение $f\colon X \to X$ называют *сжимающим*, если существует такое число $q$, $0 < q < 1$, что для любых точек $x \in X$, $y \in X$ выполняется неравенство $\rho(f(x); f(y)) \leqslant q\rho(x; y)$.

Если отображение $f\colon X \to Y$ является биекцией и отображение $f$, также как и обратное ему отображение $f^{-1}$, являются непрерывными, то отображение $f$ называют *гомеоморфным отображением* пространства $X$ на пространство $Y$.

---

В задачах **18.168—18.173** $X$, $Y$, $Z$ — метрические пространства. В задачах **18.168—18.171** доказать сформулированные утверждения.

**18.168.** Сформулированные выше определения непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ в терминах последовательностей и в терминах окрестностей равносильны.

**18.169.** Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x \in X$, для которой $\rho(x; x_0) < \delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x); f(x_0)) < \varepsilon$.

**18.170.** Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на $X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждого открытого в $Y$ множества является открытым в $X$ множеством.

**18.171.** Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на $X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждого замкнутого в $Y$ множества является замкнутым в $X$ множеством.

**18.172.** Обязательно ли при непрерывном отображении одного метрического пространства в другое 1) образ каждого открытого множества открыт, 2) образ замкнутого множества замкнут?

**18.173.** Доказать, что композиция $g \circ f$ непрерывных отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ является непрерывным отображением.

**18.174.** Будет ли непрерывным отображение $f$ пространства $C[0; 1]$ (см. **18.31**) в себя, если оно задается формулой

1) $f(x) = \varphi x$, где $\varphi = \varphi(t)$ — фиксированная функция из $C[0; 1]$, а $x = x(t) \in C[0, 1]$;

2) $f(x) = x^2$, $x(t) \in C[0; 1]$?

**18.175.** Будет ли непрерывным отображение $f(x) = x^2$ пространства $CL_1[0; 1]$ (см. **18.3. 5)**) в себя?

**18.176.** Пусть $X=\{x\in C^1[0;\ 1]\,|\,x(0)=0\}$ (см. **18.93**). Будет ли непрерывно отображение $f\colon X\to C[0;\ 1]$, задаваемое формулами $f(x)(t)=\frac{x(t)}{t}$, $t\in(0;\ 1]$, $f(x)(0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{x(t)}{t}$ ?

**18.177.** Являются ли непрерывными следующие отображения пространства $C[0;\ 1]$ (см. **18.31**) в себя:

1) $f(x)(t)=\int\limits_0^t x(s)\,ds$;

2) $f(x)(t)=\int\limits_0^t x^2(s)\,ds$;

3) $f(x)(t)=\int\limits_0^t \sin(t-s)\,x(s)\,ds,\quad t\in[0;\ 1]$?

**18.178.** Являются ли непрерывными следующие отображения $f$ пространства $CL_2[0;\ 1]$ (см. **18.3.** 8)) в себя:

1) $f(x)(t)=\varphi(t)x(t)$, где $\varphi(t)$ — фиксированная непрерывная на отрезке $[0;\ 1]$ функция;

2) $f(x)(t)=x^2(t)$;

3) $f(x)(t)=\int\limits_0^t x(s)\,ds,\ t\in[0;\ 1]$?

**18.179.** Будет ли непрерывным отображение $f(x)=x(1)$, если оно рассматривается как отображение 1) из $C[0;\ 1]$ (см. **18.31**) в $\mathbb{R}$, 2) из $CL_2[0;\ 1]$ (см. **18.3.** 8)) в $\mathbb{R}$?

**18.180.** Доказать, что если $f$ — непрерывное отображение пространства $X$ на пространство $Y$ и $E$ — плотное в $X$ множество, то $f(E)$ является плотным в $Y$ множеством.

**18.181.** Доказать, что если $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение $X$ в $Y$ и $X$ — компакт, то $f$ является равномерно непрерывным на $X$.

**18.182.** Будет ли непрерывным дифференцирование, рассматриваемое как отображение подпространства, состоящего из непрерывно дифференцируемых функций, пространства $C[a;\ b]$ (см. **18.31**) в само пространство $C[a;\ b]$?

**18.183.** Будет ли непрерывным дифференцирование, рассматриваемое как отображение пространства $C^1[a;\ b]$ (см. **18.93**) на пространство $C[a;\ b]$ (см. **18.31**)?

**18.184.** Пусть $E$ — плотное в метрическом пространстве $X$ множество и $f\colon E\to Y$ — равномерно непрерывное отображение $E$ в полное метрическое пространство $Y$. Доказать, что существует и притом единственное отображение $f^*\colon X\to Y$, сужение которого на $E$ совпадает с $f$.

**18.185.** Привести пример непрерывного отображения, определенного на плотном подмножестве метрического пространства и не имеющего непрерывного продолжения на все пространство.

В задачах **18.186—18.192** доказать сформулированные утверждения.

**18.186.** Для того чтобы последовательность отображений $f_n$: $X \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходилась к некоторому отображению $X$ в $Y$, где $Y$ — полное пространство, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_\varepsilon$, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

**18.187.** Если последовательность отображений $f_n$: $X \to Y$ равномерно сходится к отображению $f$: $X \to Y$ и все отображения $f_n$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то и отображение $f$ непрерывно в этой точке.

**18.188.** Сжимающее отображение $f$: $X \to X$ равномерно непрерывно на $X$.

**18.189.** Сжимающее отображение $f$ полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку, т. е. такую точку, что $f(x) = x$.

**18.190.** Если некоторая степень отображения полного метрического пространства в себя является сжимающим отображением, то само отображение имеет и притом единственную неподвижную точку.

**18.191.** Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, функция $K(t; s)$ — на квадрате $Q = [a; b] \times [a; b]$, $c = \max\limits_Q |K(t; s)|$, $\lambda$ — некоторое число и

$$A(x) = \lambda \int\limits_a^t K(t; s)\, x(s)\, ds + f(t),$$

то 1) отображение $A$ отображает пространство $C[a; b]$ (см. **18.31**) в себя; 2) для любых функций $x_1 \in C[a; b]$, $x_2 \in C[a; b]$ и любого $t \in [a; b]$ справедливо неравенство

$$|A^n(x_1)(t) - A^n(x_2)(t)| \leqslant \frac{\lambda^n c^n (b-a)^n}{n!} \max_{[a;\, b]} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

**18.192.** Отображение $A(x)$ предыдущей задачи пространства $C[a; b]$ в себя имеет единственную неподвижную точку, т. е. уравнение

$$x(t) = \lambda \int\limits_a^t K(t; s)\, x(s)\, ds + f(t)$$

при любом $\lambda$ имеет и притом единственное непрерывное решение.

**18.193.** Привести пример такого отображения $f$ полного метрического пространства $X$ в себя, у которого для любых двух точек $x \in X$, $y \in X$ выполняется условие $\rho(f(x); f(y)) < \rho(x; y)$, но нет неподвижной точки.

В задачах **18.194—18.203** доказать сформулированные утверждения.

**18.194.** Любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

**18.195.** Любое возрастающее отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

**18.196.** Непрерывный образ компакта является компактом.

**18.197.** Взаимно однозначное и непрерывное отображение компакта является гомеоморфизмом.

**18.198.** Всякая непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$, определенная на компакте $X$, ограничена на нем и принимает наибольшее и наименьшее значения.

**18.199.** Непрерывный образ связного множества является связным множеством.

**18.200.** Непрерывный образ континуума является континуумом.

**18.201.** Если метрическое пространство является непрерывным образом сепарабельного метрического пространства, то оно также является сепарабельным пространством.

**18.202.** Множество функций $\{x: x(t) = kt^2, 0 \leqslant k \leqslant 1\}$ является компактом в пространстве $C[0; 1]$.

**18.203.** Семейство $S = \{x\}$ функций $x = x(t)$ пространства $C[a; b]$ (см. **18.31**) называют *равномерно ограниченным*, если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in S$ и всех $t \in [a; b]$ выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant c$. Семейство $S = \{x\}$ функций $x = x(t)$ пространства $C[a; b]$ называют *равностепенно непрерывным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in S$ и всех $t_1, t_2 \in [a; b]$, для которых $|t_2 - t_1| < \delta$, выполняется неравенство $|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon$. Для того чтобы семейство $S = \{x\}$ непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $x = x(t)$ было предкомпактно в пространстве $C[a; b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным (*теорема Арцела*).

**18.204.** Будет ли компактом в пространстве $C[a; b]$ множество всех многочленов $P(t)$ степени не выше данного натурального $n$: $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, у которых $|a_k| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$?

В задачах **18.205—18.207** доказать сформулированные утверждения.

**18.205.** Всякое ограниченное в пространстве $C^1[a; b]$ (см. **18.93**) множество предкомпактно в пространстве $C[a; b]$ (см. **18.31**).

**18.206.** Пусть $C(X)$ — пространство непрерывных на компакте $X$ функций $x\colon X \to \mathbb{R}$ с метрикой

$$\rho(x;\ y) = \max_X |x(t) - y(t)|, \quad x,\ y \in C(X).$$

В этом случае множество $E \subset C(X)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено (т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in E$ и всех $t \in X$ выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant c$) и равномерно непрерывно (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой функции $x \in E$ из неравенства $\rho(t_2;\ t_1) < \delta$ следует, что $|x(t_2) - x(t_1)| < \varepsilon$).

**18.207.** В подпространстве равномерно непрерывных функций пространства $B(X)$ (см. пример 1), где $X$ — метрическое пространство, множество предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно (см. **18.206**).

**18.208.** Какие из нижеперечисленных семейств функций будут предкомпактными в пространстве $C[a;\ b]$ (см. **18.31**)? При каких $a$ и $b$?

1) $t^n$, $n = 1, 2, \ldots$ 2) $(at)^n$, $n = 1, 2, \ldots$

3) $\sin nt$, $n = 1, 2, \ldots$ 4) $\sin(t + n)$, $n = 1, 2, \ldots$

5) $e^{t+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 6) $e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

**18.209.** Какие из ниже указанных множеств будут компактами в пространстве $C[0;\ 1]$ (см. **18.31**), если $c$ — некоторая постоянная?

1) $\{x \in C[0;\ 1] \mid |x(t)| \leqslant c\}$.

2) $\{x \in C^1[0;\ 1] \mid |x(t)| \leqslant c,\ |x'(t)| \leqslant c\}$.

3) $\{x \in C^2[0;\ 1] \mid |x(t)| \leqslant c,\ |x'(t)| \leqslant c,\ |x''(t)| \leqslant c\}$.

4) $\{x \in C^2[0;\ 1] \mid |x(t)| \leqslant c,\ |x''(t)| \leqslant c\}$.

5) $\{x \in C^2[0;\ 1] \mid |x'(t)| \leqslant c,\ |x''(t)| \leqslant c\}$.

**18.210.** Доказать, что для того чтобы множество $E \subset l_p$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **18.5**), было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $n_\varepsilon$, что для всех $x = (x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in E$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=n_\varepsilon}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

## § 19. Нормированные и полунормированные пространства

**1. Линейные пространства.** Множество $X$ называют *действительным линейным* (или *векторным*) *пространством*, если

каждой упорядоченной паре $(x;\ y)$ элементов $x \in X$; $y \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент пространства $X$, называемый *суммой* $x$ *и* $y$ и обозначаемый $x+y$;

каждому элементу $x \in X$ и каждому действительному числу $\lambda$ поставлен в соответствие единственный элемент пространства $X$, называемый *произведением* $\lambda$ *на* $x$ и обозначаемый $\lambda x$.

При этом выполняются следующие группы аксиом:

1) а) $x+y=y+x$ для любых $x \in X$ и $y \in X$.

б) $x+(y+z)=(x+y)+z$ для любых $x \in X$, $y \in X$ и $z \in X$.

в) В множестве $X$ существует элемент, называемый *нулевым* и обозначаемый 0, такой, что $x+0=x$ для любого $x \in X$.

г) Для каждого $x \in X$ существует единственный элемент множества $X$, называемый *противоположным элементу* $x$, обозначаемый посредством $-x$ и такой, что $x+(-x)=0$ *).

2) а) $1x=x$ для любого $x \in X$.

б) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ для любого $x \in X$ и любых действительных чисел $\lambda$ и $\mu$.

в) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ для любого $x \in X$ и любых действительных чисел $\lambda$ и $\mu$.

г) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ для любых $x \in X$, $y \in X$ и любого действительного числа $\lambda$.

Для каждой пары элементов $x \in X$ и $y \in X$ элемент $x+(-y)$ называют *разностью элементов* $x$ *и* $y$ и обозначают $x-y$.

Элементы линейных пространств называют также *точками* или *векторами*.

Если в сформулированном определении действительного линейного пространства всюду действительные числа заменить комплексными: $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, то получится определение комплексного линейного пространства.

Если $Y$ и $Z$ — подмножества линейного пространства $X$, то через $Y+Z$ обозначают множество всех элементов $x \in X$, представимых в виде $x=y+z$, $y \in Y$, $z \in Z$. Множество $Y+Z$ называют (*алгебраической*) *суммой множеств* $Y$ и $Z$.

Если для любого элемента $x \in X$ его представление в виде $x=y+z$, $y \in Y$, $z \in Z$, единственно, то сумму $y+z$ называют *прямой* и обозначают $Y \oplus Z$.

Если $X$ — линейное пространство и $x_k \in X$, $k=1, 2, \ldots$, то всякий элемент вида $\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n$, где все $\lambda_k$ — действительные числа в случае действительного пространства и комплексные в случае комплексного пространства, называют *линейной комбинацией* элементов $x_1, \ldots, x_n$.

---

*) Выполнение условий 1) а) — г), означает, что множество $X$ с операцией сложения образует *коммутативную группу*.

Множество, содержащееся в линейном пространстве $X$, называют *подпространством* этого пространства, если все линейные комбинации элементов этого множества содержатся в нем.

Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейного пространства называют *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}$. Если указанных чисел не существует, то векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ называют *линейно независимыми*.

Произвольную систему векторов $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) называют *линейно независимой*, если, какова бы ни была ее конечная подсистема, входящие в нее векторы линейно независимы.

Пример 1. Доказать, что если каждый из $m$ линейно независимых векторов является линейной комбинацией $n$ линейно независимых векторов, то $m \leqslant n$.

$\triangle$ Пусть системы векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ и $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m$ линейно независимы, и пусть

$$\boldsymbol{y}_i = \lambda_{i1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_{in}\boldsymbol{x}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1}$$

Тогда среди чисел $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1n}$ найдется по крайней мере одно число, отличное от нуля: в противном случае $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{o}$ и система $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ была бы линейно зависима. Перенумеровав, если в этом есть необходимость, векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, всегда можно получить, что $\lambda_{11} \neq 0$. В этом случае вектор $\boldsymbol{x}_1$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Подставив эту линейную комбинацию в выражение для вектора $\boldsymbol{y}_2$, получим, что вектор $\boldsymbol{y}_2$ будет линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Продолжив этот процесс, через $k$ шагов (быть может, меняя нумерацию) получим, что вектор $\boldsymbol{y}_{k+1}$ будет представлен как линейная комбинация векторов $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots \ldots, \boldsymbol{x}_n$, причем среди коэффициентов этой линейной комбинации у векторов $\boldsymbol{x}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ по крайней мере один не равен нулю: в противном случае вектор $\boldsymbol{y}_{k+1}$ оказался бы линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k$, что противоречило бы линейной независимости системы $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m$.

Если бы $m > n$, то при $k = n$ получилось бы, что вектор $\boldsymbol{y}_{n+1}$ являлся линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$, что противоречило бы линейной независимости векторов $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_m$. $\blacktriangle$

Совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов, принадлежащих некоторому заданному множеству, называют *линейной оболочкой* этого множества.

Всякую конечную упорядоченную систему линейно независимых векторов линейного пространства, линейной оболочкой которой оно является, называют *базисом* этого пространства.

Если в линейном пространстве существует базис, состоящий из $n$ векторов, то пространство называют *$n$-мерным*.

Все $n$-мерные пространства называют *конечномерными*. Если линейное пространство не конечномерно, то его называют *бесконечномерным*.

Ниже всюду в этом разделе $X$ и $Y$ — линейные пространства.

Если $f$: $X \to Y$ — отображение пространства $X$ в пространство $Y$, то прообраз нуля называют *ядром* $\ker f$ этого отображения:

$$\ker f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}. \tag{2}$$

Отображение $f$: $X \to Y$ называют *линейным отображением* (или, что то же самое, *линейным оператором*), если для любых двух элементов $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел $\lambda$, $\mu$ справедливо равенство

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \tag{3}$$

(если $X$ и $Y$ — действительные пространства, то числа $\lambda$, $\mu$ действительные, если эти пространства комплексные, то и числа $\lambda$, $\mu$ комплексные).

Множество всех линейных операторов $f$: $X \to Y$ обозначают $L(X; Y)$.

Линейное отображение линейного пространства в множество действительных или комплексных чисел называют *функционалом* данного пространства.

Линейное взаимно однозначное отображение пространства $X$ на пространство $Y$ (*биекция*) называют *изоморрфизмом* или *изоморфным отображением*.

Если для пространств $X$ и $Y$ существует изоморфное отображение одного на другое, то их называют *изоморфными*.

*Произведением* $Z = X \times Y$ линейных пространств $X$ и $Y$ называют линейное пространство $Z$, состоящее из элементов $z = (x; y)$, $x \in X$, $y \in Y$, теоретико-множественного произведения множеств $X$ и $Y$, для которых определена линейная операция $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2$ по формуле

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \overset{\text{def}}{=} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2), \tag{4}$$

где $z_1 = (x_1; y_1) \in Z$, $z_2 = (x_2; y_2) \in Z$, $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — числа.

Выполнимость аксиом линейного пространства при таком определении линейной операции легко устанавливается непосредственной проверкой.

Аналогично понятию произведения двух линейных пространств вводится понятие *произведения $n$ линейных пространств* для любого натурального $n > 2$.

Отображение $z = f(x; y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, произведения $X \times Y$ линейных пространств $X$ и $Y$ в линейное пространство $Z$ называют *билинейным*, если при фиксировании одной из переменных $x$, $y$ оно линейно по другой переменной.

По аналогии с билинейными отображениями вводится понятие *мультилинейных отображений*: если $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ — линейные пространства, то отображение $f$: $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$ называют *мультилинейным* или *$n$-линейным*, если оно линейно относительно каждой переменной $x_k \in X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, когда остальные переменные фиксированы.

В задачах **19.1—19.37** доказать сформулированные утверждения.

**19.1.** В силу обычных операций над числами множество всех действительных (комплексных) чисел образует действительное (комплексное) линейное пространство.

**19.2.** Конечномерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ в силу обычных операций над векторами $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)$, $x_k \in \mathbb{R}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, образует действительное векторное пространство.

**19.3.** Пусть $\mathbb{C}^n$ — множество всевозможных упорядоченных множеств $z=(z_1;\ \ldots;\ z_n)$ из $n$ комплексных чисел $z_k \in \mathbb{C}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, с линейной операцией, определенной следующим образом: если

$$z=(z_1;\ \ldots;\ z_n)\in\mathbb{C}^n,\quad w=(w_1;\ \ldots;\ w_n)\in\mathbb{C}^n,\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad \mu\in\mathbb{C},$$

то

$$\lambda z+\mu w \overset{\text{def}}{=} (\lambda z_1+\mu w_1;\ \ldots;\ \lambda z_n+\mu w_n).$$

Тогда $\mathbb{C}^n$ является комплексным линейным пространством.

**19.4.** Пусть $E$ — произвольное множество, тогда совокупность $F(E)$ всех функций $f\colon E\to\mathbb{R}$ (соответственно $f\colon E\to\mathbb{C}$) при обычном определении сложения функций и умножения их на действительное (комплексное) число является действительным (комплексным) линейным пространством.

**19.5.** Множество $\mathscr{P}^{(n)}$ (соответственно $\mathscr{P}^{(n)}_{\mathbb{C}}$) всех многочленов степеней, не превышающих заданного натурального числа $n$, от одного переменного с действительными (комплексными) коэффициентами, к которым добавлен нулевой многочлен, является линейным пространством.

**19.6.** Множество $\mathscr{P}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{P}^{(n)}$ $\left(\text{соответственно } \mathscr{P}_{\mathbb{C}}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{P}^{(n)}_{\mathbb{C}}\right)$ всех многочленов одного переменного с действительными (комплексными) коэффициентами, к которым добавлен нулевой многочлен (см. **19.5**), является линейным действительным (комплексным) пространством.

**19.7.** Множество всевозможных числовых последовательностей $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$, $x_n\in\mathbb{R}$ (соответственно $x_n\in\mathbb{C}$), $n=1,\ 2,\ \ldots$, при обычном определении их сложения и умножения на число является линейным пространством.

**19.8.** Множество $C(X)$ всех непрерывных на метрическом пространстве $X$ числовых функций $f\colon X\to\mathbb{R}$ (соответственно $f\colon X\to\mathbb{C}$) является подпространством пространства $F(E)$ всех числовых функций, определенных на пространстве $X$ (см. **19.4**).

**19.9.** Множество $CB(X)$ всех ограниченных непрерывных на метрическом пространстве $X$ функций $f\colon X\to\mathbb{R}$ (соответственно $f\colon X\to\mathbb{C}$) является подпространством пространств $B(X)$ (см. **19.8**) и $C(X)$.

**19.10.** Множество $RL_p[a; b]$ всех числовых функций $x(t)$, определенных на отрезке $[a; b]$, у которых конечен интеграл $\int\limits_a^b |x(t)|^p\,dt$, $p > 0$, является линейным пространством.

Замечание. Здесь и всюду в дальнейшем под интегралом по некоторому числовому промежутку понимается, вообще говоря, несобственный интеграл, определенный как предел соответствующих римановых интегралов. Для всех рассматриваемых функций, когда речь будет идти об интегралах по какому-то промежутку от них, или от их модуля, или от их степени и т. п., всегда будет предполагаться, что существует такое конечное разбиение $\{t_k\}_{k=0}^{k=n}$ указанного промежутка: $a \leqslant t_0 < \ldots \ldots < t_k < \ldots < t_n \leqslant b$, что на всяком отрезке $[\xi; \eta] \subset (a; b)$, не содержащем ни одной точки этого разбиения, функция интегрируема по Риману.

**19.11.** Множество $C^1[a; b]$ всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций составляет линейное пространство, являющееся подпространством пространства $C[a; b]$ (см. **19.8**).

**19.12.** Множество $l_p$ всех последовательностей действительных чисел $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ сходится, образует линейное пространство.

**19.13.** Множество всех последовательностей комплексных чисел $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ сходится, образует линейное пространство.

**19.14.** Если $Y$ и $Z$ — подпространства линейного пространства $X$, то $Y + Z$ — также подпространство этого пространства.

**19.15.** Векторы $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда по крайней мере один из них является линейной комбинацией остальных.

**19.16.** Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

**19.17.** Всякая подсистема линейно независимой системы линейно независима.

**19.18.** Если система векторов линейно зависима, то линейно зависима и всякая система, ее содержащая.

**19.19.** В линейном $n$-мерном пространстве не существует более чем $n$ линейно независимых векторов.

**19.20.** В линейном $n$-мерном пространстве все базисы состоят из $n$ векторов.

**19.21.** В линейном $n$-мерном пространстве каждая система $n$ линейно независимых векторов является базисом этого пространства.

**19.22.** Пространство $\mathscr{P}^{(n)}$ многочленов одного переменного степени не выше $n$, дополненное нулевым многочленом (см.

19.5), является $(n+1)$-мерным, и одночлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ образуют в нем базис.

**19.23.** Пространство всех многочленов одного переменного (см. **19.6**) является бесконечномерным пространством.

**19.24.** Если векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ образуют базис в линейном пространстве $X$, $\boldsymbol{y}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\det(a_{ij}) \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ также образуют базис в пространстве $X$.

**19.25.** Если векторы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ образуют базис в линейном пространстве $X$, $\boldsymbol{y}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{x}_j$, где $(a_{ij})$ — треугольная матрица и $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то векторы $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ также образуют базис в пространстве $X$.

**19.26.** Всякая система многочленов $P_m(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_{mk}t^k$ степеней $m = 0, 1, \ldots, n$ (т. е. $a_{mm} \neq 0$) образует базис в пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$ (см. **19.5**).

**19.27.** Если система многочленов линейно зависима в линейном пространстве многочленов $\mathscr{P}$ (см. **19.6**), то она линейно зависима и на любом промежутке. Если система многочленов линейно зависима на некотором промежутке положительной длины, то она линейно зависима и в пространстве $\mathscr{P}$.

**19.28.** *Многочлены Лежандра*

$$P_0(t) = 1, \quad P_m(t) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m(t^2-1)^m}{dt^m}, \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

образуют базис в пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$ (см. **19.5**).

**19.29.** Функция

$$f_n(t) = \cos(n \arccos t), \quad n = 1, 2, \ldots, \ |t| \leqslant 1,$$

является многочленом степени $n$. *Многочлены Чебышёва*

$$T_0(t) = 1, \quad T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}}\cos(m \arccos t), \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

образуют базис в пространстве $\mathscr{P}^{(n)}$ (см. **19.5**).

**19.30.** Любой многочлен степени не выше $n$ является линейной комбинацией многочленов Лежандра $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_n(t)$ и линейной комбинацией многочленов Чебышёва $T_0(t), T_1(t), \ldots, T_n(t)$.

**19.31.** Ядро линейного отображения $f\colon X \to Y$ является подпространством линейного пространства $X$.

**19.32.** Образ линейного пространства при линейном отображении в другое линейное пространство является подпространством последнего.

**19.33.** Для того чтобы линейное отображение $f\colon X \to Y$ линейного пространства $X$ в линейное пространство $Y$ было инъекцией, необходимо и достаточно, чтобы ядро этого отображения состояло только из нуля.

**19.34.** Все линейные $n$-мерные пространства изоморфны между собой.

**19.35.** Преобразование Фурье непрерывных абсолютно интегрируемых на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функций является инъекцией в линейное пространство функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

**19.36.** Множество $L(X; Y)$ всех линейных операторов, отображающих линейное пространство $X$ в линейное пространство $Y$, при обычном определении линейных операций над ними образует линейное пространство.

**19.37.** $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad n, m = 0, 1, \ldots$

**19.38.** Доказать, что линейные функционалы $f_1$ и $f_2$ линейного пространства $X$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\ker f_1 = \ker f_2$.

**19.39.** Доказать, что для того чтобы линейный функционал $f$ линейного пространства $X$ был линейной комбинацией линейных функционалов $f_1$ и $f_2$ того же пространства, необходимо и достаточно, чтобы $\ker f_1 \cap \ker f_2 \subset \ker f$.

**19.40.** Подпространство $H$ действительного, соответственно комплексного, линейного пространства $X$ называют *гиперплоскостью пространства* $X$, если существует такая точка $a \in X \setminus H$, что $X = H \oplus \mathbb{R}a$, соответственно $X = H \oplus \mathbb{C}a$. Здесь

$$\mathbb{R}a = \{x \in X \mid x = \lambda a, \ \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{C}a = \{x \in X \mid x = \lambda a, \ \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Доказать, что если $H$ является гиперплоскостью действительного линейного пространства $X$ и $b \in X \setminus H$, то $X = H \oplus \mathbb{R}b$.

**19.41.** Доказать, что если $H_1$ и $H_2$ — гиперплоскости линейного пространства $X$ и $H_1 \subset H_2$, то $H_1 = H_2$.

**19.42.** Доказать, что если $H_1$ и $H_2$ — гиперплоскости линейного пространства $X$ и $H_1 \neq H_2$, то существуют такие точки $h_1 \in X$ и $h_2 \in X$, что $h_1 \in H_1 \setminus H_2$, $h_2 \in H_2 \setminus H_1$.

**19.43.** Доказать, что подпространство $H$ линейного пространства $X$ является гиперплоскостью этого пространства тогда и только тогда, когда $H$ является ядром некоторого линейного функционала.

**19.44.** Доказать: если $f_1$ и $f_2$ — линейно независимые линейные функционалы линейного пространства $X$, то существует такой линейный функционал $g$ пространства $\ker f_1$, что $\ker g = \ker f_1 \cap \ker f_2$.

**19.45.** Доказать, что пересечение двух различных гиперплоскостей $H_1$ и $H_2$ линейного пространства $X$ является гиперплоскостью в каждой из гиперплоскостей $H_1$ и $H_2$.

**19.46.** Доказать, что если подпространства $H_1$ и $H_2$ являются гиперплоскостями действительного линейного пространства $X$, $H_1 \neq H_2$ и $h_1 \in H_1 \setminus H_2$, то $H_1 = H_1 \cap H_2 \oplus \mathbb{R}h_1$.

**19.47.** Доказать, что в линейном пространстве любые две его гиперплоскости изоморфны.

**19.48.** Скалярное произведение $(x, y)$ в $n$-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ является билинейным отображением $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

**19.49.** Векторное произведение трехмерных векторов является билинейным отображением $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$.

**19.50.** *Билинейная форма*

$$A(x;\ y) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad x = (x_1;\ \ldots;\ x_n), \quad y = (y_1;\ \ldots;\ y_n),$$

является билинейным отображением $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$.

**19.51.** Если $z = f(x;\ y)$, $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, — билинейное отображение линейного пространства $X \times Y$ в линейное пространство $Z$, то для любых чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\mu_1$, $\mu_2$ и $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, имеет место равенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2;\ \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \\ = \lambda_1 \mu_1 f(x_1;\ y_1) + \lambda_2 \mu_1 f(x_2;\ y_1) + \lambda_1 \mu_2 f(x_1;\ y_2) + \lambda_2 \mu_2 f(x_2;\ y_2).$$

**19.52.** Для любого билинейного отображения $f$: $X \times X \to Z$ имеет место тождество

$$f\left(\frac{x+y}{2};\ \frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2};\ \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x;\ x) + \frac{1}{2} f(y;\ y), \\ x,\ y \in X.$$

**19.53.** Множество всех билинейных отображений произведения $X \times Y$ линейных пространств $X$ и $Y$ в линейное пространство $Z$ образует при обычном определении линейной операции над функциями линейное пространство.

**19.54.** Билинейную форму $F$: $X \times Y \to Z$ называют *симметричной*, если для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется равенство $F(x;\ y) = F(y;\ x)$. Симметричные билинейные формы $f$: $X^2 \to Z$ и $g$: $X^2 \to Z$, где $X^2 = X \times X$, совпадают тогда и только тогда, когда совпадают порожденные ими квадратичные формы $f(x;\ x)$ и $g(x;\ x)$.

---

**2. Свойства полунормированных и нормированных пространств.** Линейное пространство $X$ (действительное или комплексное) называют *полунормированным*, если на множестве его точек определена действительная функция, называемая *полунормой*, обозначаемая $\|x\|_X$ или $\|x\|$, $x \in X$, и имеющая следующие свойства:

1) *Неотрицательность.* Для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|x\| \geqslant 0$.

2) *Однородность.* Для всех $x \in X$ и всех чисел $\lambda$ имеет место равенство $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3) *Неравенство треугольника.* Для всех $x \in X$, $y \in X$ выполняется неравенство $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Для некоторых полунорм выполняется условие

4) *Невырожденность.* Если $\|x\|=0$, то $x=0$.

В этом случае полунорму называют *нормой*, а пространство $X$ — *нормированным*.

Две нормы $\|x_1\|^{(1)}$ и $\|x\|^{(2)}$ в линейном пространстве $X$ называют *эквивалентными*, если существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что для всех $x\in X$ выполняется неравенство

$$c_1\|x\|^{(1)}\leqslant\|x\|^{(2)}\leqslant c_2\|x\|^{(1)}.$$

Функции $f\colon X\to\mathbb{R}$ и $f\colon X\to\mathbb{C}$, определенные на нормированном или полунормированном пространстве $X$, называют обычно *функционалами*.

Подмножество нормированного или полунормированного пространства называют его *подпространством*, если оно является линейным подпространством (см. п. 1).

Произведением $X\times Y$ двух полунормированных (в частности, нормированных) пространств $X$ и $Y$ называют *полунормированное* (соответственно *нормированное*) пространство, являющееся произведением линейных пространств $X$ и $Y$ с полунормой (нормой)

$$\|(x;\ y)\|=\sqrt{\|x\|_X^2+\|y\|_Y^2},\quad x\in X,\ y\in Y.$$

Подмножество $E$ полунормированного (нормированного) пространства называют *ограниченным по полунорме* (*норме*), если существует такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in E$ выполняется неравенство $\|x\|\leqslant c$.

Последовательность $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ элементов полунормированного (нормированного) пространства $X$ называют *сходящейся по полунорме* (*норме*) к элементу $x\in X$, если предел $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$. В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Отображение $f\colon X\to Y$ полунормированного (нормированного) пространства $X$ в полунормированное (нормированное) пространство $Y$ называют *непрерывным в точке* $x_0\in X$, если для любой последовательности $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$, сходящейся к $x_0$ по полунорме (норме) пространства $X$: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ по полунорме (норме) пространства $Y$:

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

Взаимно однозначное отображение $f\colon X\to Y$ нормированного пространства $X$ на нормированное пространство $Y$, сохраняющее линейную операцию (т. е. изоморфно отображающее линейное пространство $X$ на линейное пространство $Y$) и норму (для всех $x\in X$ выполняется условие $\|f(x)\|_Y=\|x\|_X$) называют *изоморф-*

*ным отображением* или *изоморфизмом нормированного пространства $X$ на нормированное пространство $Y$*. Аналогичное определение формулируют и для полунормированных пространств.

В нормированном пространстве $X$ функция

$$\rho(x;\ y) = \| x - y \|_X, \quad x \in X, \quad y \in X,$$

является метрикой (см. **19.89**), называемой *метрикой, порожденной нормой пространства $X$*. Таким образом на нормированные пространства (как на частный случай метрических) распространяются все понятия, введенные в § 18 для метрических пространств.

Полное нормированное пространство называют *банаховым пространством*.

Систему элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов), полунормированного пространства $X$ называют *полной* в этом пространстве, если для каждого элемента $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ данной системы и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что выполняется неравенство

$$\| x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}) \| < \varepsilon. \tag{7}$$

Полунормированное пространство $X$ называют *вложенным* в полунормированное пространство $Y$, если

1) $X \subset Y$.

2) Существует такая постоянная $c > 0$, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

$$\| x \|_Y \leqslant c \| x \|_X.$$

Если пространство $X$ вложено в пространство $Y$, то пишут $X \Subset Y$.

Пример 2. Пусть $RL_p[a; b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \leqslant p < +\infty$, — множество всех функций $x(t)$, определенных на отрезке $[a;\ b]$, для которых конечен интеграл $\int\limits_a^b | x(t) |^p \, dt$.

Доказать, что множество $RL_p[a;\ b]$ является полунормированным пространством с полунормой

$$\| x \|_p \overset{\text{def}}{=} \left( \int\limits_a^b | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p} \tag{8}$$

и что, если $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$,

$$RL_q[a;\ b] \Subset RL_p[a;\ b]. \tag{9}$$

Для удобства обозначение $\|x\|_p$ применяют и в том случае, когда интеграл, стоящий в правой части равенства (8), равен бесконечности.

△ Прежде всего из линейности интеграла и неравенства Минковского (см. [2], § 12) следует, что

$$\|\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\|_p \underset{(8)}{=} \left(\int_a^b |\lambda_1 x_1(t)+\lambda_2 x_2(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1\left(\int_a^b |x_1(t)|^p\,dt\right)^{1/p}+\lambda_2\left(\int_a^b |x_2(t)|^p\,dt\right)^{1/p}. \quad (10)$$

Отсюда явствует, что если $\|x_1\|_p<+\infty$ и $\|x_2\|_p<+\infty$, то для любых чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$ имеет место неравенство $\|\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\|_p<<+\infty$, т. е. множество $RL_p[a; b]$ образует линейное пространство (см. **19.10**) и что для функционала (8) выполняется неравенство треугольника (для этого в неравенстве (10) достаточно взять $\lambda_1=\lambda_2=1$). Неотрицательность функционала (8) очевидна, а его однородность следует из линейности интеграла. Итак, $RL_p[a;\ b]$ — полунормированное пространство.

Докажем вложение (9). Если $x\in RL_q[a;\ b]$, то, применив неравенство Гёльдера для интегралов (см. [2], § 12) с показателем $q/p$ (в силу условия $1\leqslant p\leqslant q$ он не меньше единицы), получим

$$\|x\|_p=\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |x(t)|^q\,dt\right)^{1/q}\left(\int_a^b dt\right)^{(q-p)/pq}=(b-a)^{1/p-1/q}\|x\|_q,$$

отсюда, очевидно, следует вложение (9). ▲

---

**19.55.** Доказать, что для любых двух элементов $x$ и $y$ полунормированного пространства выполняется неравенство

$$|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|.$$

**19.56.** Доказать, что для любых двух элементов $x$ и $y$ полунормированного пространства выполняется неравенство

$$\|x\|\leqslant\max\{\|x+y\|;\ \|x-y\|\}.$$

**19.57.** Доказать, что полунорма нулевого элемента полунормированного пространства равна нулю.

Доказать, что нижеперечисленные в задачах **19.58—19.71** линейные пространства являются нормированными относительно указанных норм.

**19.58.** $\mathbb{R}$, $\|x\|=|x|$.

**19.59.** $\mathbb{C}$, $\|z\|=|z|$.

**19.60.** $\mathbb{R}^n$, 1) $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$; 2) $\|x\|_\infty=\max\limits_k|x_k|$;

3) $\|x\|_1=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$;

4) $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$, $1\leqslant p<+\infty$; $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)$.

**19.61.** $\mathbb{C}^n$ (см. **19.3**), $\|z\|_2=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|^2}$, $z=(z_1;\ \ldots;\ z_n)$, $z_k\in\mathbb{C}$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

**19.62.** $l_p$, $1\leqslant p<+\infty$ (см. **19.12**), $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$, $x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$, $x_n\in\mathbb{R}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$

**19.63.** $l_\infty$ (см. **18.4** и **19.7**), $\|x\|_\infty=\sup\limits_k|x_k|$.

**19.64.** $l_\infty^{(0)}$ (см. **18.90** и **19.7**), $\|x\|=\max|x_k|$.

**19.65.** $C[a;\ b]$ (см. **19.8**), $\|x\|_C=\max\limits_{[a;\ b]}|x(t)|$.

**19.66.** $CL_p[a;\ b]$, $-\infty<a<b<+\infty$ (см. **19.7**),

$$\|x\|_p=\left(\int\limits_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<+\infty.$$

**19.67.** $CL_p(a;\ b)$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$ (см. **18.9**),

$$\|x\|_p=\left(\int\limits_a^b|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},\quad 1\leqslant p<+\infty.$$

**19.68.** $B(E)$ (см. пример 1 в § 18), $\|x\|_\infty=\sup\limits_E|x(t)|$.

**19.69.** $C^n[a;\ b]$ (см. **18.93**), $\|x\|_{C^n}=\sum\limits_{k=0}^{n}\max\limits_{[a;\ b]}|x^{(k)}(t)|$.

**19.70.** $H^\alpha[a;\ b]$, $\alpha>0$ (см. **18.95**),

$$\|x\|_{H^\alpha}=\max_{t\in[a;\ b]}|x(t)|+\sup_{a<t_1<t_2<b}\frac{|x(t_2)-x(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}.$$

**19.71.** $H(K)$ — множество аналитических внутри открытого единичного круга $K=\{z\in\mathbb{C}\mid|z|<1\}$ функций, непрерывных на его замыкании $\overline{K}$, $\|x\|=\max\limits_{|z|=1}|z(t)|$.

В задачах **19.72—19.75** доказать сформулированные утверждения.

**19.72.** Для норм $\|x\|_p$ и $\|x\|_\infty$ в задачах **19.62** и **19.63** имеет место соотношение $\lim\limits_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty$.

**19.73.** В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ функция $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_k^2}$, $0 < m < n$, является полунормой.

**19.74.** В линейном пространстве $C^n[a;\ b]$, $n > 0$ (см. **19.59**) функция $\|x\| = \max\limits_{[a;\ b]} |x^{(n)}(t)|$ является полунормой.

**19.75.** Функционал $\|x\|_p = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$, являясь полунормой в пространстве $RL_p[a;\ b]$ (см. пример 2), не является в нем нормой.

**19.76.** На каких подмножествах множества функций $x(t)$, имеющих на отрезке $[a;\ b]$ абсолютно интегрируемую производную порядка $n$, функционал $\int\limits_a^b |x^{(n)}(t)|\, dt$ будет нормой? полунормой? для каких $n$?

**19.77.** Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;\ b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

1) $|x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a;\ b]}$.

2) $|x(a)| + \|x''\|_{C[a;\ b]}$.

3) $\|x'\|_{CL_2[a;\ b]} + \|x''\|_{C[a;\ b]}$.

4) $|x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{C[a;\ b]}$.

5) $|x(a)| + \|x'\|_{C[a;\ b]} + \|x''\|_{C[a;\ b]}$.

**19.78.** Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;\ b]$ функций принять за норму элемента $x(t)$:

1) $\max\limits_{[a;\ b]} |x(t)|$.  2) $\max\limits_{[a;\ b]} |x'(t)|$.

3) $|x(b) - x(a)| + \max\limits_{[a;\ b]} |x'(t)|$.  4) $|x(a)| + \max\limits_{[a;\ b]} |x'(t)|$.

5) $\int\limits_a^b |x(t)|\, dt + \max\limits_{[a;\ b]} |x'(t)|$.

В задачах **19.79—19.84** доказать сформулированные утверждения.

**19.79.** В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

**19.80.** Если $X$ и $Y$ — линейные нормированные пространства, то функционалы $\max\{\|x\|_X;\ \|y\|_Y\}$, $\|x\|_X + \|y\|_Y$ и $\sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}$,

$x \in X$, $y \in Y$, являются эквивалентными нормами в пространстве $X \times Y$.

**19.81.** Функционалы

$$\|x\|_C = \max_{[a;\,b]} |x(t)| \quad \text{и} \quad \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt$$

(см. **19.65** и **19.66**) являются неэквивалентными нормами на линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций.

**19.82.** Нормы $\|x\|_C$ и $\|x\|_{H^1}$ (см. **19.65** и **19.70**) не эквивалентны на множестве функций, удовлетворяющих условию Липшица (т. е. условию Гёльдера степени 1) на отрезке $[a;\ b]$.

**19.83.** Множество $l_\infty^{(0)}$ является замкнутым подпространством нормированного пространства $l_\infty$ (см. **19.63** и **19.64**).

**19.84.** Множество $C^n[a;\ b]$ является незамкнутым подпространством пространства $C[a;\ b]$ (см. **19.65** и **19.69**).

**19.85.** Образуют ли в пространстве $C[-1;\ 1]$ (см. **19.65**) замкнутое подпространство следующие множества функций:

1) монотонные функции,

2) четные функции,

3) многочлены,

4) многочлены степени $\leqslant n$, дополненные нулевым многочленом,

5) непрерывно дифференцируемые функции,

6) функции, удовлетворяющие условию Гёльдера (см. **18.105**) данной степени?

**19.86.** При каких $p$ и $q$ справедливо включение $l_p \subset l_q$ (см. **19.62**)?

**19.87.** Доказать, что если $x(t) \in RL_p[a;\ b]$ (см. пример 2), $1 < p < +\infty$, то

$$\|x\|_1 \leqslant (b-a)^{1/q} \|x\|_p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

а если $1 \leqslant p < +\infty$, то

$$\|x\|_p \leqslant (b-a)^{1/p} \|x\|_\infty$$

(для неограниченных функций $x(t)$ считается, что $\|x\|_\infty = +\infty$).

**19.88.** Доказать, что если последовательность функций $(x_n(t))$ равномерно сходится к функции $x(t)$ на отрезке $[a;\ b]$ и $x_n - x \in RL_p[a;\ b]$, то эта последовательность сходится к функции $x$ и по полунорме пространства $RL_p[a;\ b]$ (см. пример 2).

**19.89.** Построить пример последовательности непрерывных неотрицательных на отрезке $[0;\ 1]$ функций, сходящейся в смысле нормы пространства $CL_p[0;\ 1]$ (см. **19.66**), но не сходящейся ни в одной точке этого отрезка.

В задачах 19.90—19.99 доказать сформулированные утверждения.

**19.90.** Если в полунормированном пространстве $X$ последовательность $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ имеет предел, равный $a \in X$, то для того чтобы та же последовательность имела предел, равный $b \in X$, необходимо и достаточно, чтобы $\|a-b\| = 0$.

**19.91.** Если последовательность точек сходится по полунорме, то она ограничена.

**19.92.** Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ (или $f\colon X \to \mathbb{C}$), определенная на полунормированном пространстве $X$, является непрерывной в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $\|x - x_0\| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

**19.93.** Полунорма является непрерывной функцией на полунормированном пространстве.

**19.94.** Операции сложения элементов и умножение их на число являются непрерывными в полунормированном пространстве.

**19.95.** Множество $E$ называют *плотным в полунормированном пространстве* $X$, если для каждой точки $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $y \in E$, что $\|y - x\| < \varepsilon$. Множество $C_0^\infty(a; b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ (см. 18.113), плотно в пространстве $RL_p(a; b)$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. пример 2).

**19.96.** Если $1 \leqslant p < q < +\infty$, то множество $RL_q[a; b]$ является плотным подпространством пространства $RL_p[a; b]$ (см. пример 2).

**19.97.** Всякое $n$-мерное нормированное пространство изоморфно с $\mathbb{R}^n$ (см. 19.60).

**19.98.** Пусть $X$ — полунормированное пространство. Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называют *эквивалентными*, если $\|x - y\| = 0$. Обозначим посредством $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства $X$. Пусть $x \in \tilde{x} \in \tilde{X}$, $y \in \tilde{y} \in \tilde{X}$, $\lambda$ — число. Определим $\tilde{x} + \tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $x + y$, а $\lambda\tilde{x}$ — как элемент из $\tilde{X}$, содержащий $\lambda x$. Положим $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X$. Данные определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x \in \tilde{x}$, $y \in \tilde{y}$ и множество $\tilde{X}$ является линейным нормированным пространством с нормой $\|\tilde{x}\|_{\tilde{X}}$.

**19.99.** Нормированное пространство $X$ является метрическим пространством с метрикой $\rho(x; y) = \|x - y\|_X$.

**19.100.** Привести пример метрического пространства, в котором метрика не порождается нормой.

**19.101.** Будет ли в линейном пространстве всех числовых последовательностей метрика задачи 18.14 порождаться какой-либо нормой?

В задачах **19.102—19.127** доказать утверждения.

**19.102.** Множество в нормированном пространстве ограничено по норме тогда и только тогда, когда оно ограничено как множество метрического пространства в смысле метрики, порожденной этой нормой.

**19.103.** Метрики, порожденные двумя нормами линейного пространства эквивалентны между собой (см. § 18, п. 1) тогда и только тогда, когда эквивалентны порожденные ими нормы.

**19.104.** Норма является непрерывной функцией в смысле метрики, порожденной этой нормой.

**19.105.** Если в нормированном пространстве $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$, $n \to \infty$.

**19.106.** Если в нормированном пространстве $x_n \to x$, $y_n \to y$ и в $\mathbb{R}$ $\lambda_n \to \lambda$, $\mu_n \to \mu$, то $\lambda_n x_n + \mu_n y_n \to \lambda x + \mu y$, $n \to \infty$.

**19.107.** Если по крайней мере одно из множеств $E_1$ и $E_2$ нормированного пространства открытое, то и их алгебраическая сумма $E_1 + E_2$ является открытым множеством.

**19.108.** В любом нормированном пространстве существует два непересекающихся открытых множества, которые не содержатся ни в каких непересекающихся замкнутых множествах.

**19.109.** Всякое нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве (это пространство называют *пополнением* исходного).

**19.110.** Все пополнения данного нормированного пространства (см. **19.109**) изоморфны между собой.

**19.111.** Произведение банаховых пространств (см. **19.80**) также является банаховым пространством.

**19.112.** Система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, элементов полунормированного пространства $X$ полна тогда и только тогда, когда множество конечных линейных комбинаций ее элементов, т. е. ее линейная оболочка, образует плотное (см. **19.95**) в $X$ множество.

**19.113.** Система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, элементов нормированного пространства полна тогда и только тогда, когда замыкание ее линейной оболочки (в смысле метрики, порожденной нормой) совпадает со всем пространством.

**19.114.** Нормированное пространство сепарабельно (в смысле метрики, порожденной нормой) в том и только том случае, когда оно содержит счетную полную систему.

**19.115.** Система степеней $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ полна в пространстве $C[a; b]$ (см. **19.8**).

**19.116.**

1) В подпространстве $C^*[-\pi; \pi]$ пространства $C[-\pi; \pi]$ (см. **19.8**), состоящем из таких функций $x(t)$, что $x(-\pi) = x(\pi)$, система

$$\{1;\ \cos x;\ \sin x;\ \ldots;\ \cos nx;\ \sin nx;\ \ldots\}$$

полна, а система

$$\{1;\ \cos x;\ \cos 2x;\ \ldots;\ \cos nx;\ \ldots\}$$

не полна.

2) В подпространстве пространства $C[0; \pi/2]$ функций, удовлетворяющих условию $f(0)=0$, система

$$\{\sin x;\ \sin 3x;\ \ldots;\ \sin(2n+1)x;\ \ldots\}$$

полна.

**19.117.** Имеют место следующие вложения:

1) $CL_p[a; b] \Subset RL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. пример 2 и **19.66**).

2) $C[a; b] \Subset CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **19.8**).

3) $C^n[a; b] \Subset C[a; b]$, $n=0, 1, 2, \ldots$ (см. **19.69**).

**19.118.** Если система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$, полна в полунормированном пространстве $X$, которое вложено в полунормированное пространство $Y$, и множество $X$ плотно в пространстве $Y$ по полунорме этого пространства, то заданная система полна в пространстве $Y$.

**19.119.** Система степеней $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ полна в пространстве $CL_p[a; b]$ (см. **19.66**).

**19.120.** Система многочленов Лежандра (см. **19.28**) полна в пространствах $C[a; b]$ (см. **19.8**) и $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **19.66**).

**19.121.**

1) Система

$$\{1;\ \cos x;\ \sin x;\ \ldots;\ \cos nx;\ \sin nx;\ \ldots\}$$

полна в пространстве $RL_p[-\pi; \pi]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. пример 2).

2) Система

$$\{\cos x;\ \cos 3x;\ \ldots;\ \cos(2n+1)x;\ \ldots\}$$

полна в пространстве $RL_2[0; \pi/2]$.

**19.122.** Пространства $C[a; b]$ (см. **19.8**) и $CL_p[a; b]$, $1 \leqslant p < +\infty$ (см. **19.66**) сепарабельны.

**19.123.** Пусть $X$ — нормированное пространство, тогда:

1) Если $x_n \in E$, $n=1, 2, \ldots$, $\lambda$ — число и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda x_n = \lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

2) Если $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n=1, 2, \ldots$, и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходятся, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$, причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

**19.124.** Последовательность элементов $(e_1; \ldots; e_n; \ldots)$ нормированного пространства $X$ называют (*счетным*) *базисом*, если, каков бы ни был элемент $x \in X$, существует и притом единственная последовательность чисел $\lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Если система элементов образует базис нормированного пространства, то она линейно независима.

**19.125.** Если нормированное пространство имеет базис, состоящий из конечного или счетного множества элементов, то это пространство сепарабельно.

**19.126.** Система степеней $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ не является базисом в пространстве $C[a; b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ (см. **19.8**).

**19.127.** Тригонометрическая система $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ не является базисом в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ (см. **19.115**).

---

**3. Линейные и полилинейные операторы.** В дальнейшем в этом параграфе $X$, $Y$ и $Z$ — линейные нормированные пространства. Поскольку нормы порождают метрику, то для нормированных пространств определено понятие непрерывного (по норме) отображения одного из них в другое. Отображения нормированных пространств называют обычно *операторами*. Операторы, отображающие данное нормированное пространство во множество действительных или, более общо, комплексных чисел, называют *функционалами* над данным пространством.

Пусть $A: X \to Y$. Положим

$$\| A \| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \| A(x) \|_Y. \tag{11}$$

Оператор $A$ называют *ограниченным*, если $\|A\| < +\infty$. Для линейных операторов это условие равносильно тому (см. **19.136**), что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\| A(x) \|_Y \leqslant c \| x \|_X. \tag{12}$$

Для линейных ограниченных операторов величину (11) называют их *нормой*.

Множество всех ограниченных линейных операторов, отображающих пространство $X$ в пространство $Y$, обозначают $\mathscr{L}(X; Y)$.

Билинейное отображение $f: X \times Y \to Z$ (см. п. 1) называют *ограниченным*, если существует такая постоянная $c > 0$, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство

$$\| f(x; y) \|_Z \leqslant c \| x \|_X \| y \|_X. \tag{13}$$

Аналогичным образом вводится понятие ограниченного полилинейного отображения.

---

В задачах 19.128—19.139 доказать сформулированные утверждения.

**19.128.** Если $X$ — двумерное линейное пространство векторов $x = (x_1;\ x_2)$ с полунормой $\|x\| = |x_1|$, то линейная функция $f(x) = x_2$ не является непрерывной на $X$.

**19.129.** Функция $f$, ставящая в соответствие каждому многочлену $P \in \mathscr{P}$ (см. 19.6) его значение в точке $t = 4$, т. е. $f(P) = P(4)$, является разрывной линейной функцией на нормированном пространстве $\mathscr{P}$ всех многочленов с нормой

$$\|P\| = \max_{[0;\ 1]} |P(t)|.$$

**19.130.** В конечномерном нормированном пространстве всякая линейная функция непрерывна относительно нормы.

**19.131.** Оператор

$$A(x) = (x_1;\ x_2^2;\ x_3^3;\ \ldots;\ x_n^n;\ \ldots),\quad x = (x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots) \in l_2$$

(см. 19.62), отображает $l_2$ в $l_2$, непрерывен в каждой точке и неограничен на любом шаре $U(0;\ r)$, $r > 1$. Будет ли оператор $A$ линейным?

**19.132.** Линейный оператор $X \to Y$ непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле пространства $X$.

**19.133.** Линейный оператор $X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

**19.134.** Если $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, то

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}.$$

**19.135.** Если $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, то

$$\|A\| = \sup_{\|x\| = 1} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}.$$

**19.136.** Линейный оператор $A\colon X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $\|A(x)\| \leqslant c\|x\|$.

**19.137.** Для линейного оператора $A\colon X \to Y$ величина $\|A\|$ равна нижней грани таких постоянных $c > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|A(x)\| \leqslant c\|x\|$.

**19.138.** Линейный оператор $X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда он любое ограниченное в $X$ множество отображает в ограниченное в $Y$ множество.

**19.139.** Если $A\colon X \to Y$ — линейный оператор, то для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|A(x)\| \leqslant \|A\|\|x\|$.

**19.140.** Являются ли линейными следующие функционалы над пространством $C[0;\ 1]$ (см. 19.8):

$$1)\ A(x) = \int_0^1 x(t) \sin t\, dt;\quad 2)\ A(x) = x(t_0),\ t_0 \in [0;\ 1];$$

3) $A(x)=\int\limits_0^1 x(t^2)\,dt$;  4) $A(x)=\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt$;

5) $A(x)=\max\limits_{[0;\,1]} x(t)$?

**19.141.** Какие из функционалов в задаче **19.140** линейны и непрерывны на пространстве $C[0;\,1]$? Вычислить их нормы.

**19.142.** Доказать, что оператор $A$: $C[0;\,1]\to C[0;\,1]$ (см. **19.8**) ограничен, и найти его норму, если:

1) $A(x)=\int\limits_0^t x(s)\,ds$.  2) $A(x)=t^2x(0)$.

3) $A(x)=x(t^2)$.  4) $A(x)=\varphi(t)\,x(t)$, $\varphi(t)\in C[0,\,1]$.

5) $A(x)=\int\limits_0^1 \sin\pi(t-s)\,x(s)\,ds$.

6) $A(x)=\int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds$.

**19.143.** Доказать, что оператор $A$: $C^1[0;\,1]\to C[0;\,1]$ (см. **19.8** и **19.11**) непрерывен, и найти его норму, если 1) $A(x)=x(t)$, 2) $A(x)=x'(t)$.

**19.144.** Доказать, что если $\varphi_k\in C[a;\,b]$ (см. 19.8), $k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n$, то оператор

$$A\colon C^n[a;\,b]\to C[a;\,b],\qquad A(x)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(t)\,x^{(k)}(t),$$

ограничен.

**19.145.** Для каких $\alpha>0$ оператор $A$: $C[0;\,1]\to C[0;\,1]$ (см. **19.8**), $A(t)=x(t^\alpha)$, линеен и непрерывен? Найти его норму.

**19.146.** При каких $\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_n,\,\ldots$ оператор $A$: $l_2\to l_2$ (см. **19.62**), $A(x)=(\alpha_1x_1;\,\alpha_2x_2;\,\ldots;\,\alpha_nx_n;\,\ldots)$, $x=(x_1;\,\ldots;\,x_n;\,\ldots)\in l_2$, непрерывен? Найти его норму.

В задачах **19.147—19.154** доказать сформулированные утверждения.

**19.147.** Ядро ограниченного линейного оператора $A$: $X\to Y$ является замкнутым подпространством пространства $X$.

**19.148.** Если $X_1$ — линейное пространство, плотное в нормированном пространстве $X$, а $Y$ — полное нормированное пространство, то всякий линейный ограниченный оператор $A_1$: $X_1\to Y$ можно и притом единственным образом продолжить в непрерывное отображение $A$: $X\to Y$. Это отображение $A$ линейно и

$$\|A\|_{\mathscr{L}(X,\,Y)}=\|A_1\|_{\mathscr{L}(X_1,\,Y)}.$$

**19.149.** Множество ограниченных линейных операторов $\mathscr{L}(X; Y)$ образует подпространство линейного пространства всех линейных операторов $L(X; Y)$.

**19.150.** Множество ограниченных линейных операторов $\mathscr{L}(X; Y)$ является нормированным пространством, в котором функционал (11) является нормой.

**19.151.** Если пространства $X$ и $Y$ конечномерны, то $\mathscr{L}(X; Y) = L(X; Y)$.

**19.152.** Если $Y$ — банахово пространство, то пространство $\mathscr{L}(X; Y)$ также банахово.

**19.153.** Любое нормированное пространство $X$ изоморфно с пространством $\mathscr{L}(\mathbb{R}; X)$.

**19.154.** Композиция линейных ограниченных операторов $A$ и $B$ также является линейным ограниченным оператором и выполняется неравенство $\|BA\| \leqslant \|B\| \|A\|$.

**19.155.** Привести пример нормированного пространства $X$ и таких линейных ограниченных операторов $A$: $X \to X$ и $B$: $X \to X$, что $AB \neq BA$.

В задачах **19.156—19.162** доказать сформулированные утверждения.

**19.156.** Если $A$: $X \times Y \to Z$ — линейный ограниченный оператор, то существуют и притом единственные такие линейные ограниченные операторы $A_1$: $X \to Z$ и $A_2$: $Y \to Z$, что для любого элемента $(x; y) \in X \times Y$ имеет место равенство

$$A(x; y) = A_1(x) + A_2(y).$$

Для норм операторов $A$, $A_1$ и $A_2$ выполняются неравенства

$$\|A_1\| \leqslant \|A\|, \quad \|A_2\| \leqslant \|A\|.$$

**19.157.** Если $A_1$: $X \to Z$ и $A_2$: $Y \to Z$ — линейные ограниченные операторы, то оператор $A(x; y) = A_1(x) + A_2(y)$ является линейным ограниченным оператором из $X \times Y$ в $Z$ и для его нормы выполняется неравенство $\|A\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$.

**19.158.** Множество ограниченных билинейных отображений $f$: $X \times Y \to Z$ образует подпространство линейного пространства всех билинейных отображений $X \times Y \to Z$ (см. п. 1).

**19.159.** Множество $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ ограниченных билинейных отображений $f$: $X \times Y \to Z$ является нормированным пространством с нормой

$$\|f\| = \inf \{c: \|f(x, y)\|_Z \leqslant c \|x\|_X \|y\|_Y\}.$$

**19.160.** Для всякого ограниченного билинейного отображения $f$: $X \times Y \to Z$ и любых $x \in X$, $y \in Y$ выполняется неравенство

$$\|f(x; y)\|_Z \leqslant \|f\| \|x\|_X \|y\|_Y.$$

**19.161.** Для того чтобы билинейное отображение произведения нормированных пространств было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным.

**19.162.** Если пространство $Z$ банахово, то пространство $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ ограниченных билинейных отображений также банахово.

**19.163.** При фиксированном элементе $x \in X$ билинейное отображение $f$: $X \times Y \to Z$ задает линейное отображение $f_x$: $Y \to Z$ по формуле

$$f_x(y) \overset{\text{def}}{=} f(x;\ y).$$

Если $f$ — ограниченное билинейное отображение, то $\|f_x\| \leqslant \leqslant \|f\| \|x\|$.

**19.164.** Пусть $f$ — ограниченное билинейное отображение $f$: $X \times Y \to Z$ и $F$: $x \mapsto f_x$, $x \in X$ (см. **19.163**), тогда для любого $y \in Y$ верно равенство $(F(x))(y) = f_x(y) = f(x;\ y)$, $F$ является линейным ограниченным оператором, отображающим пространство $X$ в пространство $\mathscr{L}(Y;\ Z)$, т. е. $F \in \mathscr{L}(X, \mathscr{L}(Y;\ Z))$, и $\|F\| = \|f\|$.

**19.165.** Отображение $f \mapsto F$ (см. **19.164**) является изоморфным отображением пространства $\mathscr{L}_2(X, Y; Z)$ на пространство $\mathscr{L}(X, \mathscr{L}(Y; Z))$.

**19.166.** По аналогии с билинейным отображением определяется понятие *n-линейного отображеия* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y$, $n = 1, 2, \ldots$, и его норма ($X_1, X_2, \ldots, X_n, Y$ — нормированные пространства). Нормированное пространство всех ограниченных $n$-линейных отображений $\mathscr{L}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n;\ Y)$ изоморфно с пространством

$$\mathscr{L}(X_1, \mathscr{L}(X_2, \ldots, \mathscr{L}(X_n;\ Y) \ldots)),$$

причем существует такой изоморфизм этих пространств, что для соответствующих при нем друг другу элементов

$$f \in \mathscr{L}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n;\ Y)$$

и

$$F \in \mathscr{L}(X_1, \mathscr{L}(X_2, \ldots, \mathscr{L}(X_n;\ Y) \ldots))$$

для любых $x_k \in X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет место соотношение

$$(\ldots((Fx_1)x_2)\ldots)x_n = f(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n).$$

**4. Дифференцируемые отображения нормированных пространств.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства, $G$ — открытое в $X$ множество и $x_0 \in G$. Отображение $\alpha$: $G \to Y$ называют *бесконечно малым по сравнению с функцией* $\|x - x_0\|^n$ и пишут

$$\alpha = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{14}$$

если существует такое непрерывное в точке $x = x_0$ отображение $\varepsilon$: $G \to Y$, что $\alpha(x) = \varepsilon(x) \|x - x_0\|^n$, $\varepsilon(0) = 0$.

Отображение $f$ открытого множества $G$ нормированного пространства $X$ в нормированное пространство $Y$ называют *дифференцируемым* или *сильно дифференцируемым* в точке $x \in G$, если существует такой линейный ограниченный оператор $A$: $X \to Y$, что

$$f(x+h) = f(x) + A(h) + o(h), \quad h \to 0. \tag{15}$$

В этом случае линейный оператор $A$ называют *дифференциалом отображения $f$ в точке $x$* и обозначают $Df(x)$ (или $(Df)(x)$), а также $f'(x)$. Его часто называют *сильным дифференциалом* или *сильной производной*, а иногда *дифференциалом* или *производной Фреше*.

Если $x_0 \in X$ и $x \in X$, то множество всех точек пространства $X$ вида $(1-t)x_0 + tx$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, называют *отрезком* $[x_0; x]$, множество всех точек вида $(1-t)x_0 + tx$, $0 < t < 1$, — *интервалом* $(x_0; x)$ в этом пространстве, а число $\|x - x_0\|$ — их *длиной*. Точки $x_0$ и $x$ называют *концами* указанных отрезка и интервала.

Пусть $x \in E \subset X$, $h \in X$, $h \neq 0$, множество $E$ таково, что оно содержит все точки вида $x + th$ при достаточно малых $t > 0$ (т. е. содержит некоторый отрезок положительной длины с концом $x$ в направлении вектора $h$) и $f$: $E \to Y$.

Отображение $f$ называют *дифференцируемым в точке $x$ по направлению вектора $h$*, если существует такой элемент $(D_h f)(x) \in Y$, что

$$f(x+th) = f(x) + (D_h f)(x)t + o(t), \quad t \to 0. \tag{16}$$

Элемент $D_h f(x) \equiv (D_h f)(x)$ называют *производной по направлению $h$* или *производной Гато* по этому направлению.

Производная Фреше $Df(x)$ и производная Гато $D_h f(x)$ имеют разную природу: $Df(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$, а $D_h f(x) \in Y$.

Если отображение $f$: $G \to Y$, $G$ — открытое в пространстве $X$ множество, имеет в точке $x \in G$ производную $(D_h f)(x)$ по любому направлению и существует такой линейный ограниченный оператор $(D_{\text{сл}} f)(x)$: $X \to Y$, что

$$(D_{\text{сл}} f)(x)(h) = (D_h f)(x), \tag{17}$$

то этот оператор называют *слабым дифференциалом* или *слабой производной*, а также *дифференциалом* или *производной Гато*. В этом случае равенство (16) имеет вид

$$f(x+th) = f(x) + tD_{\text{сл}} f(x)(h) + o(t), \quad t \to 0. \tag{18}$$

Если отображение $f$: $G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ дифференцируемо во всех точках $x \in G$, то его производная $f'(x) \in \mathscr{L}(X; Y)$ задает отображение $f'$: $x \mapsto f'(x)$ множества $G$ в линейное нормированное пространство $\mathscr{L}(X; Y)$. Если это отображение в свою очередь дифференцируемо в точке $x_0 \in G$, то его производную $(f')'(x_0)$ обозначают $f''(x_0)$ и называют *второй производной отображения* $f$ (в точке $x_0$). Она является элементом пространства $\mathscr{L}(X;\ \mathscr{L}(X;\ Y))$.

Вторая производная может быть рассматриваема как билинейная форма, определенная равенством

$$f''(x)(h;\ k) = (f''(x)h)k, \quad h \in X, \quad k \in X \tag{19}$$

(см. **19.165**).

Производная любого порядка $n \in \mathbb{N}$ определяется по индукции

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) \tag{20}$$

(как обычно, $f^{(0)}(x) = f(x)$). При фиксированном $x \in G$ производная $f^{(n)}(x)$ является линейным ограниченным оператором из пространства $X$ в пространство $\underbrace{\mathscr{L}(X;\ \ldots;\ \mathscr{L}(X;\ Y)\ \ldots)}_{n-1\ \text{раз}}$, т. е.

$$f^{(n)}(x) \in \underbrace{\mathscr{L}(X;\ \mathscr{L}(X;\ \ldots;\ \mathscr{L}(X;\ Y)\ \ldots))}_{n\ \text{раз}}.$$

Производную $f^{(n)}(x)$ можно рассматривать как $n$-линейную форму, определяемую равенством (см. **19.166**)

$$(f^{(n)}(x))(h_1;\ \ldots;\ h_n) \overset{\text{def}}{=} (\ldots(f^{(n)}(x)h_1)\ldots)h_n. \tag{21}$$

В случае, когда $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h$, вместо $f^{(n)}(x)(h;\ldots;\ h)$ пишут $f^{(n)}(x)h^n$.

---

В задачах **19.167—19.174** доказать сформулированные утверждения.

**19.167.** Если отображение $f$: $G \to Y$ открытого в $X$ множества $G$ дифференцируемо в точке $x_0 \in G$, то оно и непрерывно в этой точке.

**19.168.** Если отображение $f$: $G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ дифференцируемо в точке $x \in G$, то его дифференциал в этой точке определен однозначно.

**19.169.** Если отображение $f$: $G \to Y$ постоянно на открытом в пространстве $X$ множестве $G$, то $f'(x) = 0$ на $G$.

**19.170.** Если $x_0 \in X$, $a \in X$ и $f(t) = x_0 + at$, $-\infty < t < +\infty$, то отображение $f$: $\mathbb{R} \to X$ дифференцируемо во всех точках $t \in \mathbb{R}$ и $f'(x_0 + ta) = a$.

**19.171.** Отображение $y = f(x)$, $x = (x_1;\ \ldots;\ x_n)$, $y = (y_1;\ \ldots;\ y_m)$, открытого в пространстве $\mathbb{R}^n$ множества $G$ в пространство $\mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in G$ тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы все его координатные функции $y_i = y_i(x_1;\ \ldots;\ x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, причем производная $f'(x)$ задается *матрицей Якоби* $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

**19.172.** Доказать, что дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.

**19.173.** Если отображение $w=f(z)$, $z=x+iy$, $w=u+iv$, открытого множества $G\subset\mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ дифференцируемо в точке $z_0=x_0+iy_0$ в смысле Фреше, то в этой точке выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial u(x_0;\ y_0)}{\partial x}=\frac{\partial v(x_0;\ y_0)}{\partial y},\qquad \frac{\partial v(x_0;\ y_0)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x_0;\ y_0)}{\partial y}.$$

**19.174.** Пусть функции $\varphi(t;\ s)$ и $\dfrac{\partial\varphi(t;\ s)}{\partial s}$ непрерывны в полосе $a\leqslant t\leqslant b$, $-\infty<s<+\infty$ и отображение $f$: $C[a;\ b]\to$ $\to C[a;\ b]$ задается формулой

$$f(x)=\varphi(t;\ x(t)),\quad x\in C[a;\ b]\quad (\text{см. } \mathbf{19.8}),$$

тогда отображение $f$ дифференцируемо в любой точке $x_0\in$ $\in C[a;\ b]$ и

$$(f'(x_0))(h(t))=\frac{\partial f(t;\ x_0(t))}{\partial s}\,h(t),\quad h\in C[a;\ b].$$

Получить отсюда формулу для производной отображения $f$: $C[a;\ b]\to C[a;\ b]$ умножения на непрерывную функцию, т. е. для производной отображения $(f(x))(t)=\varphi(t)x(t)$.

**19.175.** Найти производные следующих отображений в указанных точках (см. **19.8**):

1) $f(x)=\sin x(t)$, $f$: $C[0;\ \pi]\to C[0;\ \pi]$ в точке $x_0=\cos t$.

2) $f(x)=ax^2(t)+bx(t)+c$, $f$: $C[0;\ 1]\to C[0;\ 1]$ в точке $x_0=0$.

3) $f(x)=e^{tx(t)}$, $f$: $C[1;\ 2]\to C[1;\ 2]$ в точке $x_0=\ln t$.

**19.176.** Найти производную Фреше функционала

$$f(x)=\int\limits_a^b F(t;\ x(t);\ x'(t))\,dt,$$

определенного на банаховом пространстве $\overset{0}{C}{}^1[a;\ b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;\ b]$ функций $x(t)$, обращающихся в нуль на его концах, в предположении дважды непрерывной дифференцируемости функции $F$.

В задачах **19.177—19.183** доказать сформулированные утверждения.

**19.177.** Если отображения $f$: $G\to Y$ и $g$: $G\to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ дифференцируемы в точке $x\in G$, то любая их линейная комбинация $\lambda f+\mu g$ также дифференцируема в этой точке и

$$(\lambda f+\mu g)'(x)=\lambda f'(x)+\mu g'(x).$$

**19.178.** Если отображение $f$: $G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ дифференцируемо в точке $x + t_0 h$, $0 < t_0 < 1$, интервала $(x;\ x+h) \subset G$, то отображение $g(t) = f(x+th)$, $0 < t < 1$, дифференцируемо в точке $t_0$ и $g'(t_0) = f'(x_0 + t_0 h) h$.

**19.179.** Если $X$, $Y$ и $Z$ — нормированные пространства, $G$ и $D$ — открытые множества соответственно в $X$ и $Y$, отображение $f$: $G \to D$ дифференцируемо в точке $x \in G$, а отображение $g$: $D \to Z$ — в точке $f(x)$, то их композиция $gf$ дифференцируема в точке $x$ и ее дифференциал в этой точке равен композиции дифференциалов отображений $f$ и $g$: $D(g(f(x)))(Df(x))$.

**19.180.** Условие (16) равносильно условию существования предела

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = (D_h f)(x).$$

**19.181.** Отображение $x \mapsto \|x\|$, $x \in X$, имеет в точке $x = 0$ производную по любому направлению, но не дифференцируемо в этой точке.

**19.182.** Если отображение $f$: $G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ дифференцируемо в точке $x \in G$ по Фреше, то оно в этой точке имеет производную по любому направлению.

**19.183.** Если в данной точке у заданного отображения существует сильный дифференциал, то в ней существует и слабый, причем они совпадают.

**19.184.** Привести пример отображения, имеющего в некоторой точке слабый дифференциал и не имеющего в ней сильного.

В задачах **19.185—19.193** доказать сформулированные утверждения.

**19.185.** Если у отображения $f$: $G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ в некоторой окрестности точки $x \in G$ существует слабая производная $D_{\text{сл}} f(x)$, непрерывная в точке $x$ (т. е. в этой точке непрерывно отображение $x \mapsto (D_{\text{сл}} f)(x) \in \mathscr{L}(X;\ Y)$), то в ней существует сильная производная $Df(x)$ и она совпадает со слабой.

**19.186.** Пусть $\varphi$ — отображение отрезка $[0;\ 1]$ в линейное нормированное пространство $Y$, а $\psi$ — действительная функция, заданная также на отрезке $[0;\ 1]$, причем $\varphi$ и $\psi$ непрерывны на этом отрезке и дифференцируемы в его внутренних точках. Тогда, если для всех $t \in (0;\ 1)$ выполняется неравенство $\|\varphi'(t)\| \leqslant \psi'(t)$, то выполняется и неравенство $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leqslant \psi(1) - \psi(0)$.

**19.187.** Если отображение $f$: $G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ непрерывно на отрезке $[x_0;\ x] \subset G$ и дифференцируемо на интервале $(x_0;\ x)$, то

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \leqslant \|h\| \sup_{(x_0;\ x)} \|f'(\xi)\|.$$

**19.188.** Билинейную форму $F(x;\ y)$, $x \in X$, $y \in X$, называют *симметричной*, если для любых элементов $x \in X$ и $y \in X$ выполняется равенство $F(x;\ y) = F(y;\ x)$. Если отображение $f\colon G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ имеет вторую производную $f''$ в точке $x_0 \in G$, то эта производная является симметричной формой (см. **19.44**), принадлежащей пространству $\mathscr{L}_2(X^2;\ Y) \equiv \mathscr{L}_2(X,\ X;\ Y)$ (см. **19.159**).

**19.189.** Имеет место формула

$$f^{(n)}(x)(h_1;\ \ldots;\ h_n) = \left(\left(f^{(n-1)}\right)'(x)\, h_1\right)(h_2;\ \ldots;\ h_n).$$

**19.190.** Имеет место формула

$$\left(\left(f^{(m)}\right)^{(n-m)}(x)(h_1;\ \ldots;\ h_{n-m})\right)(h_{n-m+1};\ \ldots;\ h_n) =$$
$$= f^{(n)}(x)(h_1;\ \ldots;\ h_n),\quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

**19.191.** Производная $f^{(n)}$ любого порядка $n$ является симметричной $n$-линейной формой ($n$-линейную форму $F(x_1;\ \ldots;\ x_n)$ называют *симметричной*, если ее значения не меняются при любой перестановке ее аргументов).

**19.192.** Если отображение $f\colon G \to Y$ открытого в пространстве $X$ множества $G$ имеет на отрезке $[x_0;\ x] \subset G$ $n$ непрерывных производных и на интервале $(x_0;\ x)$ производную порядка $n+1$, то

$$\left\| f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\, h - \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(x_0;\ x_0+h)} \left\| f^{(n+1)}(\xi) \right\|, \qquad (22)$$
$$x_0 + h \in [x_0;\ x].$$

**19.193.** Если в предположениях предыдущей задачи производная порядка $n+1$ отображения $f$ ограничена на интервале $(x_0;\ x)$:

$$c = \sup_{(x_0;\ x)} \left\| f^{(n+1)}(\xi) \right\| < +\infty,$$

то

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n + o(h^n),$$
$$h \to 0. \qquad (23)$$

(*формула Тейлора*).

**19.194.** Для отображения $f\colon C^2[0;\ 1] \to C[0;\ 1]$ (см. **19.69**) $(f(x))(t) = \dfrac{d^2x}{d^2t} + \sin x(t)$ найти все его производные в точке $x = t$ и разложить по формуле Тейлора в окрестности этой точки.

---

**5. Интегрирование векторнозначных функций.** Пусть функция $x = x(t)$ отображает отрезок $[\alpha;\ \beta] \subset \mathbb{R}$ в линейное нормированное пространство $X$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[\alpha;\ \beta]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\xi_i \in [t_{i-1};\ t_i]$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ i_\tau$, $|\tau| = \max\limits_{i=1,2,\ldots,i_\tau} |\Delta t_i|$ (мелкость разбиения $\tau$),

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x;\ \xi_1;\ \ldots;\ \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} x(\xi_i)\,\Delta t_i. \tag{24}$$

*Интегралом* $\int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt$ (подробнее *интегралом Римана — Бохнера*) от функции $x(t)$ по отрезку $[\alpha;\ \beta]$ называют предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$, т. е.

$$\int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau, \tag{25}$$

где предел интегральных сумм определяют аналогично случаю числовых функций: элемент $a \in X$ называют *пределом* $\lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений $\tau$ мелкости $|\tau| < \delta$ выполняется неравенство $\|\sigma_\tau - a\|_X < \varepsilon$.

Если интеграл (25) существует, то функцию $x\colon [\alpha;\ \beta] \to X$ называют *интегрируемой на отрезке* $[\alpha;\ \beta]$.

---

**19.195.** Дать определение интеграла $\int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt$, $x\colon [\alpha;\ \beta] \to \mathbb{R}$, $[\alpha;\ \beta] \subset \mathbb{R}$, в терминах пределов последовательностей интегральных сумм и доказать его эквивалентность с определением (25).

В задачах **19.196—19.206** доказать сформулированные утверждения.

**19.196.** Пусть $x\colon [\alpha;\ \beta] \to X$, $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[\alpha;\ \beta]$,

$$\omega_i(x;\ \tau) = \sup_{\xi,\ \eta \in [t_{i-1};\ t_i]} \|f(\eta) - f(\xi)\|.$$

Тогда, для того чтобы существовал интеграл $\int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega_i(x;\ \tau)\,\Delta t_i = 0.$$

**19.197.** Для того чтобы существовал интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt$ от функции $x$: $[\alpha;\beta]\to X$, где $X$ — банахово пространство, необходимо и достаточно, чтобы какова бы ни была последовательность $\{\sigma_{\tau_n}\}$ интегральных сумм функции $x(t)$, у которой $\lim\limits_{n\to\infty}|\tau_n|=0$, для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер $n_0$, что для всех номеров $n$, $m>n_0$ выполняется неравенство $|\sigma_{\tau_n}-\sigma_{\tau_m}|<\varepsilon$.

**19.198.** Если функция $x$: $[\alpha;\beta]\to X$ непрерывна, то она интегрируема.

**19.199.** Линейная комбинация интегрируемых на отрезке $[\alpha;\beta]$ функций является интегрируемой на этом отрезке функцией, и интеграл (25) от линейной комбинации функций равен такой же линейной комбинации интегралов от этих функций.

**19.200.** Если функция $x$: $[\alpha;\beta]\to X$ интегрируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[\alpha';\beta']\subset\subset[\alpha;\beta]$.

**19.201.** Если функция $x$: $[\alpha;\beta]\to X$ интегрируема на отрезках $[\alpha;\gamma]$ и $[\gamma;\beta]$, $\alpha<\gamma<\beta$, то она интегрируема и на отрезке $[\alpha;\beta]$ и имеет место формула

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt=\int\limits_{\alpha}^{\gamma} x(t)\,dt+\int\limits_{\gamma}^{\beta} x(t)\,dt. \qquad (26)$$

**19.202.** Если функция $x$: $[\alpha;\beta]\to X$ интегрируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, то на этом отрезке интегрируема и ее норма $\|x(t)\|$, $t\in\in[\alpha;\beta]$, причем

$$\left\|\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt\right\|\leqslant\int\limits_{\alpha}^{\beta}\|x(t)\|\,dt. \qquad (27)$$

**19.203.** Если функция $x$: $[\alpha;\beta]\to X$ постоянная: $x(t)\equiv x_0$, то она интегрируема на отрезке $[\alpha;\beta]$ и

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt=(\beta-\alpha)\,x_0.$$

**19.204.** Если отображение $x$: $[\alpha;\beta]\to X$ имеет вид $x(t)==\varphi(t)x_0$, где $\varphi(t)$ — числовая функция, а $x_0\in X$, то

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt=x_0\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\,dt.$$

**19.205.** Если $C$: $X\to Y$ — ограниченное линейное отображение нормированного пространства $X$ в нормированное пространство $Y$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} C(x(t))\,dt = C\left(\int_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt\right).$$

**19.206.** Пусть задано непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ нормированного пространства $X$ в нормированное пространство $Y$ и $[x_0;\ x_1] \subset X$. Положим

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x_0 + t(x_1 - x_0))\,dt.$$

Тогда, если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ имеет на отрезке $[x_0;\ x_1]$ сильную производную $f'$, непрерывную по $x$, то

$$\int_{x_0}^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0)$$

(*формула Ньютона — Лейбница*).

---

## § 20. Гильбертовы пространства

**1. Пространства со скалярным произведением.** Пусть $X$ — действительное линейное пространство. Функцию $(x,\ y)$, определенную на $X \times X$, называют *скалярным произведением*, если для любых точек $x,\ y,\ z \in X$ и любых действительных чисел $\lambda$, $\mu$ выполняются следующие свойства:

1) *Коммутативность*: $(x,\ y) = (y,\ x)$.
2) *Линейность*: $(\lambda x + \mu y,\ z) = \lambda(x,\ z) + \mu(y,\ z)$.
3) *Неотрицательность*: $(x,\ x) \geqslant 0$.
4) *Невырожденность*: Если $(x,\ x) = 0$, *то* $x = 0$.

В случае комплексного линейного пространства функцию называют *скалярным произведением*, если выполняются условия 2), 3) и 4), а вместо 1) условие

1′) $(x,\ y) = \overline{(y,\ x)}$.

Если для функции $(x, y)$ выполняются только условия 1)—3) (соответственно условия 1′), 2), 3)), то ее называют *полускалярным произведением*. Иначе говоря, полускалярное произведение в случае действительного пространства это симметричная неотрицательная билинейная форма.

Если $(x,\ y)$ — скалярное (полускалярное) произведение, то функционал

$$\|x\| = \sqrt{(x,\ x)} \tag{1}$$

является нормой (полунормой) на пространстве $X$ (см. 20.5).

*Углом* между элементами $x \neq 0$ и $y \neq 0$ линейного пространства со скалярным произведением называют такой угол

$\varphi \in [0; \pi]$, что

$$\cos\varphi = \frac{(x,\ y)}{\|x\|\,\|y\|}. \tag{2}$$

Линейное пространство со скалярным произведением называют *гильбертовым*, если оно полно в смысле метрики, порожденной нормой (1).

Пример 1. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ сходится, $0 < \lambda_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Доказать что в линейном пространстве $X$ всех последовательностей $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$, функционал

$$(x,\ y) \overset{\det}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n \tag{3}$$

является скалярным произведением и что пространство $X$ с этим скалярным произведением не является гильбертовым.

$\triangle$ Выполнимость аксиом скалярного произведения для функционала (3) проверяется непосредственно. Покажем, что последовательность $x^{(n)} = \left(x_1^{(n)};\ \ldots;\ x_m^{(n)};\ \ldots\right)$, где $x_m^{(n)} = 1$, если $1 \leqslant m \leqslant n$, и $x_m^{(n)} = 0$, если $m > n$, фундаментальная, но не сходящаяся. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ следует, что существует такой номер $n_\varepsilon$, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \lambda_n < \varepsilon^2.$$

Поэтому при $n > n_\varepsilon$ и $k \geqslant 0$ имеем

$$\|x^{(n+k)} - x^{(n)}\| = \sqrt{\left(x^{(n+k)} - x^{(n)},\ x^{(n+k)} - x^{(n)}\right)} =$$
$$= \sqrt{\sum_{m=n+1}^{n+k} \lambda_m} \leqslant \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \lambda_m} < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $(x^{(1)};\ \ldots;\ x^{(n)};\ \ldots)$ фундаментальная. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = a = (a_1;\ \ldots;\ a_m;\ \ldots)$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m^2$ следует, что существует такое $n_0$, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $a_n < 1/2$, а поэтому и неравенство

$$\|x^{(n)} - a\|^2 \underset{(3)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(x_m^{(n)} - a_m\right)^2 \geqslant \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m (1 - a_m)^2 +$$
$$+ \sum_{m=n_0+1}^{n} \lambda_m (1 - a_m)^2 \geqslant \sum_{m=1}^{n_0} \lambda_m (1 - a_m)^2 + \frac{1}{4} \sum_{m=n_0+1}^{n} \lambda_m.$$

Здесь первое слагаемое в правой части неотрицательно, а второе при $n \to \infty$ в силу условия $\lambda_n > 0$ стремится к положительному пределу. Следовательно, предел всей правой части при $n \to \infty$ положителен, в то время как предел левой части равен нулю. Отсюда явствует, что последовательность $(x^{(1)}; \ldots; x^{(n)}; \ldots)$ не имеет предела. ▲

Два линейных пространства со скалярным (полускалярным) произведением называют *изоморфными*, если они изоморфны как линейные пространства и существует отображение, осуществляющее этот изоморфизм и сохраняющее скалярное (полускалярное) произведение.

---

В задачах **20.1—20.18** доказать сформулированные утверждения.

**20.1.** Для каждого элемента $x$ пространства с полускалярным произведением имеет место равенство $(x, 0) = 0$.

**20.2.** Полускалярное произведение в действительном линейном пространстве является билинейным отображением, а в комплексном не является.

**20.3.** Для полускалярного произведения в действительном (комплексном) линейном пространстве справедливо неравенство

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}$$

(*неравенство Коши — Буняковского*).

**20.4.** Для полускалярного произведения справедливо неравенство

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}.$$

**20.5.** Если $(x, y)$ — полускалярное (скалярное) произведение в линейном пространстве, то функционал $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ является полунормой (нормой) в этом пространстве.

**20.6.** В множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ обычная операция умножения является скалярным произведением, а в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ скалярным произведением чисел $z_1$ и $z_2$ является произведение $z_1\bar{z}_2$.

**20.7.** В действительном $n$-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ функционал

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$
$$x = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_1; \ldots; y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

является скалярным произведением, а соответствующая ему норма совпадает с длиной вектора.

**20.8.** В комплексном $n$-мерном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ (см. **20.3**) функция

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n,$$
$$x = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{C}^n, \quad y = (y_1; \ldots; y_n) \in \mathbb{C}^n,$$

является скалярным произведением.

**20.9.** В действительном $n$-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ функция

$$(x,\ y)=x_1y_1+\ldots+x_my_m,\quad 1\leqslant m<n,$$
$$x=(x_1;\ \ldots;\ x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad y=(y_1;\ \ldots;\ y_n)\in\mathbb{R}^n,$$

является полускалярным произведением и не является скалярным.

**20.10.** В линейном пространстве $RL_2[a;\ b]$ (см. **19.10**), состоящем из действительных функций с интегрируемым (вообще говоря, в несобственном смысле) на отрезке $[a;\ b]$ квадратом, функционал

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt,\quad x\in RL_2[a;\ b],\quad y\in RL_2[a;\ b],$$

является полускалярным произведением и не является скалярным.

**20.11.** В линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций $x\colon [a;\ b]\to\mathbb{R}$ функционал

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt,\quad x,\ y\in C[a;\ b]$$

является скалярным произведением. Полученное пространство со скалярным произведением обозначают $CL_2[a;\ b]$.

**20.12.** В линейном пространстве, состоящем из комплекснозначных функций, квадрат модуля которых интегрируем на отрезке $[a;\ b]$, функционал

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

является полускалярным и не является скалярным произведением.

**20.13.** В линейном пространстве комплекснозначных непрерывных на отрезке $[a;\ b]$ функций функционал

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$$

является скалярным произведением.

**20.14.** В пространстве $CL_2(a;\ b)$ действительных непрерывных на конечном или бесконечном интервале $(a;\ b)$, $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, функций, квадрат которых интегрируем на этом интервале, функционал

$$(x,\ y)=\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$$

является скалярным произведением.

**20.15.** В линейном пространстве $l_2$ действительных числовых последовательностей (см. пример 2 в § 18, п. 1) функционал

$$(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\quad x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)\in l_2,\quad y=(y_1;\ \ldots;\ y_n;\ \ldots)\in l_2,$$

является скалярным произведением. Привести пример полускалярного произведения в этом линейном пространстве.

**20.16.** В линейном пространстве последовательностей $(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)$ комплексных чисел (см. **19.13**), для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, функционал

$$(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$$

является скалярным произведением.

**20.17.** В линейном пространстве $l_2$ (см. **20.15**) функционал

$$(x,\ y)=\sum_{n=m}^{\infty} x_n y_n$$

при $m>1$ является полускалярным и не является скалярным произведением.

**20.18.** Пусть $X$ — линейное пространство с полускалярным произведением. Элементы $x\in X$, $y\in X$ называют *эквивалентными*, если $\|x-y\|^2 \equiv (x-y,\ x-y)=0$. Обозначим $\tilde{X}$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных элементов пространства $X$. Пусть $x\in\tilde{x}\in X$, $y\in\tilde{y}\in\tilde{X}$, $\lambda$ и $\mu$ — числа. Определим $\lambda\tilde{x}+\mu\tilde{y}$ как элемент множества $\tilde{X}$, содержащий $\lambda x+\mu y$, и положим $(\tilde{x},\ \tilde{y})=(x,\ y)$. Тогда эти определения корректны, т. е. не зависят от выбора элементов $x\in\tilde{x}$, $y\in\tilde{y}$ и $\tilde{X}$ является линейным пространством, а функция $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ — скалярным произведением в нем.

**20.19.** Найти углы треугольника с вершинами в точках $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv 1$, $x_3(t)\equiv t$ в пространстве $CL_2[-1;\ 1]$ (см. **20.11**).

В задачах **20.20—20.35** доказать сформулированные утверждения.

**20.20.** В линейном пространстве с полускалярным произведением для любых двух элементов $x$ и $y$ пространства имеет место равенство

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

(*равенство параллелограмма*).

**20.21.** В линейном пространстве с полускалярным произведением для любых трех элементов $x$, $y$ и $z$ пространства имеет место равенство

$$\|z-x\|^2+\|z-y\|^2=\frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

(*равенство Аполлония*).

**20.22.** В действительном банаховом пространстве можно ввести скалярное произведение $(x, y)$, для которого $\|x\|^2=(x, x)$, тогда и только тогда, когда для любых точек $x$, $y$ этого пространства выполняется равенство

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

**20.23.** В нормированном пространстве $C[a; b]$ (см. 20.54) нельзя ввести скалярное произведение, согласованное с нормой этого пространства в смысле задачи 20.22.

**20.24.** Операции сложения элементов и умножения их на число являются непрерывными в пространстве с полускалярным произведением.

**20.25.** Полускалярное произведение в линейном пространстве $X$ является непрерывной на $X$ функцией.

**20.26.** Если в линейном пространстве $X$ с полускалярным произведением задан сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n=x$, $x_n \in X$, то для всякого элемента $a \in X$ числовой ряд, получающийся из данного почленным умножением его на $a$, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, a)=(x, a).$$

**20.27.** Если в пространстве $RL_2(a; b]$ (см. 20.10) сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ и его сумма равна $x(t)$, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(t)=x(t)$, то для любой функции $\varphi(t) \in RL_2[a; b]$ имеет место равенство

$$\int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b x_n(t)\varphi(t)\,dt,$$

в частности

$$\int_a^b x(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b x_n(t)\,dt,$$

т. е. заданный ряд можно почленно интегрировать.

**20.28.** Все $n$-мерные линейные пространства со скалярным произведением изоморфны между собой.

**20.29.** Всякое $n$-мерное линейное пространство со скалярным произведнием полно в смысле метрики, порожденной скалярным произведением.

**20.30.** Всякое линейное пространство со скалярным произведением, изоморфное гильбертову пространству, является гильбертовым пространством.

**20.31.** Всякое линейное пространство со скалярным произведением содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве, называемом его *пополнением*.

**20.32.** Все пополнения линейного пространства со скалярным произведением изоморфны между собой.

**20.33.** Множество

$$\left\{x=(x_1;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots)\in l_2 \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} x_n=0\right\}$$

является линейным пространством, плотным в пространстве $l_2$ (см. **20.15**).

**20.34.** Пространство $CL_2[a;\ b]$ (см. **20.11**) не является гильбертовым пространством.

**20.35.** Пространство $CL_2[a;\ b]$ (см. **20.11**) плотно в некотором гильбертовом пространстве (это пространство обозначают $L_2[a;\ b]$).

**20.36.** Будет ли в линейном пространстве $CL_2^1[a;\ b]$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;\ b]$ функций функционал

$$(x,\ y)=\int_a^b (x(t)\,y(t)+x'(t)\,y'(t))\,dt$$

скалярным произведением? Если да, то будет ли получившееся пространство гильбертовым?

**20.37.** Найти угол между функциями $x(t)=\sin t$ и $y(t)=t$ в пространстве 1) $CL_2[0;\ \pi]$ (см. **20.11**), 2) $CL_2^1[0;\ \pi]$ (см. **20.36**).

В задачах **20.38—20.41** доказать сформулированные утверждения.

**20.38.** Имеет место вложение (см. § 19, п. 2) $C[a;\ b]\Subset L_2[a;\ b]$ (см. **20.35**).

**20.39.** Пространство $L_2[a;\ b]$ (см. **20.35**) сепарабельное.

**20.40.** Если

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [x(t)-x_n(t)]^2\,dt=0,$$

то последовательность функций $\{x_n(t)\}$ называют *сходящейся в смысле среднего квадратичного на отрезке* $[a;\ b]$ к функции $x(t)$. Функция $x(t)=1/\sqrt{t}$ не является пределом в смысле среднего квадратичного на отрезке $[0;\ 1]$ последовательности непрерывных функций.

**20.41.** Пространство $l_2$ (см. **20.15**) гильбертово.

---

**2. Ортонормированные базисы. Ряды Фурье.** Элементы $x$ и $y$ линейного пространства с полускалярным произведением называют *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Систему элементов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов), этого пространства называют *ортогональной*, если каждые два ее различных элемента ортогональны. Если, кроме того, норма любого ее элемента равна единице: $\|x_\alpha\| = 1$, $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$, то ее называют *ортонормированной*.

Если $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — ортогональная система в линейном пространстве $X$ со скалярным произведением, $e_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $x \in X$, то числа

$$a_\alpha = \frac{(x, e_\alpha)}{(e_\alpha, e_\alpha)}$$

называют *коэффициентом Фурье* элемента $x$ по данной ортогональной системе.

Если эта система не более чем счетна: $\{e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ называют *рядом Фурье* элемента $x$ по данной системе.

Ортогональную систему $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, называют *замкнутой в линейном пространстве со скалярным произведением*, если в этом пространстве не существует элемента, отличного от нуля и ортогонального к каждому из элементов этой системы.

Если $\mathscr{L}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ — линейная оболочка элементов $e_1$, $e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства $X$ со скалярным произведением, $x \in X$, и $x_0 \in \mathscr{L}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ такой элемент, что

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in \mathscr{L}(e_1; \ldots; e_n)} \|x - y\|,$$

то его называют *элементом наилучшего приближения элемента* $x$ в подпространстве $\mathscr{L}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ пространства $X$, а число

$$E_n(x) = \inf_{y \in \mathscr{L}(e_1; e_2; \ldots; e_n)} \|x - y\| \tag{4}$$

— *наилучшим приближением элемента* $x$ к указанному подпространству.

Пример 2. Доказать, что множество

$$X = \left\{x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}; \ldots; x_m^{(n)}; \ldots\right) \in l_2 \,\middle|\, x_m^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m, \quad x_n^{(n)} = 1 + \frac{1}{n}\right\}$$

является ограниченным замкнутым множеством в пространстве $l_2$ (см. **20.15**), в котором нулевой элемент пространства не имеет элемента наилучшего приближения.

$\triangle$ Скалярное произведение в пространстве $l_2$ задается формулой

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots), \quad y = (y_1; \ldots; y_n; \ldots) \in l_2. \tag{5}$$

Поэтому для точки $x^{(n)} \in X$ имеем

$$\|x^{(n)}\| = \sqrt{(x^{(n)}, x^{(n)})} = 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2. \tag{6}$$

Следовательно, множество $X$ ограничено, $\inf\limits_n \|x^{(n)} - 0\| = 1$ и в множестве $X$ в силу (6) нет элемента с нормой, равной 1. Покажем, что $X$ — замкнутое множество. Пусть $x^{(n_k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(n_k)} = x$. Если $x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots)$, то

$$\left\| x^{(n_k)} - x \right\|^2 = 1 + \frac{1}{n_k} - x_{n_k} + \sum_{n \neq n_k} x_n^2. \tag{7}$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \left\| x^{(n_k)} - x \right\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n \neq n_k} x_n^2 \geqslant 0,$$

то равенство (7) возможно только в случае, когда последовательность номеров $(n_1; \ldots; n_k; \ldots)$ ограничена сверху и, следовательно, последовательность $\left(x^{(n_1)}; \ldots; x^{(n_k)}; \ldots\right)$ содержит стационарную подпоследовательность, все члены которой равны некоторому элементу $x^{(n_0)} \in X$, а тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(n_k)} = x^{(n_0)}$. Это означает, что множество $X$ содержит все свои точки прикосновения, т. е. является замкнутым. ▲

---

В задачах **20.42—20.55** доказать сформулированные утверждения.

**20.42.** Если система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, элементов линейного пространства с полускалярным произведением ортогональна и $\|x_\alpha\| \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, то она линейно независима.

**20.43.** Если элементы $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ линейного пространства с полускалярным произведением таковы, что

$$(x_i, y_i) = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}$$

(такие системы называют *биортогональными*), то каждая из этих систем линейно независима.

**20.44.** Для того чтобы система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства со скалярным произведением была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Грама

$$G(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \ldots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

равнялся нулю.

**20.45.** Если $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — ортонормированная система в линейном пространстве со скалярным произведением, то для любых $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $\beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \neq \beta$, имеет место равенство $\| e_\alpha - e_\beta \| = \sqrt{2}$.

**20.46.** Если линейное пространство со скалярным произведением сепарабельно, то всякая его ортонормированная система не более чем счетная.

**20.47.** Тригонометрическая система функций

$$1, \ \cos t, \ \sin t, \ \ldots, \ \cos nt, \ \sin nt, \ \ldots$$

ортогональна в пространстве $L_2[-\pi; \pi]$ (см. **20.35**), и соответствующая ортонормированная система имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots$$

**20.48.** Многочлены Лежандра $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. **19.28**) являются ортогональной системой в пространстве $L_2[-1; 1]$ (см. **20.35**).

**20.49.** Для любого отрезка $[a; b]$ многочлены Лежандра $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. **19.28**) образуют полную систему в пространстве $L_2[a; b]$ (см. **20.35**).

**20.50.** Система функций $\{e^{int}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, образует полную ортогональную систему в пространстве комплекснозначных непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций со скалярным произведением (см. **20.13**)

$$(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \overline{y(t)} \, dt.$$

**20.51.** Последовательность функций $\sin (2n-1) \frac{t}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует ортогональную систему в пространстве $L_2[0; \pi]$ (см. **20.35**).

**20.52.** Функции $\sin t$, $\sin 3t$, $\sin 5t$, $\sin 7t$, $\sin 9t$ линейно независимы.

**20.53.** Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — ортогональная система в линейном пространстве со скалярным произведением и $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, то $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2$.

**20.54.** Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — ортогональная система в гильбертовом пространстве, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится в этом пространстве тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$.

**20.55.** Если $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — линейно независимая система элементов линейного пространства $X$ со скалярным произведением, то существует такая ортогональная система элементов $y_n$,

$y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, этого пространства, что

$$y_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n, \quad \alpha_{nn} \neq 0$$

(здесь $\alpha_{nk}$ — действительные числа, если рассматриваемое линейное пространство действительное, и комплексные, если оно комплексное). Построение системы $(y_1; \ldots; y_n; \ldots)$ по системе $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ называется *ортогонализацией последней*.

**20.56.** Провести ортогонализацию системы функций $x_0(t) = 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$, $x_3(t) = t^3$ в пространстве:
1) $L_2[-1; 1]$. 2) $L_2[0; 1]$ (см. 20.35).

В задачах **20.57—20.74** доказать сформулированные утверждения.

**20.57.** Если в условиях задачи 20.55 $(z_1; \ldots; z_n; \ldots)$ — ортогональная система и $z_n = \beta_{n1}x_1 + \ldots + \beta_{nn}x_n$, то $y_n$ и $z_n$ отличаются друг от друга скалярным множителем: $z_n = \lambda_n y_n$, $n = 1, 2, \ldots$

**20.58.** В результате ортогонализации (см. 20.55) системы степеней $1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots$ в пространстве $L_2[-1; 1]$ (см. 20.35) получатся многочлены, которые лишь числовыми множителями отличаются от многочленов Лежандра (см. 19.28).

**20.59.** Пусть $e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — конечная ортогональная система элементов линейного пространства $X$ со скалярным произведением, тогда элемент наилучшего приближения элемента $x \in X$ в подпространстве $\mathscr{L}(e_1; \ldots; e_n)$ имеет вид $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, где $a_k$ — коэффициенты Фурье элемента $x$ по системе $\{e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При этом

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2.$$

**20.60.** Элемент $x_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ является элементом наилучшего приближения элемента $x \in X$ в подпространстве $\mathscr{L}(e_1; \ldots; e_n) \subset X$ тогда и только тогда, когда элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам из $\mathscr{L}(e_1; \ldots; e_n)$, что записывается в виде $x - x_0 \perp \mathscr{L}(e_1; \ldots; e_n)$. (Обобщение этой задачи на случай бесконечного множества $\{e_n\}$ см. в задаче 20.91.)

**20.61.** Если $e_n \subset X$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$ и $E_n(x)$ — наилучшее приближение элемента $x$ к пространству $\mathscr{L}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$, то $E_{n+1}(x) \leqslant E_n(x)$.

**20.62.** Если $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, — ортогональная система в линейном пространстве со скалярным произведением $X$, то частичные суммы $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ ряда Фурье элемента $x$

являются элементами его наилучшего приближения в пространстве $\mathscr{L}(e_1; e_2; \ldots; e_n)$.

**20.63.** Если $s_n$ — частичные суммы ряда Фурье элемента $x$ линейного пространства со скалярным произведением $X$ по ортогональной системе $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{\|x - s_n\|\}$ убывает.

**20.64.** Для коэффициентов Фурье $a_n$ элемента $x$ линейного пространства со скалярным произведением $X$ по ортогональной системе $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{8}$$

(*неравенство Бесселя*).

**20.65.** Если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех элементов ортогональной системы $e_n$, $n = 1, 2, \ldots$, линейного пространства со скалярным произведением $X$ выполняются неравенства $\|e_n\| \geqslant c$ (в частности, если эта система ортонормированная), то коэффициенты Фурье каждого элемента $x \in X$ по данной системе стремятся к нулю при $n \to \infty$.

**20.66.** Если пространство $X$ гильбертово, то ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ каждого элемента $x \in X$ по любой ортогональной системе $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в пространстве $X$. Если $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ — сумма этого ряда, то элемент $x - x_0$ ортогонален ко всем элементам системы $(e_1; \ldots; e_n; \ldots)$.

**20.67.** Ряд Фурье элемента $x$ линейного пространства со скалярным произведением $X$ по ортогональной системе $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к этому элементу тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \tag{9}$$

(*равенство Парсеваля*), где $a_n$ — коэффициенты Фурье элемента $x$ по системе $(e_1; \ldots; e_n; \ldots)$.

**20.68.** Ряд Фурье по ортогональной системе каждого элемента линейного пространства со скалярным произведением сходится к самому этому элементу тогда и только тогда, когда данная система является полной.

**20.69.** Для того чтобы ортогональная система была полной в линейном пространстве со скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента пространства выполнялось относительно этой системы равенство Парсеваля (9).

**20.70.** Если ортогональная система полная в линейном пространстве со скалярным произведением, то элемент пространства, у которого все коэффициенты Фурье по этой системе равны нулю, сам равен нулю.

**20.71.** Из равенства всех коэффициентов Фурье у двух элементов линейного пространства со скалярным произведением по полной ортогональной системе следует равенство этих элементов.

**20.72.** Если в линейном пространстве со скалярным произведением $X$ для элемента $x \in X$ существует его представление в виде $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, где $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots,$ — ортогональная система, то это представление единственно и коэффициенты $\lambda_n$ являются коэффициентами Фурье элемента $x$ по системе $(e_1; \ldots; e_n; \ldots)$.

**20.73.** Всякая полная ортогональная система $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, является базисом в линейном пространстве со скалярным произведением.

**20.74.** В гильбертовом пространстве $X$ ортогональная система $e_n \in X$, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, является полной тогда и только тогда, когда она замкнутая.

**20.75.** Привести пример замкнутой системы в некотором линейном пространстве со скалярным произведением, которая не является полной. Существуют ли полные системы, не являющиеся замкнутыми?

В задачах **20.76—20.86** доказать сформулированные утверждения.

**20.76.** Элементы $e_n = \left(x_1^{(n)}; \ \ldots; \ x_m^{(n)}; \ \ldots\right)$, $x_n^{(n)} = 1$, $x_m^{(n)} = 0$ при $m \neq n$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют ортонормированный базис в пространстве $l_2$ (см. **20.15**).

**20.77.** Многочлены Лежандра (см. **19.28**) образуют ортогональный базис в пространстве $L_2[-1; 1]$ (см. **20.35**).

**20.78.** Тригонометрическая система

$$1, \ \cos t, \ \sin t, \ \ldots, \ \cos nt, \ \sin nt, \ \ldots$$

образует ортогональный базис в пространстве $L_2[-\pi; \pi]$ (см. **20.35**).

**20.79.** Функции

$$\frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} e^{2\pi i n (t-\alpha)/(\beta-\alpha)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[\alpha; \beta]$, $\alpha < \beta$ (см. **20.35**).

**20.80.** Функции $\sqrt{2/\pi} \sin nt$, $n = 1, 2, \ldots$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2[0; \pi]$, а в пространстве $L_2[-\pi; \pi]$ (см. **20.35**) являются ортогональной системой, но не базисом.

**20.81.** Функции

$$1, \ \sin\frac{2\pi n(t-a)}{b-a}, \quad \cos\frac{2\pi n(t-a)}{b-a}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

ортогональны в пространстве $CL_2^1[a; b]$ (см. **20.36**).

**20.82.** Каждая функция $x \in RL_2[-\pi; \pi]$ (см. **20.10**) раскладывается в ряд Фурье по тригонометрической системе функций, сходящийся в смысле среднего квадратичного (см. **20.40**):

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt);$$

причем имеет место *равенство Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\|x\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{10}$$

**20.83.** Если у функции $x \in RL_2[-\pi; \pi]$ (см. **20.10**) все ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе равны нулю, то она эквивалентна нулю (см. **19.88**).

**20.84.** Во всяком сепарабельном линейном пространстве со скалярным произведением существует ортонормированный базис.

**20.85.** Пространство $l_2$ (см. **20.15**) сепарабельно.

**20.86.** Все сепарабельные бесконечномерные пространства изоморфны между собой.

---

**3. Ортогональные разложения гильбертовых пространств в прямую сумму. Функционалы гильбертовых пространств.** Подмножество линейного пространства $X$ со скалярным произведением называют его *замкнутым подпространством*, если оно является подпространством $X$ как линейного пространства и, кроме того, является замкнутым подмножеством.

Пространство $X$ называют *прямой суммой* его замкнутых подпространств $Y$ и $Z$ и пишут $X = Y \oplus Z$, если $X = Y + Z$ (см. § 19, п. 1) и каждый элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде $x = y + z$.

Для всякого множества $E \subset X$ множество

$$E^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid (x, y) = 0, \quad \forall y \in E\}$$

называют *ортогональным дополнением* множества $E$.

Пример 3. Доказать, что если $Y$ — замкнутое подпространство линейного пространства $X$ со скалярным произведением, то его ортогональное дополнение $Y^{\perp}$ также является замкнутым подпространством пространства $X$.

△ Если $z_1 \in Y^{\perp}$, $z_2 \in Y^{\perp}$, то для любых чисел $\lambda_1$, $\lambda_2$ и любого $y \in Y$ имеем

$$(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \ y) = \lambda_1 (z_1, \ y) + \lambda_2 (z_2, \ y) = 0,$$

поэтому $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in Y^\perp$. Замкнутость множества $Y^\perp$ следует из непрерывности скалярного произведения (см. 20.25): если $z_n \in Y^\perp$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, то для каждого $y \in Y$ будем иметь

$$(z, y) = (\lim_{n\to\infty} z_n, y) = \lim_{n\to\infty} (z_n, y) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0,$$

т. е. $z \in Y^\perp$. ▲

Пример 4. Доказать, что если

$$Y_m = \left\{ y = (y_1; \ldots; y_n; \ldots) \in l_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} y_k = 0 \right\},$$

$$Z_m = \{z = (z_1; \ldots; z_n; \ldots) \in l_2 \mid z_n = 0, \quad \forall n > 1\}, \qquad (11)$$

то при любом $m$

$$l_2 = Y_m \oplus Z_m, \quad m = 1, 2, \ldots \qquad (12)$$

Будет ли множество $Z_m$ ортогональным дополнением подпространства $Y_m$ в пространстве $l_2$?

△ Если $x = (x_1; \ldots; x_n; \ldots) \in l_2$, $y = (y_1; \ldots; y_n; \ldots) \in Y_m$, $z = (z_1; \ldots; z_n; \ldots) \in Z_m$ и имеет место формула (12), то для всех $n$ $x_n = y_n + z_n$. Из этой системы следует, что для всех $n > 1$

$$x_n = y_n. \qquad (13)$$

Для того чтобы выразить $y_1$ и $z_1$ через $x$, воспользуемся соотношениями

$$y_1 + \ldots + y_m = 0, \quad x_1 = y_1 + z_1.$$

Из них с помощью (13) получим

$$y_1 = -x_2 - \ldots - x_m, \quad z_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m.$$

Таким образом, $l_2 = Y_m + Z_m$ и представление элемента $x \in l_2$ в виде $x = y + z$, где $y \in Y_m$, $z \in Z_m$, единственно, т. е. имеет место формула (12). Подпространство $Z_m$ не является ортогональным дополнением подпространства $Y_m$ ни при каком $m > 1$, так как

$$y = (\alpha; -\alpha; 0; 0; \ldots; 0; \ldots) \in Y_m, \ z = (\alpha; 0; 0; \ldots; 0; \ldots) \in Z_m,$$

$m = 2, 3, \ldots$, но $(y, z) = \alpha^2 \neq 0$ при $\alpha \neq 0$. ▲

В дальнейшем в этом параграфе под пространством всегда понимается линейное пространство со скалярным произведением.

---

В задачах **20.87—20.97** доказать сформулированные утверждения.

**20.87.** Если подпространство $Z$ пространства $X$ является ортогональным дополнением подпространства $Y$ того же пространства, то и $Y$ является ортогональным дополнением подпространства $Z$.

**20.88.** Если множества $Y$ и $Z$ являются замкнутыми подпространствами пространства $X$, то и их сумма (см. § 19, п. 1) $Y+Z$ является замкнутым подпространством пространства $X$.

**20.89.** Для того чтобы подпространство $Y$ пространства $X$ было плотно в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы из условия $x \perp Y$ (т. е. $(x, y)=0$ для всех $y \in Y$) следовало, что $x=0$.

**20.90.** Если $Y$ — замкнутое подпространство гильбертова пространства $X$ и $x_0 \in X$, то существует единственный элемент $y_0 \in Y$ такой, что

$$\| x_0 - y_0 \| = \inf_{y \in Y} \| x_0 - y \|$$

(элемент $y_0$ называют *ортогональной проекцией* элемента $x_0$ в пространство $Y$).

**20.91.** Для того чтобы элемент $y_0$ был ортогональной проекцией элемента $x_0$ гильбертова пространства $X$ в его замкнутое подпространство $Y$ (см. **20.90**), необходимо и достаточно, чтобы для всех $y \in Y$ выполнялось условие $(x_0 - y_0, y) = 0$.

**20.92.** Если $Y^\perp$ — ортогональное дополнение замкнутого подпространства $Y$ гильбертова пространства $Z$, то

$$X = Y \oplus Y^\perp,$$

причем, если $x_0 = y_0 + z_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Y^\perp$, то

$$\inf_{y \in Y} \| x_0 - y \| = \| x - z_0 \| = \| y_0 \|.$$

**20.93.** Для того чтобы элемент $x$ пространства $X$ был ортогонален подпространству $Y \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in Y$ выполнялось неравенство $\|x\| \leqslant \|x-y\|$.

**20.94.** Для любого подмножества $E$ пространства $X$ множество $E^\perp$ является замкнутым подпространством $X$.

**20.95.** Если $E$ — подмножество пространства $X$ со скалярным произведением, то имеет место включение $E \subset (E^\perp)^\perp$. Возможно ли здесь строгое включение?

**20.96.** Для подмножества $E$ пространства $X$ равенство $(E^\perp)^\perp = E$ выполняется тогда и только тогда, когда подмножество $E$ является замкнутым подпространством пространства $X$.

**20.97.** Если $E_1 \subset E_2 \subset X$, то $E_1^\perp \supset E_2^\perp$.

**20.98.** Если $X$ — гильбертово пространство и $X = Y \oplus Z$, то следует ли отсюда, что $Z = Y^\perp$? А в случае конечномерного пространства?

В задачах **20.99—20.105** доказать сформулированные утверждения.

**20.99.** Если

$$Y = \{x \in CL_2[-1;\ 1] \mid x(t) = 0 \text{ для всех } t \in [0;\ 1]\}$$

(см. **20.14**), то $Y$ — подпространство пространства $CL_2[-1;\ 1]$. Описать пространство $Y^{\perp}$. Будет ли справедливо разложение $CL_2[-1;\ 1] = Y \oplus Y^{\perp}$?

**20.100.** Множество

$$Y = \left\{ x(t) \in CL_2^1[a;\ b] \,\middle|\, \int_a^b x(t)\,dt = 0 \right\}$$

является подпространством пространства $CL_2^1[a;\ b]$ (см. **20.36**). Найти $Y^{\perp}$.

**20.101.** Если

$$Y = \{x = \{x_n\} \in l_2 \,|\, x = (x_1;\ 0;\ x_3;\ 0;\ x_5;\ 0;\ \ldots\},$$

$$Z = \{x = \{x_n\} \in l_2 \,|\, x = (x_1;\ x_1;\ x_3;\ x_3/3;\ x_5;\ x_5/5;\ \ldots\},$$

то $\overline{Y + Z} = l_2$, но $Y + Z \neq l_2$, и поэтому $Y + Z$ не является замкнутым подпространством пространства $l_2$.

**20.102.** Для всякого линейного ограниченного функционала $f$ действительного (комплексного) гильбертова пространства $X$ существует и притом единственный элемент $a \in X$ такой, что для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = (x,\ a)$, причем $\|f\| = \|a\|$.

**20.103.** Если $A$ — линейный ограниченный оператор в линейном пространстве $X$ со скалярным произведением, то

$$\|A\| = \sup_{\substack{x,\ y \in X \\ x \neq 0,\ y \neq 0}} \frac{|(Ax,\ y)|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

**20.104.** Если $A$ — линейный ограниченный оператор в линейном пространстве $X$ со скалярным произведением, то функция $f(x;\ y) = (Ax,\ y)$ является билинейным функционалом и $\|f\| = \|A\|$.

**20.105.** Для всякого ограниченного билинейного функционала $f$ в гильбертовом пространстве $X$ существует единственный линейный ограниченный оператор $A$ такой, что $f(x;\ y) = (Ax,\ y)$, для всех $x \in X$, $y \in X$.

## § 21. Топологические пространства. Обобщенные функции

**1. Топологические пространства.** Множество $X$ называют *топологическим пространством*, если в нем задана система $\Omega = \{G\}$ его подмножеств, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Пересечение любой конечной совокупности множеств системы принадлежит этой системе.

2) Объединение любой совокупности множеств системы принадлежит этой системе.

3) $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

Систему $\Omega$ называют *топологией топологического пространства* $X$, а множества системы $\Omega$ — его *открытыми множествами*.

Для каждой точки $x \in X$ всякое содержащее ее множество $G \in \Omega$ называют ее *окрестностью*.

Если у любых двух точек топологического пространства существуют непересекающиеся окрестности, то пространство называют *хаусдорфовым* или *отделимым*.

Множества, дополнительные к открытым, называют *замкнутыми*.

Всякую подсистему $\mathfrak{B}$ системы $\Omega$ открытых множеств топологического пространства называют его *базой топологии*, если любое открытое множество пространства является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathfrak{B}$.

Систему $\mathfrak{B}(x)$ окрестностей точки $x$ топологического пространства $X$ называют *локальной базой топологии в этой точке*, если, какова бы ни была окрестность $V$ точки $x$ в пространстве $X$, существует такая окрестность $U \in \mathfrak{B}(x)$, что $U \subset V$.

Точку $x \in X$ называют *точкой прикосновения* множества $E \subset X$, если любая окрестность точки $x$ содержит точки множества $E$.

Точку $x \in X$ называют *предельной точкой* множества $E \subset X$, если любая окрестность точки $x$ содержит по крайней мере одну точку множества $E$, отличную от $x$.

Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset X$ называют его *замыканием* $\bar{E}$.

Множество $E$ называют *плотным* в пространстве $X$, если $\bar{E} = X$.

Последовательность точек $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называют *сходящейся* в пространстве $X$, если существует такая точка $x \in X$, что для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер $n_0$, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x)$. В этом случае точку $x$ называют *пределом последовательности* $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. В следующем пункте будет дано обобщение понятия предела последовательности точек топологического пространства.

---

В задачах **21.1—21.13** доказать утверждения.

**21.1.** Метрическое пространство является хаусдорфовым топологическим пространством, если под его топологией понимать совокупность всех его открытых множеств, определяемых с помощью метрики.

**21.2.** Если $\mathfrak{B}$ — база топологии $\Omega$ топологического пространства $X$ и $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_1 \subset \Omega$, то $\mathfrak{B}_1$ также является базой топологии этого пространства.

**21.3.** Если $X$ — топологическое пространство с топологией $\Omega = \{G\}$ и $E \subset X$, то множество $E$ является топлогическим пространством с топологией $\Omega_E = \{G \cap E\}$, $G \in \Omega$. Топологию $\Omega_E$ называют *топологией, индуцированной топологией* $\Omega$ пространства $X$ на его подмножестве $E$.

**21.4.** В метрическом пространстве базой его топологии (см. **21.1**) является совокупность всевозможных $\varepsilon$-окрестностей всех его точек.

**21.5.** В метрическом пространстве базой его топологии (см. **21.1**) является совокупность всевозможных $\varepsilon$-окрестностей всех его точек, где $\varepsilon$ — рациональное число.

**21.6.** В сепарабельном метрическом пространстве существует счетная база его топологии (см. **21.1**).

**21.7.** Для любой точки метрического пространства ее локальную базу топологии образуют все $\varepsilon$-окрестности этой точки, где $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$

**21.8.** Объединение локальных баз топологии всех точек топологического пространства образует базу топологии этого пространства.

**21.9.** Объединение двух топологий одного и того же множества может не быть его топологией.

**21.10.** Объединение конечной совокупности и пересечение любой совокупности замкнутых множеств является замкнутым множеством.

**21.11.** Замыкание любого множества в топологическом пространстве является замкнутым множеством.

**21.12.** Замыкание любого множества в топологическом пространстве содержится в каждом замкнутом множестве, содержащем данное множество, т. е. замыкание множества является минимальным содержащим его замкнутым множеством.

**21.13.** В хаусдорфовом топологическом пространстве каждая точка является замкнутым множеством.

**21.14.** Привести пример неотделимого топологического пространства, в котором каждая точка является замкнутым множеством.

**21.15.** Доказать, что если $X$ — бесконечное множество и топология на $X$ состоит из дополнений ко всем конечным подмножествам множества $X$, то любое бесконечное множество плотно в $X$.

**21.16.** Доказать, что в хаусдорфовом топологическом пространстве последовательность точек может иметь только один предел.

**21.17.** Пусть $X$ — множество всех функций $x$: $[0;\ 1] \to \mathbb{R}$. Окрестности точки $x_0 \in X$ определим следующим образом: зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и выберем какое-либо конечное множество точек $t_k \in [0;\ 1]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Окрестность $U(x_0;\ \varepsilon;\ t_1;\ t_2;\ \ldots;\ t_k)$ точки $x_0$ определим как совокупность всех таких функций $x \in X$, что для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняется неравенство

$$|x(t_k) - x_0(t_k)| < \varepsilon.$$

Получившееся топологическое пространство (см. **21.4**) обозначим $M[0;\ 1]$. Для того чтобы в этом пространстве $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $t \in [0;\ 1]$ имело бы место равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$$

(иначе говоря, сходимость последовательности функций в построенном пространстве $M[0;\ 1]$ означает поточечную сходимость этой последовательности).

**21.18.** Доказать, что если $X$ — топологическое пространство, $E \subset X$, $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, и $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $x_0 \in \bar{E}$.

**21.19.** Привести пример топологического пространства, его подмножества $E$ и точки $x_0 \in \bar{E}$, для которых не существует такой последовательности $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

**21.20.** Доказать, что в топологическом пространстве $M[0;\ 1]$ (см. **21.17**) плотно множество непрерывных функций $x$: $[0;\ 1] \to \mathbb{R}$.

**21.21.** Доказать, что в топологическом пространстве $M[0;\ 1]$ (см. **21.17**) не всякая функция из этого пространства является в нем пределом последовательности непрерывных функций.

**21.22.** Описать все сходящиеся последовательности топологического пространства, точками которого являются действительные числа, а база топологии состоит из следующих множеств:

1) всех одноточечных множеств (дискретная топология),
2) всех интервалов,
3) всех полуинтервалов, открытых слева,
4) всех открытых полупрямых $(t;\ +\infty)$,
5) всех замкнутых полупрямых $[t;\ +\infty)$,
6) всех полуинтервалов вида $[n;\ n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

---

**2. Фильтры. Предел по фильтру.** Пусть задано множество $X$; через $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(X)$ будем всегда обозначать множество всех его подмножеств.

Если $X$ — непустое множество, то множество $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{P}(X)$ называют *фильтром* или, подробнее, *фильтром на множестве* $X$, если

1) Для любых $A' \in \mathfrak{f}$ и $A'' \in \mathfrak{f}$ существует такое $A \in \mathfrak{f}$, что $A \subset A' \cap A''$.

2) $\varnothing \notin \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f} \neq \varnothing$.

Фильтр $\mathfrak{f}_1 = \{A\}$ на множестве $X$ называют *фильтром, который сильнее фильтра* $\mathfrak{f}_2 = \{B\}$ на том же множестве $X$, если для любого множества $B \in \mathfrak{f}_2$ существует такое $A \in \mathfrak{f}_1$, что $A \subset B$.

Если фильтр $\mathfrak{f}_1$ сильнее фильтра $\mathfrak{f}_2$, а фильтр $\mathfrak{f}_2$ сильнее $\mathfrak{f}_1$, то фильтры $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ называют *эквивалентными*.

Фильтр $\mathfrak{f}_1$ называют *подфильтром* фильтра $\mathfrak{f}_2$, если каждый элемент фильтра $\mathfrak{f}_1$ является и элементом фильтра $\mathfrak{f}_2$, т. е. если $\mathfrak{f}_1 \subset \mathfrak{f}_2$.

Каждый подфильтр фильтра, эквивалентный самому фильтру, называют его *базой*.

Фильтр $\mathfrak{f}$ на множестве $X$ называют *полным*, если из условий $A \in \mathfrak{f}$ и $A \subset B \subset X$ следует, что $B \in \mathfrak{f}$.

Пример 1. Доказать, что если $X$ и $Y$ — некоторые множества, $f$: $X \to Y$ — отображение $X$ в $Y$ и $\mathfrak{f} = \{A\}$ — фильтр на множестве $X$, то совокупность всех образов $f(A)$ множеств $A$ фильтра $\mathfrak{f}$ является фильтром на множестве $Y$.

$\triangle$ Обозначим $f(\mathfrak{f})$ множество всех множеств вида $f(A)$, где $A \in \mathfrak{f}$. Пусть $B_1 \in f(\mathfrak{f})$ и $B_2 \in f(\mathfrak{f})$, тогда существуют такие $A_1 \in \mathfrak{f}$ и $A_2 \in \mathfrak{f}$, что $B_1 = f(A_1)$, $B_2 = f(A_2)$. Из определения фильтра следует, что существует такое $A \in \mathfrak{f}$, что $A \subset A_1 \cap A_2$, а тогда $f(A) \subset f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2) = B_1 \cap B_2$ и $B = f(A) \in f(\mathfrak{f})$. Таким образом, первое условие определения фильтра выполнено. Далее, если $B \in f(\mathfrak{f})$, т. е. $B = f(A)$, $A \in \mathfrak{f}$, и поскольку $A \neq \varnothing$, то и $B \neq \varnothing$. Наконец, из того, что $\mathfrak{f} \neq \varnothing$, следует, что $f(\mathfrak{f}) \neq \varnothing$. $\blacktriangle$

Фильтр $f(\mathfrak{f})$ называют *образом фильтра* $\mathfrak{f}$ при отображении $f$.

Если $X$ — топологическое пространство, $x \in X$ и $\mathfrak{f}$ — фильтр на $X$, то точку $x$ называют *пределом фильтра* $\mathfrak{f}$ или его *предельной точкой*, если фильтр $\mathfrak{f}$ сильнее фильтра $\mathfrak{B}(x)$, являющегося локальной базой топологии в этой точке.

Если точка $x$ является пределом фильтра $\mathfrak{f}$, то пишут $x = \lim \mathfrak{f}$.

Если $f$: $X \to Y$ — отображение некоторого множества $X$ в топологическое пространство $Y$ и $\mathfrak{f}$ — фильтр на $X$, то точку $b \in Y$ называют *пределом отображения* $f$ *по фильтру* $\mathfrak{f}$ и пишут $\lim_{\mathfrak{f}} f(x) = b$, если фильтр $f(\mathfrak{f})$ имеет своим пределом в пространстве $Y$ точку $b$:

$$b = \lim_{\mathfrak{f}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim f(\mathfrak{f}). \tag{1}$$

Если $X$ и $Y$ — топологические пространства, $f$: $X \to Y$, $x_0 \in X$ и $\mathfrak{f}$ — такой фильтр на $X$, что $\lim \mathfrak{f} = x_0$, то предел $\lim_{\mathfrak{f}} f(x)$ называют *пределом отображения по фильтру* $\mathfrak{f}$ в точке $x_0$. В этом случае вместо $\lim_{\mathfrak{f}} f(x)$ пишут также $\lim\limits_{\substack{\mathfrak{f} \\ x \to x_0}} f(x)$.

Фильтр в метрическом пространстве называют *фильтром Коши*, если он содержит сколь угодно малые по диаметру множества.

---

**21.23.** Доказать, что пересечение любой конечной совокупности множеств, принадлежащих некоторому фильтру, не пусто.

Проверить, что множества, перечисленные в задачах **21.24**—**21.27**, образуют фильтры.

**21.24.** $\varepsilon$-окрестности $(x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ заданной точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

**21.25.** Проколотые $\varepsilon$-окрестности $(x_0 - \varepsilon;\ x_0) \cup (x_0;\ x_0 + \varepsilon)$ на числовой прямой заданной точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

**21.26.** Интервалы вида $(1;\ \beta)$, $\beta > 1$.

**21.27.** Подмножества $A_n = \{n + 1;\ n + 2;\ \ldots\}$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ (этот фильтр называют *натуральным фильтром* и обозначают $F_{\mathbb{N}}$).

Проверить, что множества, перечисленные в задачах **21.28**—**21.30**, образуют полные фильтры ($X$ — заданное множество).

**21.28.** $\mathfrak{f} = \{A \mid x \in A \subset X\}$, где $x$ — фиксированный элемент множества $X$.

**21.29.** $\mathfrak{f} = \{B \mid A \subset B \subset X\}$, где $A$ — фиксированное подмножество множества $X$.

**21.30.** Дополнения в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ до всевозможных конечных подмножеств (этот фильтр называют *фильтром Фреше* и обозначают $\mathfrak{f}_{\mathbb{N}}$).

В задачах **21.31**—**21.44** доказать сформулированные утверждения.

**21.31.** Фильтры в задачах **21.24**—**21.27** не являются полными.

**21.32.** Локальная база топологии любой точки топологического пространства является фильтром.

**21.33.** Если $X$ — топологическое пространство, $x$ — его предельная точка, $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии в этой точке, а $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ — множество всех проколотых окрестностей $\mathring{U}(x)$ этой базы: $\mathring{U}(x) = U(x) \setminus \{x\}$, $U(x) \in \mathfrak{B}(x)$, то $\mathring{\mathfrak{B}}(x)$ образует фильтр.

**21.34.** Фильтры в задачах **21.27** и **21.30** эквивалентны.

**21.35.** Если $\mathfrak{B}(x)$ — локальная база топологии точки $x$ метрического пространства, состоящая из всех ее $\varepsilon$-окрестностей, а $\mathfrak{B}_0(x)$ — ее локальная база топологии, состоящая только из $\varepsilon$-окрестностей радиуса $\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, то фильтры $\mathfrak{B}(x)$ и $\mathfrak{B}_0(x)$ эквивалентны, причем фильтр $\mathfrak{B}_0(x)$ является базой фильтра $\mathfrak{B}(x)$.

**21.36.** Натуральный фильтр $F_{\mathbb{N}}$ (см. **21.27**) является базой фильтра Фреше (см. **21.30**).

**21.37.** Всякий фильтр является базой некоторого полного фильтра.

**21.38.** Если $\mathfrak{f}_1$ — фильтр на множестве $X_1$, $\mathfrak{f}_2$ — фильтр на множестве $X_2$ и $\mathfrak{f} = \{C = A \times B \mid A \in \mathfrak{f}_1, B \in \mathfrak{f}_2\}$, то $\mathfrak{f}$ является фильтром на произведении $X_1 \times X_2$ множеств $X_1$ и $X_2$. (Фильтр $\mathfrak{f}$ называют *произведением фильтров* $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ и пишут $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$.)

**21.39.** Если $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел с дискретной топологией (каждая точка является открытым множеством), то натуральный фильтр $F_{\mathbb{N}}$ (см. **21.27**) не имеет предела в $\mathbb{N}$.

**21.40.** Если $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ и локальная база топологии $\mathfrak{B}(+\infty)$ состоит из всевозможных множеств $A_n$, введенных в задаче **21.27**, а локальная база $\mathfrak{B}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, состоит из одной точки $n$, то натуральный фильтр $F_{\mathbb{N}}$ имеет предел: $\lim F_{\mathbb{N}} = +\infty$.

**21.41.** Для того чтобы любой фильтр топологического пространства имел не более одного предела, необходимо и достаточно, чтобы пространство было хаусдорфовым.

**21.42.** Для того чтобы точка $x$ топологического пространства являлась пределом некоторого фильтра этого пространства, необходимо, чтобы эта точка являлась пределом каждой базы фильтра, и достаточно, чтобы она являлась пределом по крайней мере одной его базы.

**21.43.** Если $X=\mathbb{N}$, $Y$ — топологическое пространство, $F_{\mathbb{N}}$ — натуральный фильтр (см. 21.27), то предел $\lim_{F_{\mathbb{N}}} f(n)$ отображения $f(n)=y_n \in Y$ совпадает с пределом последовательности $(y_1; \ldots; y_n; \ldots)$ в пространстве $Y$.

**21.44.** Если $X=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $Y$ — топологическое пространство, $F_{\mathbb{N}}$ — натуральный фильтр (см. **21.27**), $\mathfrak{f}=F_{\mathbb{N}}\times F_{\mathbb{N}}$ (см. **21.38**), $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to Y$, $f(m;\ n)=y_{mn}$, то предел $\lim_{\mathfrak{f}} f(m;\ n)$ совпадает с пределом двойной последовательности $\lim\limits_{(m,\ n)\to\infty} y_{mn}$ в пространстве $Y$.

**21.45.** Построить множество $X$, отображение $f\colon X\to\mathbb{R}$ и фильтр $\mathfrak{f}$ на множестве $X$ так, чтобы предел интегральных сумм Римана функции $\varphi\colon E\to\mathbb{R}$ на заданном измеримом по Жордану множестве $E\subset\mathbb{R}^n$ $\left(\text{т. е. интеграл } \int\limits_E \varphi(t)\,dt\right)$ совпадал с пределом отображения $f\colon X\to\mathbb{R}$ по фильтру $\mathfrak{f}$.

В задачах **21.46—21.51** доказать сформулированные утверждения.

**21.46.** Если $X$ и $Y$ — топологические пространства, $f\colon X\to Y$, $x_0\in X$ и фильтр $\mathfrak{f}$ состоит из окрестностей некоторой локальной базы топологии $\mathfrak{B}(x_0)$ точки $x_0$, то существование предела $\lim_{\mathfrak{f}} f(x)$ равносильно непрерывности отображения $f$ в точке $x_0$, причем $\lim_{\mathfrak{f}} f(x)=f(x_0)$.

**21.47.** Если $X$ и $Y$ — топологические пространства, $f\colon X\to Y$, $x_0\in X$ и фильтр $\mathfrak{f}$ состоит из проколотых окрестностей некоторой локальной базы топологии точки $x_0$, то существование предела $\lim_{\mathfrak{f}} f(x)$ равносильно существованию предела отображения $f$ по множеству $X\setminus\{x_0\}$, причем

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X\setminus\{x_0\}}} f(x)=\lim\nolimits_{\mathfrak{f}} f(x).$$

**21.48.** Если $X$ — произвольное множество, $\mathfrak{f}$ — фильтр в $X$, $Y$ — линейное пространство, $f\colon X\to Y$, $g\colon X\to Y$, отображения $f$ и $g$ имеют предел по фильтру $\mathfrak{f}$, $\lambda$ и $\mu$ — числа, то отображение $\lambda f+\mu g$ также имеет предел по фильтру $\mathfrak{f}$ и

$$\lim\nolimits_{\mathfrak{f}}(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda\lim\nolimits_{\mathfrak{f}} f(x)+\mu\lim\nolimits_{\mathfrak{f}} g(x).$$

**21.49.** Всякий фильтр в метрическом пространстве, который сильнее некоторой локальной базы топологии точки этого пространства, является фильтром Коши.

**21.50.** Для того чтобы отображение $f\colon X\to Y$ произвольного множества $X$ в полное метрическое пространство $Y$ имело предел по некоторому фильтру $\mathfrak{f}$ множества $X$, необходимо и достаточно, чтобы образ $f(\mathfrak{f})$ фильтра $\mathfrak{f}$ при отображении $f$ был фильтром Коши в пространстве $Y$.

**21.51.** Пусть $X$ и $Y$ — произвольные множества, $Z$ — топологическое пространство, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $\mathfrak{f}_X$ и $\mathfrak{f}_Y$ — фильтры соответственно в пространствах $X$ и $Y$, причем фильтр $f(\mathfrak{f}_X)$ сильнее фильтра $\mathfrak{f}_Y$. Тогда, если отображение $g$ имеет предел по фильтру $\mathfrak{f}_Y$, композиция $gf$ имеет предел по фильтру $\mathfrak{f}_X$ и

$$\lim_{\mathfrak{f}_X} g(f(x)) = \lim_{\mathfrak{f}_Y} g(y).$$

---

**3. Обобщенные функции.** *Пространством основных функций* $D$ называют множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *) со следующим определением сходимости последовательностей: последовательность $\varphi_n \in D$ называют *сходящейся к функции* $\varphi \in D$, если существует такой отрезок $[a;\ b]$, что $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [a;\ b]$, $n = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [a;\ b]$ и на этом отрезке последовательность функций $\varphi_n$ и последовательности всех их производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходятся соответственно к функции $\varphi$ и к ее производным $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в $D$.

Функции, заданные на пространстве основных функций, называют обычно *функционалами* и вместо $f(\varphi)$ пишут $(f;\ \varphi)$.

Функционал $f\colon D \to \mathbb{R}$ называют *линейным*, если для любых $\varphi \in D$, $\psi \in D$ и любых $\lambda$, $\mu \in \mathbb{C}$ выполняется условие

$$(f;\ \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f;\ \varphi) + \mu(f;\ \psi).$$

Функционал $f\colon D \to \mathbb{C}$ называют *непрерывным*, если из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в $D$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (f;\ \varphi_n) = (f;\ \varphi)$.

Всякий линейный непрерывный функционал $f$, заданный на пространстве основных функций $D$, называют *обобщенной функцией* (на $D$), и их совокупность обозначают $D'$.

Функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называют *локально интегрируемой*, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.

Пример 2. Доказать, что если $f$ — локально интегрируемая функция, то функционал

$$(f;\ \varphi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

является обобщенной функцией на $D$.

$\triangle$ Прежде всего определение (2) имеет смысл для любой функции $\varphi \in D$: если $\varphi \in D$, то существует отрезок $[a;\ b] \supset \operatorname{supp} \varphi$, причем функция $\varphi$, будучи непрерывной, ограничена на $[a;\ b]$, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a;\ b]$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \leqslant c$. Поэтому на

---

*) Напомним, что функцию $\varphi$ называют *финитной*, если ее носителем $\operatorname{supp} \varphi$ является компакт (см. **18.113**).

$[a;\ b]$ верно неравенство $|f(x)\varphi(x)| \leqslant c\,|f(x)|$, а значит $\int\limits_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx$ сходится. Вне $[a;\ b]$ имеем $|f(x)\varphi(x)| = 0$, поэтому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ совпадает с $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Следовательно, он абсолютно, а потому и просто сходится. Линейность функционала (2) следует из линейности интеграла. Докажем непрерывность этого функционала. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в $D$. Тогда существует такой отрезок $[a;\ b]$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеют место включения $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a;\ b]$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [a;\ b]$. Следовательно, в силу равномерной сходимости $\varphi_n \underset{[a;\ b]}{\rightrightarrows} \varphi$ имеем

$$|(f;\ \varphi) - (f;\ \varphi_n)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_n(x)|\,dx \leqslant \sup_{[a;\ b]} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangle$$

Обобщенную функцию (2) называют *обобщенной функцией, порожденной локально интегрируемой функцией* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Другим примером обобщенной функции является $\delta$-функция $\delta(x)$:

$$(\delta;\ \varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi(0), \quad \varphi \in D. \tag{3}$$

*Сдвинутой $\delta$-функцией* $\delta(x - x_0)$ называют обобщенную функцию, ставящую в соответствие каждой основной функции $\varphi$ число $\varphi(x_0)$.

Можно показать (см. **21.58**), что $\delta$-функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией.

Последовательность обобщенных функций $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, называют *сходящейся к обобщенной функции* $f \in D'$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} (f_n;\ \varphi) = (f;\ \varphi).$$

*Производной обобщенной функции* $f$ называют функционал на $D$, обозначаемый $f'$ и определяемый равенством

$$(f';\ \varphi) = -(f;\ \varphi'), \quad \varphi \in D. \tag{4}$$

Производные порядка $n = 2, 3, \ldots$ определяют по формуле

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'. \tag{5}$$

Из этих определений следует, что

$$\left(f^{(n)};\ \varphi\right) = (-1)^n \left(f;\ \varphi^{(n)}\right), \quad \varphi \in D, \quad f^{(0)} = f, \ n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Для любой обобщенной функции из $D'$ любая ее производная также обобщенная функция из $D'$ (см. **21.68** и **21.69**).

Таким образом, обобщенные функции имеют производные любого порядка.

Пример 3. Найти производную *функции Хевисайда*

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x<0.\end{cases} \tag{7}$$

$\triangle$ Функция $\theta(x)$ локально интегрируема и потому может рассматриваться как обобщенная функция (см. пример 2). Поэтому

$$(\theta';\ \varphi)\underset{(4)}{=}-(\theta;\ \varphi')=-\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\varphi'(x)\,dx=$$

$$=-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0)=(\delta;\ \varphi),\quad \varphi\in D,$$

т. е. $\theta'=\delta$. $\blacktriangle$

---

В задачах 21.52—21.59 доказать сформулированные утверждения.

**21.52.** Если $\varphi\in D$, то при любом $k=1, 2, \ldots$ $\varphi^{(k)}\in D$.

**21.53.** Если $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$ в $D$, то при любом $k=1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(k)}=\varphi^{(k)} \text{ в } D.$$

**21.54.** Функция

$$\varphi_a(x)=\begin{cases}e^{-a^2/(a^2-x^2)}, & \text{если } |x|<a,\\ 0, & \text{если } |x|\geqslant a,\end{cases}$$

принадлежит $D$.

**21.55.** Для функции $\varphi\in D$ существует функция $\psi\in D$ такая, что $\varphi=\psi'$, тогда и только тогда, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=0$.

**21.56.** Две непрерывные на числовой оси функции различны тогда и только тогда, когда различны порожденные ими обобщенные функции.

**21.57.** Функционал

$$V.\,P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad \varphi\in D,$$

является обобщенной функцией $\left(\text{она обычно обозначается } \mathscr{P}\dfrac{1}{x}\right)$.

**21.58.** $\delta$-функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией.

**21.59.** $\delta$-функция является пределом в $D'$ последовательности обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями.

**21.60.** Существуют ли в пространстве $D'$ пределы $\lim_{n\to\infty} \cos nx$, $\lim_{n\to\infty} \sin nx$? Если они существуют, то чему равны?

В задачах **21.61—21.70** доказать сформулированные утверждения.

**21.61.** Если $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, и для любой функции $\varphi \in \in D$ существует предел числовой последовательности $(f_n; \varphi)$, то функционал $F$, определяемый равенством $(F; \varphi) = \lim_{n\to\infty} (f_n; \varphi)$, является обобщенной функцией: $F \in D'$.

**21.62.** Если последовательность абсолютно интегрируемых функций $f_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, такова, что

а) каково бы ни было число $c > 0$, при $|a| < c$, $|b| < c$ последовательность

$$\left| \int_a^b f_n(t)\, dt \right|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ограничена сверху;

б) при любых фиксированных $a$ и $b$, отличных от нуля,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a < b < 0 \quad \text{и} \quad 0 < a < b, \\ 1 & \text{при} \quad a < 0 < b, \end{cases}$$

то ее называют *δ-образной.*

Для любой непрерывной функции $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и любой δ-образной последовательности $\{f_n\}$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0).$$

**21.63.** Если $f_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/t}$, то в пространстве $D'$ выполняется равенство $\lim_{t\to+0} f_t(x) = \delta(x)$.

**21.64.** В пространстве $D'$ существует предел $\lim_{y\to+0} \dfrac{1}{x \pm iy}$ $\left(\text{он обозначается } \dfrac{1}{x \pm i0}\right)$ и справедлива формула

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathscr{P}\frac{1}{x}$$

(см. 21.57).

**21.65.** Всякая обобщенная функция является пределом обобщенных функций, порожденных локально интегрируемыми функциями. В этом смысле пространство обобщенных функций является «пополнением» пространства обычных локально интегрируемых функций.

**21.66.** Обобщенную функцию $f \in D'$ называют *обращающейся в нуль на интервале* $(a; b)$, если для всех $\varphi \in D$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \subset (a; b)$, имеет место равенство $(f; \varphi) = 0$. Для того чтобы непрерывная функция обращалась в нуль в каждой точке интервала, необходимо и достаточно, чтобы она обращалась в нуль на этом интервале как обобщенная функция.

**21.67.** Если функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ непрерывно дифференцируема, то для функционала, порожденного ее производной $f'$, выполняется соотношение

$$(f';\ \varphi)=-(f;\ \varphi'),\quad \varphi\in D.$$

**21.68.** Производная $f'$ обобщенной функции $f\in D'$ также является обобщенной функцией из $D'$.

**21.69.** Производная любого порядка обобщенной функции из пространства $D'$ является обобщенной функцией из того же пространства.

**21.70.** Если $f$ и $g$ — обобщенные функции, а $\lambda,\ \mu\in\mathbb{C}$, то $(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'$.

В задачах **21.71—21.77** вычислить производные обобщенных функций.

**21.71.** $y=\theta(x-x_0)=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant x_0,\\ 0 & \text{при } x<x_0.\end{cases}$

**21.72.** $y=\delta(x-x_0)$.

**21.73.** $y=|x|$.

**21.74.** $y=x_+$, где $x_+=\begin{cases}x & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$

**21.75.** $y=\ln|x|$.

**21.76.** $y=x_+^\lambda=\begin{cases}x^\lambda & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}\quad -1<\lambda<0.$

**21.77.** $y=\ln x_+=\begin{cases}\ln x & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$

В задачах **21.78—21.79** найти производные $n$-го порядка обобщенных функций.

**21.78.** $y=\delta(x)$.

**21.79.** $y=x_+^k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

В задачах **21.80—21.87** доказать сформулированные утверждения.

**21.80.** $\left(\frac{d}{dx}+\lambda\right)\theta(x)\,e^{-\lambda x}=\delta(x)$.

**21.81.** $\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)\frac{\theta(x)\sin\omega x}{\omega}=\delta(x)$.

**21.82.** Если

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}1/\varepsilon & \text{при } |x|<\varepsilon/2,\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant\varepsilon/2,\end{cases}$$

то в пространстве $D'$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(x)=\delta(x) \quad \text{и} \quad \delta'_\varepsilon(x)=\frac{\delta(x+\varepsilon/2)-\delta(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon}.$$

**21.83.** Если

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{при} \quad x<x_0, \\ f_2(x) & \text{при} \quad x>x_0, \end{cases}$$

где функции $f_1$ и $f_2$ непрерывны и кусочно-непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ (следовательно, в частности, существуют пределы $f(x_0\pm 0)$) и

$$g(x)=f(x)-[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\theta(x-x_0)$$

(см. **21.71**), то функция $g(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, имеет локально интегрируемую производную $g'$ и

$$f'=g'+[f(x_0+0)-f(x_0-0)]\,\delta(x-x_0).$$

**21.84.** Если $f$ — кусочно-гладкая на $\mathbb{R}$ функция, имеющая в точках $x_1, \ldots, x_n$ разрывы первого рода со скачками $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}+\sum_{k=1}^{n} p_k\delta(x-x_k),$$

где $f'$ — обобщенная производная функции $f$, а $\frac{df(x)}{dx}$ — обобщенная функция, порожденная обычной при $x\neq x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, производной функции $f$.

**21.85.** Если $f_n\in D'$, $n=1, 2, \ldots, f\in D'$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$, то для любого $k=1, 2, \ldots$ в пространстве $D'$ имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}=f^{(k)}$.

**21.86.** В пространстве обобщенных функций сходящиеся ряды можно почленно дифференцировать любое число раз: если $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, то $f^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ в $D'$, $k=1, 2, \ldots$

**21.87.** В пространстве $D'$ имеют место равенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2k\pi).$$

Указание. Воспользоваться формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}.$$

**4. Преобразование Фурье обобщенных функций.** Пусть $S$ — линейное пространство всех бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси $\mathbb{R}$ функций $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, которые вместе со всеми своими производными стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$ быстрее любой степени $1/x$, т. е. таких функций $\varphi$, что при любых $n, m=0, 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$\lim_{x\to\infty} x^n\varphi^{(m)}(x)=0.$$

Последовательность $\varphi_k\in S$, $k=1, 2, \ldots$, называют *сходящейся* в $S$ к функции $\varphi\in S$, если для всех $n, m=0, 1, 2, \ldots$ каждая последовательность $x^n\varphi_k^{(m)}(x)$, $k=1, 2, \ldots$, равномерно на всей оси сходится к функции $x^n\varphi^{(m)}(x)$. В этом случае пишут $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k=\varphi$ в $S$.

Пространство $S$ обладает тем свойством, что преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают $S$ на себя (см. **21.102**).

Непрерывность функционала $f\colon S\to\mathbb{C}$ означает, что из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$ в $S$, следует, что и $\lim\limits_{n\to\infty}(f;\ \varphi_n)=(f;\ \varphi)$.

Линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $S$, называют *обобщенной функцией медленного роста*, а множество всех таких функционалов — *пространством обобщенных функций медленного роста* и обозначают $S'$.

Примером обобщенной функции медленного роста является $\delta$-функция $\delta(x)$, определяемая равенством $(\delta;\ \varphi)=\varphi(0)$, $\varphi\in S$.

Как и в случае обобщенных функций $f\in D'$ для обобщенных функций $f\in S'$ производная $f^{(n)}$ порядка $n$ функции $f$ определяется равенством $(f^{(n)};\ \varphi)=(-1)^n(f;\ \varphi^{(n)})$, $\varphi\in S$.

Преобразованием Фурье обобщенной функции $f\in S'$ называют функционал $F(f)$, определяемый формулой

$$(F(f);\ \varphi)=(f;\ F(\varphi)),\quad \varphi\in S.$$

Преобразование Фурье $F(f)$ функции $f$ (основной или обобщенной) обозначают также и символом $\hat{f}$.

Пример 4. Найти преобразование Фурье единицы.

$$\triangle\ (\hat{1};\ \varphi)=(1;\ \hat{\varphi})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-ixy}dx=$$

$$=\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{iy(t-x)}dx\right]\Bigg|_{t=0}=\sqrt{2\pi}\,F^{-1}(F(\varphi))\,|_{t=0}=$$

$$=\sqrt{2\pi}\,\varphi(t)\,|_{t=0}=\sqrt{2\pi}\,\varphi(0)=\sqrt{2\pi}\,(\delta;\ \varphi).$$

Таким образом, $\hat{1}=\sqrt{2\pi}\,\delta$. ▲

*Обратное преобразование Фурье $F^{-1}$ обобщенных функций* $f \in S'$ определяют формулой

$$\left(F^{-1}(f);\ \varphi\right) = \left(f;\ F^{-1}(\varphi)\right).$$

Пусть $\psi = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — такая бесконечно дифференцируемая функция, что для любой ее производной $\psi^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, существуют такие постоянные $C_n$ и $C'_n$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$|\psi^{(n)}(x)| \leqslant C'_n(1 + |x|)^{C_n}. \tag{8}$$

Если $f \in S'$, а функция $\psi$ удовлетворяет условию (8), то произведение $\psi f$ определяют формулой

$$(\psi f;\ \varphi) = (f;\ \psi\varphi)$$

(если $\varphi \in S$, то $\psi\varphi \in S$; см. задачу **21.109**).

Для преобразования Фурье производной и производной преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста имеют место формулы

$$F\left(f^{(n)}\right) = (ix)^n F(f), \quad F^{(n)}(f) = (-i)^n F\left(x^n f\right) \tag{9}$$

(см. **21.111** и **21.112**).

Пример 5. Найти преобразование Фурье функции $f(x) = x$.

$\triangle$ Здесь речь может идти только о преобразовании Фурье функции $f(x) = x$, рассматриваемой как обобщенная функция, так как к этой функции неприменима формула классического преобразования Фурье.

Заметив, что $F(1) = \delta\sqrt{2\pi}$ (см. пример 4), получим

$$F(x) = F(x \cdot 1) = iF'(1) = i\sqrt{2\pi}\,\delta'. \ \blacktriangle$$

---

В задачах **21.88—21.103** доказать сформулированные утверждения.

**21.88.** Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\varphi$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ принадлежала пространству $S$, необходимо и достаточно, чтобы для любых неотрицательных целых $m$ и $n$ выполнялось условие

$$\sup_{\mathbb{R}} |x^n \varphi^{(m)}(x)| < +\infty.$$

**21.89.** Для того чтобы $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\mathbb{R}} \left| x^k \left[\varphi_n^{(m)}(x) - \varphi^{(m)}(x)\right] \right| = 0, \quad k,\ m = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

**21.90.** Если $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$ в $S$, то для любого $m = 1, 2, \ldots$ имеет место

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n^{(m)}(x) = \varphi^{(m)}(x).$$

**21.91.** Пространство основных функций $D$ содержится в пространстве основных функций медленного роста $S$, причем если $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$ в $D$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$ в $S$.

**21.92.** $D\neq S$.

**21.93.** Обобщенная функция, порожденная локально интегрируемой функцией $e^x$, не продолжаема в элемент пространства $S'$.

**21.94.** Пространство $D$ плотно в пространстве $S$, т. е. любая функция $\varphi\in S$ является в $S$ пределом последовательности функций $\varphi_n\in D$, $n=1, 2, \ldots$

**21.95.** Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то функционал $f$, определенный формулой

$$(f;\ \varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in S,$$

принадлежит пространству $S'$.

**21.96.** Если функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ локально интегрируема и для нее справедлива оценка

$$|f(x)|\leqslant c|x|^k,$$

где $c$ и $k$ — неотрицательные постоянные, то функционал $f$, определяемый формулой

$$(f;\ \varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in S;$$

принадлежит пространству $S'$.

**21.97.** Обобщенная функция $\dfrac{1}{x+i0}\in D'$ (см. **21.64**) продолжаема в обобщенную функцию медленного роста.

**21.98.** Для производных обобщенных функций медленного роста справедливы полные аналоги утверждений задач **21.69**, **21.70**, **21.85** и **21.86**.

**21.99.** Если $\varphi\in S$, то при любом $k=1, 2, \ldots$ функция $x^k\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси и потому для нее определено преобразование Фурье.

**21.100.** Если $\varphi\in S$, то $F(\varphi)\in S$ и $F^{-1}(\varphi)\in S$ ($F$ — преобразование Фурье, а $F^{-1}$ — обратное преобразование Фурье).

**21.101.** Если $\varphi\in S$, то $F^{-1}(F(\varphi))=\varphi$ и $F(F^{-1}(\varphi))=\varphi$.

**21.102.** Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают взаимно однозначно, линейно и непрерывно пространство $S$ на себя. (Отображение $F\colon S\to S$ называют *непрерывным*, если из условия $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$, $\varphi_n\in S$, $n=1, 2, \ldots$, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}F(\varphi_n)=F(\varphi)$.)

**21.103.** Если функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и $\varphi \in S$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-ixy}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-ixy}\,dx.$$

**21.104.** Привести пример такой основной функции $\varphi$ из пространства $D$, что ее преобразование Фурье $F(\varphi)$ не принадлежит этому пространству.

**21.105.** Найти прямое и обратное преобразование Фурье для $\delta$-функции.

В задачах **21.106—21.112** доказать сформулированные утверждения.

**21.106.** Преобразование Фурье обобщенной функции $f \in S'$ также является обобщенной функцией класса $S'$, т. е. $F(f)$ — линейный непрерывный функционал над пространством $S$.

**21.107.** Для любой обобщенной функции $f \in S'$ имеют место соотношения $F^{-1}(F(f)) = F(F^{-1}(f)) = f$.

**21.108.** Прямое $F$ и обратное $F^{-1}$ преобразования Фурье отображают пространство $S'$ на себя линейно, взаимно однозначно и непрерывно (непрерывность отображения пространства $S'$ определяется аналогично непрерывности отображения $S \to S$ в задаче **21.102**).

**21.109.** Пусть $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — такая бесконечно дифференцируемая функция, что для любой ее производной $\psi^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, существуют такие постоянные $C_n$ и $C'_n$, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство (8): $|\psi^{(n)}(x)| \leqslant C'_n(1 + |x|)^{C_n}$. Тогда, если $\varphi \in S$, то $\psi\varphi \in S$.

**21.110.** Если $f \in S'$, а функция $\psi$ удовлетворяет условиям задачи **21.109**, то $\psi f \in S'$.

**21.111.** Если $f \in S'$, то $F(f^{(n)}) = (ix)^n F(f)$.

**21.112.** Если $f \in S'$, то $F^{(n)}(f) = (-i)^n F(x^n f)$.

В задачах **21.113—21.118** найти преобразование Фурье обобщенных функций.

**21.113.** $\delta^{(n)}$.

**21.114.** $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

**21.115.** Сдвинутой $\delta$-функции $\delta(x-a)$.

**21.116.** $\dfrac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2}$.

**21.117.** $\dfrac{\delta(x-a) - \delta(x+a)}{2}$.

**21.118.** Функции Хевисайда $\theta$ (см. пример 3).

# ОТВЕТЫ

## Глава I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### § 1. Различные типы множеств в $n$-мерном пространстве

**1.4.** 1) $-3/2$. 2) $-(2n+1)/(n+2)$.

**1.5.** 1) $a\sqrt{n}$. 2) $+\infty$. 3) $\arccos\sqrt{k/n}$. 4) $\pi/2$. 5) $2^n$. 6) 0, если $n=2k-1$; $C_{2k-1}^{k-1}$, если $n=2k$.

**1.8.** 1) $(0; 1; 2; e)$. 2) Предел не существует. 3) а) $(0; 0)$; б) предел не существует. 4) $(0; 0)$, если $|r|<1$; $(1; 0)$, если $r=1$, $\varphi=2\pi k$, $k\in Z$; в остальных случаях предел не существует. 5) $(\ln r; \varphi)$.

**1.12.** Только в пространстве $\mathbb{R}^2$.

**1.17.** $x=(0; x_2)$, $x_2\in[-1; 1]$.

**1.20.** 1) Неверно. 2) Неверно.

**1.21.** Таким множеством, например, является числовая последовательность
$$x^{(m)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}.$$

**1.23.** $n\leqslant 4$.

**1.33.** 1) Да. 2) Нет, если последовательность $\delta_k$ ограничена; да, если последовательность не ограничена.

**1.34.** Нет, если последовательность $\delta_k$ ограничена; да, если последовательность $\delta_k$ не ограничена.

**1.39.** 4) $E$ — открытое множество. 5) $E$ — замкнутое множество. 6) $E$ — произвольное множество. 7) $E$ — произвольное множество. 8) $E$ — замкнутое множество.

**1.46.** $\bar{E}=E\cup P$, где $P$ — множество точек, расположенных на параллели, удаленной от Северного полюса на 7 км $(P\not\subset E)$; $E^{(1)}=\overline{E}\setminus P_0$, где $P_0$ — точка Южного полюса.

**1.52.** 0. **1.55.** $\sqrt{n-k}$.

**1.56.** 1) $7\sqrt{2}/8$. 2) $4/\sqrt{13}$. 3) $1/\sqrt{6}$.

**1.58.** $\sqrt{162/55}$, $x=(89/55; 131/55; -42/55)$, $y=(8/55; 86/55; -24/55)$.

**1.59.** $\sqrt{(n-2)/2n}$, $x=(1/n; 1/n; 1/n; \ldots; 1/n)$, $y=(1/2; 1/2; 0; \ldots; 0)$.

**1.61.** 1) $\sqrt{2/3}$. 2) $+\infty$. 3) $1+\sqrt{2}$. 4) $\dfrac{2}{\pi}\sqrt{4+\pi^2}$.

**1.62.** 1) $2\sqrt{2}$. 2) 0. 3) $+\infty$. 4) $+\infty$. **1.63.** $a\sqrt{n}$.

**1.72.** 1) Да, 2) нет.

**1.73.** 1) а) Да, б) да, в) да, г) да.
2) а) Да, б) да, в) нет, г) нет.
3) а) Нет, б) нет, в) да, г) нет.
4) а) Да, б) да, в) нет, г) нет.
5) а) Нет, б) нет, в) да, г) нет.

6) а) Да, б) да, в) нет, г) нет.
7) а) Да, б) да, в) да, г) да.
8) а) Нет, б) нет, в) нет, г) нет.
9) а) Нет, б) нет, в) да, г) нет.
10) а) Да, б) да, в) да, г) да.
11) а) Да, б) нет, в) нет, г) нет.
12) а) Нет, б) нет, в) да, г) нет.

**1.74.** 1) Нет. 2) Да. 3) Да. 4) Нет. 5) Да. 6) Нет. 7) Да. 8) Да. 9) Нет. 10) Нет.

**1.76.** 4) из **1.73** и 1), 2), 8) из **1.74**.

**1.77.** 1) Отрезок с концами в точках, образующих множество $E$. 2) Замкнутый треугольник с вершинами в точках, образующих множество $E$. 3) $\mathbb{R}^2$. 4) $(-1;\ 0)$. 5) $\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1^2+4x_2^2\leqslant 4\right\}$. 6) $\mathbb{R}^2$. 7) Объединение полосы $0\leqslant x_2<1$ и точки $(0;\ 1)$. 8) $\mathbb{R}^3$. 9) Симплекс (см. задачу **1.79**) с вершинами в точках, образующих множество $E$.

## § 2. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных. Отображения

**2.1.** $s=(4y^2-x^2)/16$, $15/16$.

**2.2.** 1) $v=\dfrac{\pi}{3}\,y\,(x^2-y^2)$, 2) $v=\dfrac{y^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2x^2-y^2}$.

**2.3.** $v=\dfrac{8y\sqrt{y}}{3\sqrt{\pi}}\operatorname{tg}x\cos^6\dfrac{x}{2}$.

**2.4.** $s=\dfrac{x+y}{4}\sqrt{4z^2-(x-y)^2}$, а) $3\sqrt{15}/4$, б) не существует.

**2.5.** $s=\dfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}$.

**2.6.** $Q=\dfrac{3}{2}(x+y)\sqrt{4z^2+3(x-y)^2}$.

**2.7.** $$v=\frac{1}{3}\sqrt{x_1(x_2+x_3+x_4)^2-x_1^3}\times$$
$$\times\sqrt[4]{\frac{(x_2+x_3-x_4)(x_3+x_4-x_2)(x_4+x_2-x_3)}{(x_2+x_3+x_4)^3}},\quad \frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{4}{27}}.$$

**2.8.** 1) Замкнутый угол, ограниченный лучами $y=x$, $x\geqslant 0$ и $y=-x$, $x\geqslant 0$. 2) Замкнутый круг с центром в точке $(0;\ 0)$ и с радиусом, равным 1. 3), 4) Внешность окружности с центром в точке $(0;\ 0)$ и с радиусом, равным 1. 5) Внешность параболы с вершиной в точке $(2;\ 0)$ и с фокусом в точке $(3;\ 0)$. 6) Внешность эллипса с центром в точке $(1;\ 0)$, с фокусами, расположенными на оси $x$, с полуосями, равными 2 и 1. 7) Внутренность гиперболы с центром в точке $(0;\ 0)$ с фокусами на оси $x$, действительная полуось равна 4, мнимая —1. 8) Область, ограниченная окружностями с центрами в точках $(1/2;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ и с радиусами, соответственно равными $1/2$ и 1. 9) Замкнутый квадрат с вершинами в точках $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$. 10) $\mathbb{R}^2$. 11) Открытый треугольник с вершинами в точках $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$. 12) Объединение замкнутой левой полуплоскости $x\leqslant 0$ и прямой $x=2$. 13) Если $a>1$, то замкнутый круг с центром в точке $(0;\ 0)$ и с радиусом, равным 1; если $0<a<1$, то концентрическое кольцо с центром в точке $(0;\ 0)$, ограниченное окружностями с радиусами 1 и $\sqrt{2}$, причем бо́льшая окружность не входит в множество существования функции, а меньшая входит. 14) Если $a>0$, то замкнутое концентрическое кольцо с центром в точке $(0;\ 0)$, образованное окружностями с радиусами $\sqrt{a}$ и $\sqrt{2a}$; если $a=0$, то точка $(0;\ 0)$; если $a<0$, то пустое множество. 15) Открытый треугольник с вершинами в точках $(0;\ 3)$, $(3;\ 15/2)$, $(3;\ -6)$.

16) Замкнутый четырехугольник с вершинами в точках $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(35/6; 1)$, $(1; 36/7)$. 17) Объединение замкнутых вертикальных полуполос $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi(2k+1)$, $y \geqslant 0$ и $(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2\pi k$, $y \leqslant 0$, $k \in Z$. 18) Объединение открытых горизонтальных полуполос $x > 0$, $2\pi k < y < (2k+1)\pi$, $k \in Z$. 19) Объединение концентрических открытых колец с центром в точке $(0; 0)$, пересекающих полуось $x > 0$ по интервалам $(\sqrt{2n}; \sqrt{2n+1})$, $n=0, 1, 2, \ldots$ 20) Объединение открытых углов, ограниченных лучами $y = kx$, $x \geqslant 0$ и $y = \frac{2k+1}{2} x$, $x \geqslant 0$, $k \in Z$. 21) Замкнутая горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = -1$ и $y = 1$. 22) Замкнутая полоса, ограниченная прямыми $x + y = \pm 1$. 23) Объединение двух тупых углов, ограниченных прямыми $y = 0$ и $y = -2x$, включая границу углов, за исключением точки $(0; 0)$. 24) Открытая правая полуплоскость $x > 0$.

**2.9.** 1) а) Нет, б) да, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
2) а) Да, б) нет, в) да, г) нет, д) да, е) нет.
3) а) Нет, б) да, в) да, г) да, д) нет, е) да.
4) а) Нет, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
5) а) Да, б) нет, в) да, г) нет, д) нет, е) нет.
6) а) Нет, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
7) а) Да, б) нет, в) да, г) нет, д) да, е) нет.

**2.10.** 1) $[-4; +\infty)$. 2) $[0; 3/2]$. 3) $[\ln 3; +\infty)$. 4) $(-\infty; -2] \cup [2, +\infty)$. 5) $[7/4; +\infty)$. 6) $[-1; 9]$. 7) $[-15; 15]$. 8) $\{0, \pi\}$.

**2.11.** 1) $[-5; -2]$. 2) $[1/4; 1]$. 3) $[-50; 150]$. 4) $[\ln(24/5); \ln 12]$. 5) $[\sqrt[4]{2}; +\infty)$.

**2.12.** 1) Открытое полупространство, ограниченное плоскостью, проходящей через точки $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, и содержащее точку $(0; 0; 0)$. 2) Замкнутый выпуклый восьмигранник с вершинами в точках $(\pm 1; 0; 0)$, $(0; \pm 1; 0)$, $(0; 0; \pm 1)$. 3) Открытый двугранный угол, ограниченный плоскостями $x = 0$ и $z = 0$ и содержащий точку $(1; 0; 1)$. 4) Открытый шар с центром в точке $(0; 0; 0)$ с радиусом, равным 1. 5) Замкнутая область, содержащая точку $(0; 0; 0)$, ограниченная цилиндрической поверхностью: направляющая цилиндрической поверхности — окружность радиуса 1 с центром в точке $(0; 0; 0)$, лежащая в плоскости $y = 0$; образующая — прямая, параллельная оси $y$, проходящая через точку $(1; 0; 0)$. 6) Замкнутая область, ограниченная двумя цилиндрическими поверхностями: направляющие цилиндрических поверхностей — окружности радиусов 2 и 3 с центром в точке $(0; 0; 0)$, лежащие в плоскости $x = 0$; образующие — прямые, параллельные оси $x$ и проходящие через точки $(0; 2; 0)$, $(0; 3; 0)$. 7) Внутренность эллипсоида с центром в точке $(0; 0; 0)$ с осями, принадлежащими осям координат, и с полуосями, соответственно равными 1, 2, 3. 8) Внутренность параболоида вращения, получающегося при вращении параболы $z = x^2$, $y = 0$ вокруг оси $z$. 9) Внутренность двуполостного гиперболоида с центром в точке $(0; 0; 0)$, главные плоскости гиперболоида совпадают с осями координат, полуоси равны соответственно $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$. 10) $\mathbb{R}^3$. 11) Множество точек, расположенных внутри сферы радиуса 4 с центром в точке $(0; 0; 0)$ и на этой сфере, но вне сферы радиуса 2 с центром в точке $(0; 0; 0)$. 12) Сфера радиуса 1 с центром в точке $(0; 0; 0)$. 13) Открытая пирамида с вершинами в точках $(4; 1; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 5; 0)$, $(0; 1; 4)$. 14) Замкнутая пирамида с вершинами в точках $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(1; 0; 1)$, $(0; 1; 1/3)$. 15) Множество точек, расположенных внутри сферы радиуса 1 с центром в точке $(0; 0; 0)$ и внутри конической поверхности, направляющей которой является окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, а вершина находится в точке $(0; 0; 0)$. 16) Множество точек, расположенных вне сферы радиуса 2 с центром в точке $(0; 0; 0)$ и внутри цилиндрической поверхности, направляющая которой — окружность радиуса 2 с центром в точке $(0; 0; 0)$, лежащая в плоскости $z = 0$, а образующая — прямая, параллельная оси $z$ и проходящая через точку $(2; 0; 0)$. 17) Множество точек, расположенных внутри сферы радиуса 2 с центром в точке $(0; 0; 2)$ и внутри параболоида вращения, образованного вращением параболы $z=4-x^2$, $y=0$ вокруг оси $z$. 18) Замкнутая ограниченная область, заключенная между конической поверхностью (вершина в точке $(0; 0; 1)$, направляющая — окружность радиуса 1 с центром в точке $(0; 0; 0)$, лежащая в плоскости $z=0$) и гиперболическим параболоидом $z=xy$. 19) Замкнутая область, ограниченная сферами с радиусами 1 и $\sqrt{3}$ и с центрами в точке $(0; 0; 0)$. 20) Внутренность конуса (вершина в точке $(0; 0; 1)$, направляющая — окружность радиуса 1 с центром в точке $(0; 0; 0)$, лежащая в плоскости $z=0$) вместе с границей, за исключением вершины конуса. 21) Замкнутая ограниченная область, расположенная между сферой (центр в точке $(0; 0; 0)$, радиус 2) и цилиндром (направляющая цилиндра — окружность радиуса $\sqrt{3}$ с центром в точке $(0; 0; 0)$, лежащая в плоскости $z=0$; образующая — прямая, параллельная оси $z$ и проходящая через точку $(\sqrt{3}; 0; 0)$).

**2.13.** $(1; -1; -2)$, $(1, -3; 2)$, $(-1; 1; 0)$, $(-1; 3; -4)$, $(1; -1; 0)$, $(1; -3; 4)$, $(-1; 1; 2)$, $(-1; 3; -2)$.

**2.14.** 1) а) Нет, б) да, в) да, г) да, д) нет, е) нет.
2) а) Да, б) нет, в) да, г) нет, д) да, е) да.
3) а) Нет, б) да, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
4) а) Да, б) нет, в) да, г) нет, д) нет, е) нет.
5) а) Да, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
6) а) Нет, б) да, в) да, г) да, д) нет, е) нет.
7) а) Нет, б) да, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
8) а) Нет, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
9) а) Нет, б) да, в) нет, г) нет, д) нет, е) нет.
10) а) Нет, б) да, в) да, г) да, д) нет, е) да.

**2.15.** 1) $[-100; +\infty)$. 2) $(-\infty; +\infty)$. 3) $[5; +\infty)$. 4) $[1; +\infty)$. 5) $[\ln 27; +\infty)$.

**2.16.** 1) $[12; +\infty)$. 2) $(0; 1/2]$. 3) $[10; +\infty)$. 4) $\left(-\infty; \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}\right]$.

**2.17.** 1) $\mathbb{R}^4$, за исключением точек 3-мерной сферы (см. **1.22.** 3)) радиуса 1 с центром в точке $(0; 0; 0; 0)$. Множество значений: $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$. 2) Замкнутый параллелепипед с центром в точке $(0; 0; 0; 0)$ и с ребрами, параллельными осям координат и равными 2, 4, 6, 8. Множество значений: $[0; 10]$. 3) Замкнутый шар радиуса 3 с центром в точке $(0; 0; -1; -1)$. Множество значений: $[0; 3]$. 4) Внутренность эллипсоида с центром в точке $(0; 0; 0; 0)$, с осями, принадлежащими осям координат, и с полуосями, соответственно равными 1, 2, 3, 4. Множество значений: $(-\infty; 2\ln 12]$.

**2.18.** 1) Замкнутый $n$-мерный куб с центром в начале координат с ребрами, параллельными осям координат и равными 2. 2) Замкнутый симплекс в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. **1.79**) с вершинами в точках $(0; 0; \ldots; 0)$, $(1; 0; \ldots; 0)$, $(0, 1, \ldots; 0)$, $\ldots$, $(0; 0; \ldots; 1)$. 3) открытый шар радиуса 1 с центром в точке $(1; 2; \ldots; n)$. 4) $\mathbb{R}^n$, за исключением начала координат. 5) Если $a > 1$, то замкнутая внешность сферы радиуса 1 с центром в начале координат; если $0 < a < 1$, то замкнутый шар радиуса 1 с центром в начале координат, за исключением центра шара. 6) Замкнутый $n$-мерный куб с центром в точке $(1; 2; \ldots; n)$ с ребрами, параллельными осям координат и равными 2.

**2.19.** 1) Прямая, проходящая через точки $(0; c)$ и $(1; 1+c)$. 2) Прямая, проходящая через точки $(0; c^2)$ и $(1; 1+c^2)$, если $c \geqslant 0$; $\varnothing$, если $c < 0$. 3) Окружность радиуса $1/\sqrt{c}$ с центром в точке $(0; 0)$, если $c > 0$; $\varnothing$, если $c \leqslant 0$. 4) Окружность радиуса $\sqrt{1-e^c}$ с центром в точке $(0; 0)$, если $c < 0$; точка $(0; 0)$, если $c = 0$; $\varnothing$, если $c > 0$. 5) Эллипс (центр в точке $(0; 0)$, фокусы на оси $x$, полуоси равны $\sqrt{36-c^2}/2$ и $\sqrt{36-c^2}/3$), если $c \in [0; 6)$; точка $(0; 0)$, если $c = 6$; $\varnothing$, если $c \notin [0; 6]$. 6) Гипербола (центр в точке $(0; 0)$, фокусы на оси $x$, полуоси равны $1/c$), если $c > 0$; $\varnothing$, если $c \leqslant 0$. 7) Ветви параболы $y^2 = x/c^2$: если $c > 0$, то $y > 0$; если $c < 0$, то $y < 0$; ось $y$ без точки $(0; 0)$, если $c = 0$. 8) Дуга параболы $y^2 = c^2(x - c^2/4)$, $x \leqslant c^2/2$, если $c > 0$; точка $(0; 0)$, если $c = 0$; $\varnothing$, если $c < 0$.

9) Окружность радиуса $2\sqrt{c}/|1-c|$ с центром в точке $((1+c)/(1-c); 0)$, если $c>0$, $c\neq 1$; ось $y$, если $c=1$; точка $(1; 0)$, если $c=0$; $\varnothing$, если $c<0$. 10) Окружность радиуса $1/|\operatorname{sh} c|$ с центром в точке $(-\operatorname{cth} c; 0)$, если $c\neq 0$; ось $y$, если $c=0$. 11) Кривая $y=(\ln c)/\ln x$, если $c>0$, $c\neq 1$; луч $y=0$, $x>0$, и прямая $x=1$, если $c=1$; $\varnothing$, если $c\leqslant 0$. 12) Окружность радиуса $1/|\ln c|$ с центром в точке $(1/\ln c; 0)$, за исключением точки $(0; 0)$, если $c>0$, $c\neq 1$; прямая $x=0$, за исключением точки $(0; 0)$, если $c=1$; $\varnothing$, если $c\leqslant 0$. 13) Синусоида $y=c^2+\sin x$, если $c\geqslant 0$; $\varnothing$, если $c<0$. 14) Дуги синусоиды $x=e^c\sin y$, $y\in(2\pi k; 2\pi k+\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. 15) Прямая $y=(\sin c)x$, за исключением точки $(0; 0)$, если $|c|\leqslant\pi/2$; $\varnothing$, если $|c|>\pi/2$. 16) Окружность радиуса $1/|\sin c|$ с центром в точке $(0; 1/\operatorname{tg} c)$, кроме точек $(\pm 1; 0)$, если $|c|<\pi/2$, $c\neq 0$; ось $x$, кроме точек $x=\pm 1$, если $c=0$; $\varnothing$, если $|c|\geqslant\pi/2$. 17) Граница ромба с вершинами в точках $((1-c^2)/2;\ 0)$, $(0;\ 1-c^2)$, $((c^2-1)/2;\ 0)$, $(0;\ c^2-1)$, если $c\in[0; 1)$; точка $(0; 0)$, если $c=1$; $\varnothing$, если $c\notin[0; 1]$. 18) Объединение двух перпендикулярных лучей с вершиной в точке $(-c/2; c/2)$, расположенных во втором квадранте, и двух перпендикулярных лучей с вершиной в точке $(c/2; -c/2)$, расположенных в четвертом квадранте, если $c>0$; объединение первого и третьего квадрантов вместе с границей, если $c=0$; $\varnothing$, если $c<0$. 19) Два луча, исходящие из точки $(c; c)$ в направлении координатных осей. 20) Граница квадрата с вершинами в четырех точках $(\pm c; \pm c)$, если $c>0$; точка $(0; 0)$, если $c=0$; $\varnothing$, если $c<0$. 21) Объединение двух перпендикулярных лучей, исходящих из точки $(c; c^2)$ и лежащих в первом квадранте, и двух перпендикулярных лучей, исходящих из точки $(-c; c^2)$ и лежащих во втором квадранте, если $c>0$; объединение прямой $y=0$ и луча $x=0$, $y>0$, если $c=0$; прямая $y=c$, если $c<0$. 22) Прямые $x=\pi k$, $y=\pi l$, $k, l\in\mathbb{Z}$, если $c=0$; квадраты $\pi k<x<\pi(k+1)$, $\pi l<y<\pi(l+1)$, $k, l\in\mathbb{Z}$, $k+l$ — четное, если $c=1$; $\varnothing$, если $c\neq 0$, $c\neq 1$.

**2.20.** 1) Плоскость $x+2y+3z=c$. 2) Плоскость $x+2y+3z=\ln c$, если $c>0$; $\varnothing$, если $c\leqslant 0$. 3) Эллипсоид $\dfrac{x^2}{c}+\dfrac{y^2}{c}+\dfrac{z^2}{c/4}=1$, если $c>0$; точка $(0; 0; 0)$, если $c=0$; $\varnothing$, если $c<0$. 4) Сфера радиуса $\sqrt{(c+1)/c}$ с центром в точке $(-1; 0; 0)$, если $c<-1$ или $c>0$; точка $(-1; 0; 0)$, если $c=-1$; $\varnothing$, если $-1<c\leqslant 0$. 5) Сфера радиуса $e^{c/2}$ с центром в точке $(0; 0; 0)$. 6) Однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{c}+\dfrac{y^2}{c}-\dfrac{z^2}{c}=1$, если $c>0$; двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{-c}+\dfrac{y^2}{-c}-\dfrac{z^2}{-c}=-1$, если $c<0$; конус $x^2+y^2=z^2$, если $c=0$. 7) Двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{e^c}+\dfrac{y^2}{e^c}-\dfrac{z^2}{e^c}=-1$. 8) Эллиптический цилиндр с осью $y=x$, $z=0$ и с направляющей $y=-x$, $4x^2+z^2=c$, если $c>0$; прямая $y=x$, $z=0$, если $c=0$; $\varnothing$, если $c<0$. 9) Гиперболический цилиндр $z=x/(cx-1)$, за исключением оси $y$, если $c\neq 0$; плоскость $x+z=0$, за исключением оси $y$, если $c=0$. 10) Плоскость $cx+cy+(c-1)z=c$, за исключением прямой $x+y=1$, $z=0$. 11) Сфера радиуса $1/|c|$ с центром в точке $(0; 0; 1/c)$, за исключением точки $(0; 0; 0)$, если $c\neq 0$; плоскость $z=0$, за исключением точки $(0; 0; 0)$, если $c=0$. 12) Эллиптический параболоид $z=\dfrac{c}{2}(x^2+y^2)$, за исключением вершины параболоида, если $c\neq 0$; плоскость $z=0$, за исключением точки $(0; 0; 0)$, если $c=0$. 13) Сфера радиуса $\operatorname{th}(c/2)$ с центром в точке $(0; 0; 0)$, если $c>0$; точка $(0; 0; 0)$, если $c=0$; $\varnothing$, если $c<0$. 14) Восемь точек $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$, если $c=0$; $\varnothing$, если $c\neq 0$. 15) Эллипсоид $\dfrac{x^2}{(c/2)^2}+\dfrac{y^2+z^2}{(c/2)^2-1}=1$, если $c>2$; отрезок $[-1; 1]$ оси $x$, если $c=2$; $\varnothing$, если $c<2$. 16) Поверхность октаэдра с вершинами в точках $(\pm(1-e^c); 0; 0)$, $(0; \pm(1-e^c); 0)$, $(0; 0; \pm(1-e^c))$, если $c<0$; точка $(0; 0; 0)$, если $c=0$;

$\varnothing$, если $c > 0$. 17) Множество точек, расположенных между сферами радиусов $\sqrt{2\pi k}$ и $\sqrt{2\pi k + \pi}$ с центром в точке $(0;\ 0;\ 0)$, если $c = 1$, сферы радиуса $\sqrt{\pi k}$ с центром в точке $(0; 0; 0)$, если $c = 0$; $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\varnothing$, если $c \neq 0$, $c \neq 1$. 18) Конус $(x^2 + y^2)/\sin^2 c = z^2$, за исключением вершины конуса, если $0 < c \leqslant \pi/2$; ось $z$, за исключением точки $(0; 0; 0)$, если $c = 0$; $\varnothing$, если $c \notin [0;\ \pi/2]$.

**2.21.** 1) $(n-1)$-мерная плоскость $(1 + c)\, x_1 + c \sum\limits_{i=2}^{n} x_i = c$, за исключением $(n-2)$-мерной плоскости $x_1 = 0$, $\sum\limits_{i=2}^{n} x_i = 1$. 2) $(n-1)$-мерная сфера радиуса $\sqrt{n^2 - c^2}$ с центром в начале координат, если $c \in [0;\ n]$; $\varnothing$, если $c \notin [0; n]$. 3) $(n-1)$-мерная сфера радиуса $1/(2|c|)$ с центром в точке $(1/(2c); 0; \ldots; 0)$, за исключением начала координат, если $c \neq 0$; $(n-1)$-мерная плоскость $x_1 = 0$, за исключением начала координат, если $c = 0$. 4) $(n-1)$-мерная сфера радиуса $2\sqrt{c}/|1 - c|$ с центром в точке $((1 + c)/(1 - c); 0, \ldots; 0)$, если $c \geqslant 0$, $c \neq 1$; $(n-1)$-мерная плоскость $x_1 = 0$, если $c = 1$; $\varnothing$, если $c < 0$.

**2.22.** 1) Неверно. 2) Верно. **2.23.** 1) $\dfrac{x}{2}(x - y)$. 2) $\dfrac{x}{y} - xy$.

**2.24.** $\sqrt{y} + x - 1$. **2.25.** $(\operatorname{sign} x)\sqrt{x^2 + y^2}$. **2.26.** $x$. **2.27.** $\sin(\pi x/2y)$.

**2.28.** $\sin\left(x - 2\sqrt{y}\right) - 2\sin(x/2)\sin\sqrt{y}$. **2.29.** $x^2 + \left(e^x + y - 1\right)^2$.

**2.30.** $u = x + \dfrac{x - y}{z}$. **2.31.** $u = (2x^2 - 2y^2 + z^2)/x^2$. **2.32.** $u = x^2yz + \dfrac{z}{x} - \dfrac{z}{y}$.

**2.33.** $u = \left(1 - \dfrac{z}{x}\right)\left(1 - ze^{-y}\right)$.

**2.34.** 1) 0. 2) 1. 3) $\sqrt{2}$. 4) 4/3. 5) 1. 6) —1. 7) 2. 8) 0. 9) $\pi$. 10) $n\gamma$.

**2.37.** 1) а) 1, б) —1, в) не существует.
2) а) 0, б) 0, в) не существует.
3) а) —1, б) 1, в) не существует.
4) а) 0, б) 0, в) 0.
5) а) 0, б) 0, в) не существует.
6) а) 1, б) 1, в) 1.
7) а) 0, б) не существует, в) 0.
8) а) не существует, б) не существует, в) 0.
9) а) 0, б) 1, в) не существует.
10) а) 1, б) $\infty$, в) не существует.

**2.40.** 1) а) 0, б) 1, в) не существует.
2) а) 0, б) $\infty$, в) не существует.
3) а) $\sqrt{3}/2$, б) 0, в) не существует.
4) а) 0, б) 0, в) 0.

**2.41.** 1) а) 1/2, б) 1, в) 1/2, г) 0. **2.42.** $x \in \mathbb{Q}$.

**2.43.** 1) 1, если $\beta \neq 0$; 2, если $\beta = 0$. 2) 0. **2.44.** 0. **2.45.** 0.

**2.46.** 1) 0, если $\varphi \in (\pi/2;\ 3\pi/2)$; 1, если $\varphi = 0, \pi/2, \pi; 3\pi/2$; $+\infty$, если $\varphi \in (0;\ \pi/2)$, $\varphi \in (3\pi/2;\ 2\pi)$. 2) 0, если $\varphi \in (3\pi/4; 7\pi/4)$; $+\infty$, если $\varphi \in (0; 3\pi/4)$, $\varphi \in (7\pi/4;\ 2\pi)$; не существует, если $\varphi = 3\pi/4$, $\varphi = 7\pi/4$. 3) 0, если $\varphi \in (\pi/4;\ 3\pi/4)$, $\varphi \in (5\pi/4;\ 7\pi/4)$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; не существует при остальных значениях $\varphi$. 4) $\cos\varphi + \sin\varphi$, если $\varphi \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$; не существует, если $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

**2.47.** 0. **2.48.** 1) —3. 2) 6. 3) 1. 4) 0. 5) $\sqrt{2}/8$. 6) 0. 7) 0. 8) 1. 9) 1. 10) Не существует. 11) 1. 12. $\sqrt{e}$.

**2.49.** 1) 1. 2) 2. 3) $e$. 4) $\pi$. 5) —2. 6) 13/4.

**2.51.** 1) Да. 2) Да. 3) Нет.

**2.52.** 1) 1. 2) —1. 3) —1. 4) Не существует.

**2.53.** 1) 0. 2) 0. **2.54.** 1) 0. 2) $\alpha/(\alpha^2+1)$. 3) Не существует. **2.55.** Да. **2.56.** 0. **2.57.** $a=\sqrt{5}$, $b=-\sqrt{5}$. **2.58.** $a\in\mathbb{R}$, $b=0$. **2.59.** $a=-1$, $b=0$.

**2.62.** 1) $(0;0)$ — точка устранимого разрыва. 2) $(0;0)$. 3) $(1;2)$. 4) $(0;0)$. 5) Все точки прямой $x+y=0$, кроме двух ее точек $(1;-1)$ и $(-1;1)$, это точки устранимого разрыва. 6) $(\pi k;\pi n)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. 7) $(x;0)$, $x\neq 0$. 8) $(\pi k;\pi n)$, $k,n\in\mathbb{Z}$. 9) $(0;0)$ — точка устранимого разрыва. 10) Точек разрыва нет. 11) Все точки прямой $y=x$, кроме двух ее точек $(2;2)$ и $(3;3)$, это точки устранимого разрыва. 12) Все точки двух эллипсов $x^2+4y^2=1$, $\frac{x^2}{2}+2y^2=1$ и точка $(0;0)$; в точках эллипса $x^2+4y^2=1$ разрыв устранимый. 13) Все точки границы ромба с вершинами $(1;0)$, $(0;1/2)$, $(-1;0)$, $(0;-1/2)$. 14) Все точки окружностей радиусов $n\in\mathbb{N}$ с центром в точке $(0;0)$. 15) Все точки прямых $x=0$ и $y=nx$, $n\in\mathbb{Z}$. 16) Все точки плоскости, кроме точки $(0;0)$.

**2.63.** 1) Все точки оси $x$. 2) Все точки оси $y$, за исключением точки $(0;0;0)$. 3) Все точки сферы радиуса 4 с центром в точке $(1;0;-1)$. 4) Точек разрыва нет. 5) Все точки плоскостей $y=0$ и $z=0$. 6) Все точки плоскостей $y=0$ и $z=0$ и гиперболических цилиндров $yz=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$. 7) Все точки плоскости $z=0$, кроме точек прямой $y=x$, $z=0$. 8) Все точки оси $y$. 9) Все точки сферы радиуса 1 с центром в точке $(0;0;1)$, кроме точки $(0;0;0)$. 10) Все точки однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$, двуполостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=-1$ и цилиндра $x^2+y^2-z^2=0$.

**2.64.** Область определения: точка $(0;0)$ и внешность (вместе с границей) окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(0;0)$. Функция непрерывна на своей области определения.

**2.65.** Нет. **2.76.** 1) Да. 2) Нет.

**2.77.** 1) Равномерно непрерывна. 2) Равномерно непрерывна. 3) Не является равномерно непрерывной. 4) Не является равномерно непрерывной.

**2.80.** 1) $\omega(\delta)=\sqrt{a^2+b^2}\,\delta$, равномерно непрерывна. 2) $\omega(\delta)=\delta$, равномерно непрерывна. 3) $\omega(\delta)=2$, не является равномерно непрерывной. 4) $\omega(\delta)=+\infty$, не является равномерно непрерывной.

**2.81.** 1) 4. 2) $4\sqrt{5}$. 3) а) $+\infty$; б) 1/2. 4) 1. 5) 5. 6) $\sqrt[4]{e}$. 7) 6. 8) 12.

**2.83.** 1) Эллипс $\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{9}=1$. 2) Эллипс $\frac{(u-a_0)^2}{a^2}+\frac{(v-b_0)^2}{b^2}=1$, если $ab\neq 0$; отрезок $u=a_0$, $|v-b_0|\leqslant b$, если $a=0$, $b\neq 0$; отрезок $v=b_0$, $|u-a_0|\leqslant a$, если $b=0$, $a\neq 0$; точка $(a_0;b_0)$, если $a=b=0$.

**2.84.** 1) Прямая $v=au$. 2) Окружность $u^2+v^2=a^2$, если $a\neq 0$; точка $(0;0)$, если $a=0$.

**2.85.** Замкнутый треугольник с вершинами в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$.

**2.86.** Прямоугольник $1<u<2$, $|v|<1$.

**2.87.** 1) Прямая $2u=1$. 2) Окружность радиуса 4/3 с центром в точке $(5/3;0)$.

**2.88.** 1) Парабола $v^2=4a^2(a^2-u)$, если $a\neq 0$; луч $v=0$, $u\leqslant 0$, если $a=0$. 2) Парабола $v^2=4b^2(u+b^2)$, если $b\neq 0$; луч $v=0$, $u\geqslant 0$, если $b=0$. 3) Полукруг $u^2+v^2<1$, $v>0$.

**2.89.** 1) а) Отрезок $v=0$, $|u|\leqslant 1$; б), в) эллипс $\frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=1$. 2) Гипербола $2u^2-2v^2=1$.

**2.90.** 1), 2) Окружность $u^2+v^2=e^{2a}$. 3) Луч $v=(\operatorname{tg} b)\,u$, $u>0$. 4) Логарифмическая спираль $\rho=e^{(\theta-b)/a}$, где $\rho=\sqrt{u^2+v^2}$, $\operatorname{tg}\theta=v/u$.

**2.91.** 1) Гипербола $\frac{u^2}{\cos^2 a}-\frac{v^2}{\sin^2 a}=1$, если $a\neq\frac{\pi}{2}k$; луч $v=0$, $u\geqslant 1$, если $a=2\pi k$; луч $v=0$, $u\leqslant -1$, если $a=\pi(2k+1)$; прямая $u=0$, если $a=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $k\in\mathbb{Z}$.

2) Эллипс $\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 b}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 b}=1$, если $b\neq 0$; отрезок $v=0$, $|u|\leqslant 1$, если $b=0$. 3) Полуплоскость $v>0$. 4) Плоскость с выброшенными лучами $v=0$, $|u|\geqslant 1$.

**2.92.** 1) Дуга параболы $v=1-2u^2$, $|u|\leqslant 1$. 2) Прямая $\frac{u-a_0}{a}=\frac{v-b_0}{b}=\frac{w-c_0}{c}$, если $a^2+b^2+c^2\neq 0$; точка $(a_0; b_0; c_0)$, если $a^2+b^2+c^2=0$.

**2.93.** 1) Плоскость $u-2v+w=0$. 2) Сфера $u^2+v^2+w^2=1$. 3) Поверхность тора, образованного вращением круга $(u-2)^2+w^2\leqslant 1$, $v=0$ вокруг оси $w$.

**2.94.** Цилиндр $u^2+v^2=a^2$, если $a\neq 0$; ось $w$, если $a=0$.

**2.95.** Сфера $u^2+v^2+w^2=w$ с выброшенной точкой $(0;0;1)$.

**2.96.** Замкнутая пирамида с вершинами в точках $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$.

**2.104.** 1) Неверно. 2) Верно. **2.105.** 1) Да. 2) Нет.

**2.106.** 1) Верно. 2) Неверно.

**2.111.** См., например, *Б. Гелбаум, Дж. Олмстед*, «Контрпримеры в анализе» (М.: Мир, 1967).

## § 3. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных. Дифференцируемые отображения

**3.1.** 1) $\frac{\partial f}{\partial x}=3(x^2-y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3(y^2-x)$. 2) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x-y}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{xy-2x^2}{y^3}$. 3) $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x-2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-x^2$. 4) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.
5) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^x(x\sin y+\sin y+\cos y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=e^x(x\cos y-\sin y)$. 6) $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$. 7) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(y^4-x^4)}$. 8) $\frac{\partial f}{\partial x}=\sin 2x\ln y\,(1+\sin^2 x)^{\ln y-1}$. $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}(1+\sin^2 x)^{\ln y}\ln(1+\sin^2 x)$.

**3.2.** 1) 1, $-2$. 2) 1/3, $-1/6$. 3) $1-\pi$, $1-\pi$. 4) 2, 1.

**3.3.** 1) $\frac{\partial f}{\partial x}=y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=z+x$, $\frac{\partial f}{\partial z}=x+y$. 2) $\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 3) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{z}-\frac{z}{x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{x}-\frac{x}{z^2}$. 4) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{z}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}$.
5) $\frac{\partial f}{\partial x}=yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial f}{\partial y}=xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial f}{\partial z}=xyz^{xy-1}$. 6) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{x}f$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{z}{y}f$, $\frac{\partial f}{\partial z}=f\ln\frac{x}{y}$.

**3.4.** 1) $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\sin 2x_i$. 2) $\frac{\partial f}{\partial x_i}=2x_i f$, $i=1, 2, \ldots, n$.

**3.5.** 1) 0. 2) 2. **3.6.** 1) 0. 2) 1. **3.7.** 1) 3. 2) 3/2. **3.8.** 0. **3.9.** $(0;0)$, $(\pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{3})$, знаки берутся произвольно.

**3.10.** 1) $\Delta f=2\,\Delta x+\Delta y+\Delta x^2+2\,\Delta x\,\Delta y+\Delta x^2\,\Delta y$, $df=2\,dx+dy$. 2) $\Delta f=\Delta y+2\,\Delta x\,\Delta y+\Delta x^2\,\Delta y$, $df=dy$. 3) $\Delta f=\Delta x^2\,\Delta y$, $df=0$.

**3.11.** $\Delta f = 3x^2\,\Delta x - 2y\,\Delta y + 3x\,\Delta x^2 - \Delta y^2 + \Delta x^3$, $\quad df = 3x^2\,dx - 2y\,dy$.

**3.12.** 1), 2) Неверны, если $n > 1$. 3) Верно. 4) Неверно, если $n > 1$. 5) Неверно. 6) Верно.

**3.13.** 1) $(8x^3 - 6xy^2 + 3x^2y)\,dx + (x^3 - 6x^2y)\,dy$.

2) $4(y^3 + 2x^2y + 3)^3(4xy\,dx + (2x^2 + 3y^2)\,dy)$. 3) $\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\left(\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{y}\right)$.

4) $y(x^2 + y^2)^{-3/2}(y\,dx - x\,dy)$. $\quad$ 5) $2^{-y/x}\dfrac{\ln 2}{x^2}(y\,dx - x\,dy)$.

6) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(dx + \dfrac{y\,dy}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$. 7) $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{y}}\left(dx - \dfrac{x+1}{2y}\,dy\right)$.

8) 0. 9) $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$. 10) $(1 + xy)^{y-1}\left(y^2\,dx + (xy + (1 + xy)\ln(1 + xy))\,dy\right)$.

**3.14.** 1) $(1;\ 3)$, $(-1/26;\ -3/26)$. 2) $(7/4;\ 2;\ 1)$, $(7/4;\ -2;\ -1)$.

**3.15.** 1) а) $dx - dy$, б) 0. 2) $\dfrac{1}{2}\,dx$. 3) $4\,dy$. 4) $\dfrac{3\pi\ln 2}{4}(dx - 2\,dy)$.

5) $-\dfrac{dx}{2} - \dfrac{dy}{4}$. 6) $\dfrac{25}{12}(dy - dx)$. 7) $\dfrac{2}{5}(dx + dy)$. 8) $\left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{\pi}{4}\right)dx + \dfrac{3}{10}\,dy$. 9) $\dfrac{6}{\pi}\,dx$. 10) $-\dfrac{1}{4}e^{-2}\,dx$.

**3.16.** 1) $\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. 2) $e^{xy\sin z}(y\sin z\,dx + x\sin z\,dy + xy\cos z\,dz)$. 3) $(xy)^{z-1}(yz\,dx + xz\,dy + xy\ln(xy)\,dz)$.

4) $\dfrac{1}{z}x^{y/z}\left(\dfrac{y\,dx}{x} + \ln x\,dy - \dfrac{y\ln x\,dz}{z}\right)$.

**3.17.** 1) $2\left(\cos\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\right)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,dx_i$.

2) $\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,dx_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right)}}$.

**3.18.** 1) $-\dfrac{dz}{2}$. 2) $\dfrac{2\,dx + 3\,dy - 12\,dz}{37}$. 3) $2\,dx + \ln 4\,dz$.

4) $\dfrac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i$.

**3.21.** 1) $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, дифференцируема. 2) $f'_x = 1$, $f'_y = 0$, дифференцируема. 3) $f'_x = 1$, $f'_y = 2$, дифференцируема. 4) $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, дифференцируема. 5) $f'_x = f'_y = 0$, дифференцируема. 6) $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, недифференцируема. 7) $f'_x = f'_y = 1$, недифференцируема. 8) $f'_x = 0$, $f'_y = 1$, недифференцируема. 9) $f'_x = -1$, $f'_y = 1/2$, недифференцируема. 10) $f'_x = 1$, $f'_y = 0$, недифференцируема. 11) $f'_x = \pi/2$, $f'_y = 0$, недифференцируема. 12) $f'_x = f'_y = 0$, дифференцируема.

**3.22.** 1) Не существует. 2) $dy$. 3) $dx - dy$. 4) $dx + 2\,dy$.

**3.24.** 1) $\alpha \in (1/3;\ 3)$. 2) $\alpha \in (1;\ 4)$. 3) $\alpha \in [0;\ 5/2]$. 4) $\alpha \in [1/2;\ +\infty)$.

**3.25.** $\alpha \in (1;\ +\infty)$.

3.26. 1) $\{(0;\ 0)\} \cup \{(x;\ y) \mid xy \neq 0\}$. 2) $\{(0;\ 0)\} \cup \{(x;\ y) \mid x \neq 0\}$. 3) $\{(0;\ 0)\} \cup \{(x;\ y) \mid x^2 \neq y^2\}$. 4) $\{(0;\ 0)\} \cup \{(x;\ y) \mid xy \neq 0\}$.

3.27. 1/2; формула (7) неприменима, так как $f(u;\ v)$ недифференцируема в точке (0; 0).

3.28. 1) $f'_x = 2xf'_u$, $f'_y = e^y f'_u$.

2) $f'_x = \dfrac{3x^2 + y^2}{3\sqrt[3]{(x^3 + xy^2)^2}}\, f'_u$, $f'_y = \dfrac{2xy}{3\sqrt[3]{(x^3 + xy^2)^2}}\, f'_u$.

3) $f'_x = 3\sin 6x \cos^3 2y f'_u$, $f'_y = -3\sin^2 3x \sin 4y \cos 2y f'_u$.

4) $f'_x = -\dfrac{f'_u}{1 + (x + \ln y)^2}$, $f'_y = -\dfrac{f'_u}{y\,(1 + (x + \ln y)^2)}$.

3.29. 1) $f'_x = yf'_u + \dfrac{1}{y} f'_v$, $f'_y = xf'_u - \dfrac{x}{y^2} f'_v$. 2) $f'_x = 2xf'_u + ye^{xy}f'_v$, $f'_y = -2yf'_u + xe^{xy}f'_v$. 3) $f'_x = \cos y\, f'_u + \sin y\, f'_v$, $f'_y = -x\sin y\, f'_u + x\cos y\, f'_v$. 4) $f'_x = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} f'_u + yx^{y-1}f'_v$, $f'_y = x^y \ln x\, f'_v$.

3.30. 1) $f'_u\left(y - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + f'_u\left(x + \dfrac{2y}{x}\right)dy$. 2) $\left(2xf'_v - \dfrac{y}{(x+y)^2} f'_u\right)dx + \left(\dfrac{x}{(x+y)^2} f'_u - 3y^2 f'_v\right)dy$. 3) $-\dfrac{y}{x^2 + y^2} f'_v\, dx + \left(2yf'_u + \dfrac{x}{x^2 + y^2} f'_v\right)dy$. 4) $\left(2xf'_u + f'_v + yzf'_w\right)dx + \left(2yf'_u + f'_v + xzf'_w\right)dy + \left(2zf'_u + f'_v + xyf'_w\right)dz$.

3.33. $u = 2x\,(y - x^2) + \dfrac{1}{3}(y^3 - x^6)$.

3.34. $u = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2 + y^2}{4} + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{y}$.

3.37. Неверно. 3.38. Неверно.

3.39. 1) $2\sqrt{2}$. 2) $-1$. 3) 62. 4) 5/9. 5) 2. 6) $4\sqrt{n/15}$.

3.40. 1) $-2i + 3j$. 2) $i + 2(1 + \ln 2)\,j$. 3) $-\dfrac{i + 2j + 3k}{14\sqrt{14}}$. 4) $i/4$. 5) $e^{x_0 + x_0y_0 + x_0y_0z_0}((1 + y_0 + y_0z_0)\,i + (x_0 + x_0z_0)\,j + x_0y_0k)$. 6) $2\,\dfrac{x_0 i + 2y_0 j + 3z_0 k}{x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 - 1}$.

3.41. 1) $(-2;\ 1;\ 1)$, $(-2;\ 1;\ -1)$. 2) $(t;\ t;\ t)$, $t \in \mathbb{R}$.

3.42. 1) 0. 2) $1/(2a)$. 3.43. 1) $-18$. 2) 52/5. 3) 1/5. 4) 0.

3.44. 1) $-1/\sqrt{2}$. 2) $\sqrt{3}/2$. 3) $-1/\sqrt{3}$. 4) $(2 + \sqrt{2})/6$. 5) $\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{\pi^2 + 16}}$. 6) $2\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4} + \dfrac{z_0^2}{c^4}}$.

3.45. 1) $2\sqrt{c}$, 2) $2e^{-c/2}$. 3.46. $-\sqrt{2c\,(a^2 + b^2)}/|ab|$. 3.47. $-1/2$.

3.48. 1) $\sqrt{290}$. 2) $\sqrt{29}/2$. 3) 7/6. 4) $\sqrt{137}/8$.

3.49. 1) $\dfrac{-4i + 5j}{\sqrt{41}}$. 2) $\dfrac{i - j}{\sqrt{2}}$. 3) $\dfrac{2i + 4j - \sqrt{3}\,k}{\sqrt{23}}$. 4) $\dfrac{i - 6k}{\sqrt{37}}$.

3.50. $1000\pi$.

3.51. 1) $\arccos\left(-1/\sqrt{10}\right)$. 2) $\arccos\left(7\sqrt{2}/10\right)$. 3) $\arccos(-8/9)$. 4) $\pi/2$.

3.52. 1) $\arccos 37/\left(5\sqrt{194}\right)$. 2) $\pi/2$. 3) $\pi/2$. 4) $\pi/2$.

3.56. 1) $-\dfrac{x}{x^2 + y^2}$. 2) $\dfrac{x + z}{3\sqrt[3]{x^2 + z^2}}$. 3) $4\,(x + 2y + 3z)^4$. 4) 0. 5) $\dfrac{xy}{z}(1 + \ln x) + x\varphi(y/x;\ z/x)$. 3.59. Неверно.

**3.60.** 1) $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$. 2) $\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\ln 2}{2}$. 3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{1+u_0}$, $u_0$ — корень уравнения $u+\ln u=0$. 4) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{5u_0}{9}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{4u_0}{9}$, $u_0$ — корень уравнения $u/3=1+\operatorname{arctg}(u/3)$.

**3.61.** 1) а) $\frac{\partial u}{\partial x}=-2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{10}{3}$; б) $\frac{\partial u}{\partial x}=2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-3$. 2) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos 1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-1$. 3) $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2}{2+\pi}$. 4) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_0+u_0^2-u_0^3}{2+2u_0+u_0^3}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u_0+u_0^2}{2+2u_0+u_0^3}$.

**3.62.** $\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-1$, если $u(1;\ -2)=0$;

$\frac{\partial u}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1/2$, если $u(1;\ -2)=-2$;

$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1/2$, если $u(1;\ -2)=2$.

**3.63.** 1) $dx+dy$. 2) $\frac{u_0}{1+u_0}(dx+u_0\,dy)$, $u_0$ — корень уравнения $u^{-1}=1+\ln u$.

**3.64.** 1) а) $\frac{2\,dx-dy}{9}$, б) не существует. 2) а) Не существует, б) $-dx-\frac{14}{9}dy$.

**3.65.** $du=\frac{2\,dx-\pi\,dy}{\pi-2}$, если $u(1;\ 1)=1$;

$du=\frac{2\,dx-\pi\,dy}{2-\pi}$, если $u(1;\ 1)=-1$;

$du=0$, если $u(1;\ 1)=0$.

**3.66.** $\frac{u_0^2(dx+dy)-z_0^2\,dz}{u_0(u_0-2x_0-2y_0)}$, $u_0$ — корень уравнения $u^3-3(x_0+y_0)u^2+z_0^3=0$.

**3.67.** 1) $-2$. 2) $-1$.

**3.68.**
$$\frac{\left((y+z)(z+1)+(y-x)(x+1)e^{x-z}\right)dx}{(y+z)^2(z+1)}+\frac{\left((y-x)(y+1)e^{y-z}-(x+z)(z+1)\right)dy}{(y+z)^2(z+1)}.$$

**3.69.** $\frac{(f'_u-f'_w)\,dx+(f'_v-f'_u)\,dy}{f'_v-f'_w}$.

**3.75.** $\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{3},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{3}$.

**3.76.** $du=\frac{dx+dy}{2}$, $dv=-\frac{dx}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dy$.

**3.77.** $dz=\frac{3\,dx-dy}{2}$. **3.78.** $dz=\frac{3(y-x^2)\,dx+3x\,dy}{2}$, $y>x^2/2$.

**3.79.** 1) $dz = -\dfrac{c}{\operatorname{sign}\sin v}\cdot\dfrac{\dfrac{x\,dx}{a^2}+\dfrac{y\,dy}{b^2}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}$, $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$.

2) $dz = \dfrac{c}{\operatorname{sign}\operatorname{sh} v}\cdot\dfrac{\dfrac{x\,dx}{a^2}+\dfrac{y\,dy}{b^2}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1}}$, $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$.

**3.80.** 1) $u_0(\cos v_0\,dx+\sin v_0\,dy)$. 2) $|u_0|$.

**3.83.** $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} = -\dfrac{1}{\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)} & \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,v)}\\ \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,x)} & \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,y)}\end{pmatrix}$.

**3.84.** $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\dfrac{\partial(g;F)}{\partial(u;v)}}{\dfrac{\partial(f;g)}{\partial(u;v)}}\,\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

**3.85.** 1) $w=\dfrac{r}{\dfrac{dr}{d\varphi}}$. 2) $\dfrac{dr}{d\varphi}=r$. 3) $\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2=\dfrac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. 4) $\dfrac{dr}{dt}=r^3$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=-1$. 5) $w=r\dfrac{\partial u}{\partial r}$. 6) $w=r\cos 2\varphi\dfrac{\partial u}{\partial r}-\sin 2\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$. 7) $w=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$. 8) $w=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\varphi)}$.

**3.86.** $u=f(x^2+y^2)$, $f$ — произвольная дифференцируемая функция.

**3.87.** 1) $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=e^u\operatorname{sh} v$. 2) $\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$. 3) $(2u+v-z)\dfrac{\partial z}{\partial u}+(u+2v-z)\dfrac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$. 4) $v(z^2-u)\dfrac{\partial z}{\partial v}=z(z^2+u)$.

**3.88.** 1) $z=f(x+y)$. 2) $z=xf(y/x)$. 3) $z=x+f(y-\alpha z)$. 4) $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+f(y/x)$, где $f$ — произвольная дифференцируемая функция.

**3.89.** $\left(u\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(v\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

**3.90.** $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{x-z}{y}$. **3.91.** $\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{u}{v}$.

**3.92.** 1) $z=e^{x+y+f(x^2+y^2)}$. 2) $z=xy+f(yz-x)$, где $f$ — произвольная дифференцируемая функция.

**3.93.** $w=f(y-x;\,z-x)$, где $f$ — произвольная дифференцируемая функция.

**3.94.** $\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}+\dfrac{\partial w}{\partial t}+3w+e^u+e^v+e^t=0$.

**3.95.** $\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2+\dfrac{1}{r^2\cos^2\psi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$.

**3.96.** $\sum\limits_{i=1}^{n}(\operatorname{grad} y_i)^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y_i}\right)^2$. **3.97.** $\dfrac{\partial s}{\partial t}=\dfrac{uv}{t}$.

**3.98.** $\begin{pmatrix}dx+2\,dy\\ -dy+dz\end{pmatrix}$. **3.99.** $\begin{pmatrix}z\,dy+y\,dz\\ x\,dz+z\,dx\\ y\,dx+x\,dy\end{pmatrix}$.

**3.100.** 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, дифференцируемо. 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, не дифференцируемо.

**3.101.** $f'$ — единичная матрица порядка $n$.

**3.102.** $f' = (a_{ik})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

**3.103.** 1) $9(x^2 + y^2)^2$. 2) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - \cos 2y)$.

**3.104.** $pr(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}$.

**3.105.** $pqr^2(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}(\cos\psi)^{2q-1}(\sin\psi)^{q-1}$.

**3.106.** 1) $xy^2$. 2) $(1 - r^2)^{-5/2}$.

**3.107.** 1) $\prod\limits_{\substack{i,\,k=1 \\ i>k}}^{n}(x_i - x_k)$. 2) $\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i - a_i}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i - a_i)$.

## § 4. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора и ряд Тейлора

**4.1.** 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 4(x^3 + y^3) - 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12xy^2$. 2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (1 + xy)e^{xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2e^{xy}$. 3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1 + y^2)^2}$, $xy \neq 1$. 4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y - 1)x^{y-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (1 + y\ln x)x^{y-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x$.

**4.2.** 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$. 2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. 3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1$. 4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\pi^3}{16}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\pi}{4}$. 5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1$. 6) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}$. 7) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1/2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$. 8) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 6$.

**4.3.** $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ не существуют.

**4.4.** $f''_{xy} = -1$, $f''_{yx} = 1$.

**4.6.** 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2yz^3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 3y^2z^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xz^3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = 6xyz^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6xy^2z.$$

2) $-\sin(x + y + z)$.

**4.7.** 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{9}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = -\frac{4}{9}$.

2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = e$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2$.

**4.8.** 1) $-4$, 2) $2(x + y)^{-3}$, $x + y > 0$. 3) $\sin y\cos(x + \cos y)$.

4) $8e^{2y}\sin(e^{2y} - 2x)$.

4.9. 1) $\frac{15}{8}\sqrt{\frac{yz^3}{x}}$. 2) 0. 3) $(1+3xyz+x^2y^2z^2)\,e^{xyz}$. 4) 0.

4.10. $\frac{48\,(x_1-x_3)^2\,(x_2-x_4)^2}{r^8}-\frac{6}{r^4}$, где $r^2=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$.

4.11. 1) $p!q!$. 2) $\frac{2\,(-1)^p\,(p+q-1)!\,(qx+py)}{(x-y)^{p+q+1}}$.

3) $(x^2+y^2+2px+2qy+p^2-p+q^2-q)\,e^{x+y}$. 4) 0.

4.12. $\sin(q\pi/2)$. 4.13. $(x+p)\,(y+q)\,(z+r)\,e^{x+y+z}$.

4.14. 1) $2dx\,dy$. 2) $2\sin 2y\,dx\,dy+2x\cos 2y\,dy^2$.

3) $e^{xy}\left(y\,dx^2+2x\,dx\,dy+\frac{x^2y^2-2xy+2}{y^3}\,dy^2\right)$. 4) $-\frac{y}{x^2}\,dx^2+\frac{2}{x}\,dx\,dy$.

5) $2\,\frac{(y^2-x^2)\,(dx^2-dy^2)-4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. 6) $\frac{xy^3\,dx^2+2\,dx\,dy+x^3y\,dy^2}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$.

4.15. 1) $e^{-1}\,(dx^2+dy^2)$. 2) $e\,(6\,dx^2-8\,dx\,dy+3\,dy^2)$. 3) $-2\,dx\,dy$.
4) $2\,(dx^2-dy^2)$. 5) $-2\,(dx^2-\pi\,dx\,dy)$. 6) $2\,(dx^2-2\,dx\,dy+5\,dy^2)$.
7) $(dx-dy)^2$. 8) $2\,(1+\ln 2)\,dx\,dy+2\ln^2 2\,dy^2$. 9) $2\,dx\,dy+\pi^2\,dy^2$.
10) $-\frac{8}{9}\,(7\,dx^2+4\,dx\,dy+dy^2)$. 11) $-dx^2+4\,dx\,dy-2\,dy^2$. 12) $2\,dx\,dy$.
13) $2\,(dx\,dy+dy^2)$. 14) $-2\sqrt{3}\,dx\,dy+\ln^2 2\,dy^2$.

4.16. 1) Вся плоскость. 2) Вся плоскость, за исключением точки (0; 0).
3) Счетное множество полос $-x+\frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant y\leqslant -x+\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

4.17. 1) $2\,(dx\,dy+dy\,dz+dx\,dz)$. 2) $-\left(\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}\right)^2$.

4.18. 1) $6\,dz^2-4\,dx\,dy+8\,dx\,dz+4dy\,dz$.
2) $\alpha(\alpha-1)\,dx^2+\beta(\beta-1)\,dy^2+\gamma(\gamma-1)\,dz^2+2\alpha\beta\,dx\,dy+$
$+2\beta\gamma\,dy\,dz+2\alpha\gamma\,dx\,dz$.

4.19. 1) $\frac{1}{2}\,dx^2+\frac{1}{2}\,dy^2+2\,dx\,dy-dx\,dz-dy\,dz$.
2) $2\,(dy^2-dx\,dy+dy\,dz-dx\,dz)$.

4.20. $$\frac{2}{n^2}\left[(n-2)\sum_{i=1}^{n}dx_i^2-4\sum_{\substack{i,\,j=1\\ i<j}}^{n}dx_i\,dx_j\right].$$

4.21. 1) $6\,dx^2\,dy$. 2) $6\,(dx^3+dy^3+3\,dx\,dy\,(dy-dx))$.
3) $-8\cos(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)^3-12\sin(x^2+y^2)\,(x\,dx+y\,dy)\,(dx^2+dy^2)$.
4) $6\,dx\,dy\,dz$.

4.22. 1) $6\,dx^2\,dy$. 2) $(2\,dx+dy)^3$. 3) $-3\,dx\,dy^2$.
4) $6\,(dx\,dy^2+dy\,dz^2+dz\,dx^2)$.

4.23. 1) $\cos(x+y)\,(dx+dy)^4$. 2) $2\left(\frac{dx^4}{x^3}+\frac{dy^4}{y^3}+\frac{dz^4}{z^3}\right)$.

4.24. $dx^6-15\,dx^4\,dy^2+15\,dx^2\,dy^4-dy^6$.

4.25. 1) $e^{ax+by}\,(a\,dx+b\,dy)^n$.

2) $\frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(x+y+z)^n}\,(dx+dy+dz)^n$.

**4.26.** 1) $24\,(dx^4 + 4\,dx^3\,dy + 2\,dx\,dy^2\,dz - 3\,dx\,dy\,dz^2)$.
2) $24\,(dx^4 + 5\,dx^3\,dy + dx\,dz^3)$.

**4.27.** 1) $f''(u)\,(dx+dy)^2$. 2) $f''(u)\,\dfrac{(x\,dx+y\,dy)^2}{x^2+y^2} + f'(u)\,\dfrac{(y\,dx-x\,dy)^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.
3) $f''(u)\,(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz)^2 + 2f'(u)\,(z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx)$.
4) $4f''_{uu}(x\,dx+y\,dy)^2 + 4f''_{vv}(x\,dx - y\,dy)^2 + 4f''_{ww}(y\,dx + x\,dy)^2 +$
$+ 8f''_{uv}(x^2\,dx^2 - y^2\,dy^2) + 8f''_{uw}(x\,dx + y\,dy)(y\,dx + x\,dy) +$
$+ 8f''_{vw}(x\,dx - y\,dy)(y\,dx + x\,dy) + 2f'_u(dx^2+dy^2) + 2f'_v(dx^2 - dy^2) + 4f'_w\,dx\,dy$.

**4.28.** 2) $\dfrac{A}{t} + B$. **4.35.** 2) а) $y + \dfrac{x^3-y^3}{3}$. б) $\sin x + y + \dfrac{xy\,(x+y)}{2}$.

**4.37.** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{(x-t)^3}{4} + \dfrac{(x+t)^3}{108}$. **4.40.** 2) 0.

**4.41.** 1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{4}{15}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$. 2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{c}{ab}$.

**4.42.** 1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{u}{(1-u)^3}$.
2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0$,
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2\,(x-u)(y+1)(x^2+y^2+u^2-2xu)}{(x^2+y^2+u^2-2xu-y)^3}$.

**4.43.** 1) $-\dfrac{63}{2}\,dx^2 + 206\,dx\,dy - 306\,dy^2$.
2) $-\dfrac{4}{27}\,(dx^2 - 7\,dx\,dy + dy^2)$.

**4.44.** 1) $\dfrac{c^4}{a^2b^2u^3}\,((y^2-b^2)\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + (x^2-a^2)\,dy^2)$.
2) $\dfrac{x+y+u}{(1-x-y-u)^3}\,(dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2)$.
3) $\dfrac{1}{(x+y-yu)^3}\,((yu-x)\,dx^2 - 2\,(yu^2 - (u-1)(x+y))\,dx\,dy +$
$+ (yu^3 - (x+2y)\,u^2 + 2\,(x+y)\,u)\,dy^2)$.
4) $-\dfrac{u}{(x^2-y^2)^2}\,(y\,dx - x\,dy)^2$.

**4.45.** 1) $-\dfrac{y^2u^2\left((f'_2)^2 f''_{11} - 2f'_1f'_2f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22}\right) - 2u\left(xf'_1 + yf'_2\right)(f'_1)^2}{(xf'_1 + yf'_2)^3}$.
2) $-\dfrac{(f'_3)^2\left(f''_{11} + 2f''_{12} + f''_{22}\right) - 2\left(f'_1 + f'_2\right)f'_3\left(f''_{13} + f''_{23}\right) + \left(f'_1 + f'_2\right)^2 f''_{33}}{(f'_3)^3}$.

**4.46.** 1) $-\dfrac{(f'_2)^2 f''_{11} - 2f'_1f'_2f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22}}{(f'_1 + f'_2)^3}\,(dx - dy)^2$.
2) $\dfrac{(f'_2)^2 f''_{11} - 2f'_1f'_2f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22}}{(xf'_1 + yf'_2)^3}\,(y\,dx - x\,dy)^2$.

**4.49.** 13/121. **4.50.** $d^2u = -d^2v = -\dfrac{8}{\pi^2}\,dx\,dy$.

**4.51.** 1) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$. 2) $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0$. 3) $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$.

**4.52.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. 2) $5\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial z}{\partial v}$. 3) $2u\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial u}=0$. 4) $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+$ $+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+a^2e^{2u}z=0$. 5) $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2\frac{\partial z}{\partial u}=0$. 6) $2u\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial z}{\partial v}$. 7) $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. 8) $2v\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial v}=0$. 9) $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. 10) $(u^2+v^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=2u\frac{\partial z}{\partial u}$.

**4.53.** 1) $z=e^{-2(y+3x)}f(x+y)+g(y+3x)$. 2) $z=f(y-x^2)+g(y+x^2)$, где $f$ и $g$ — произвольные, дважды дифференцируемые функции.

**4.55.** 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. 2) $\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1$.

**4.56.** 1) $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+(c-ab)\,w=0$.

2) $w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$.

**4.57.** 1) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(1-\frac{v}{u}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$. 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$.

3) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=2w$. 4) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$.

5) $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\frac{w}{4\sin^2(u-v)}$. 6) $\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=0$.

**4.58.** $z=xf(x+y)+yg(x+y)$, где $f$ и $g$ — произвольные, дважды дифференцируемые функции.

**4.59.** 1) $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial z}\right)^2=\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$. 2) $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$.

**4.60.** 1) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$. 2) $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial v}=0$.

**4.61.** 1) $\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i}=0$. 2) $\frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2}=0$.

**4.62.** $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)+\frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$.

**4.63.** $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2}=0$.

**4.64.** $(1+u^2)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+(1+v^2)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

**4.65.** 1) $f(x;y)=1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2$. 2) $f(x;y)=$ $=2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$. 3) $f(x;y)=-9+9(x-1)-$ $-21(y-2)+3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-12(y-2)^2+(x-1)^3-2(y-2)^3$. 4) $f(x;y)=6+3(x-2)+(y+1)+(x-2)^2-(x-2)(y+1)+(y+1)^2+$ $+(x-2)^3$.

**4.66.** $f(x;y)=ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2+2(ax_0+by_0)(x-x_0)+$ $+2(bx_0+cy_0)(y-y_0)+a(x-x_0)^2+2b(x-x_0)(y-y_0)+c(y-y_0)^2$.

**4.67.** 1) $f(x;y;z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2+2(x-1)(y-1)+$ $+2(x-1)(z+2)+2(y-1)(z+2)$. 2) $f(x;y;z)=2-4(y-1)+$ $+7(z-2)+x^2+3(z-2)^2-2(y-1)(z-2)$. 3) $f(x;y;z)=6+6(x-1)+$

$+3(y-2)+2(z-3)+3(x-1)(y-2)+2(x-1)(z-3)+(y-2)(z-3)+$ $+(x-1)(y-2)(z-3)$. 4) $f(x;y;z)=2+3(x-1)-3y+3(z-1)+$ $+3(x-1)^2+3(z-1)^2-3(x-1)y-3y(z-1)+(x-1)^3+y^3+(z-1)^3-$ $-3(x-1)y(z-1)$.

**4.68.** 1) $1-(x-2)+(y-1)+(x-2)^2-2(x-2)(y-1)+(y-1)^2$. 2) $2+\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(y-2)-\frac{1}{64}(x-2)^2-\frac{1}{32}(x-2)(y-2)-\frac{1}{64}(y-2)^2$. 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$. 4) $\sin x_0\cos y_0+$ $+\cos x_0\cos y_0(x-x_0)-\sin x_0\sin y_0(y-y_0)-\frac{1}{2}\sin x_0\cos y_0(x-x_0)^2-$ $-\cos x_0\sin y_0(x-x_0)(y-y_0)-\frac{1}{2}\sin x_0\cos y_0(y-y_0)^2$.

**4.69.** $f(x;y)=x+\frac{xy}{2}+o(\rho^2),\qquad \rho\to 0;$

$$r_2(x;y)=-\frac{xy^2}{16}(2+\theta y)(1+\theta y)^{-5/2},\quad 0<\theta<1.$$

**4.70.** 1) $f(x;y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+$ $+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+o(\rho^2),\quad \rho\to 0;$

$$r_2(x;y)=-\frac{1}{6}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\cos\xi\sin\eta+3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\left(y-\frac{\pi}{4}\right)\sin\xi\cos\eta+\right.$$
$$\left.+3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2\cos\xi\sin\eta+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^3\sin\xi\cos\eta\right),$$

где $\xi=\frac{\pi}{4}+\theta\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\eta=\frac{\pi}{4}+\theta\left(y-\frac{\pi}{4}\right)$, $0<\theta<1$.

2) $f(x;y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o(\rho^2)$, $\rho\to 0$; $r_2(x;y)=$ $=\frac{1}{6}\xi^\eta\left((x-1)^3\frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{\xi^3}+3(x-1)^2(y-1)\frac{2\eta-1+(\eta^2-\eta)\ln\xi}{\xi^2}+\right.$ $\left.+3(x-1)(y-1)^2\frac{\ln\xi(2+\eta\ln\xi)}{\xi}+(y-1)^3\ln^3\xi\right)$, где $\xi=1+\theta(x-1)$, $\eta=1+\theta(y-1)$, $0<\theta<1$.

**4.71.** 1) $\frac{\cos x}{\cos y}=1-\frac{x^2-y^2}{2}+o(\rho^2)$. 2) $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1+y}=\frac{\pi}{4}+\frac{x-y}{2}-$ $-\frac{x^2-y^2}{4}+o(\rho^2)$. 3) $\sqrt{\frac{(1+x)^\alpha+(1+y)^\beta}{2}}=1+\frac{\alpha x+\beta y}{4}+$ $+\frac{\alpha(3\alpha-4)x^2-2\alpha\beta xy+\beta(3\beta^2-4)y^2}{32}+o(\rho^2)$.

**4.72.** $f=xy+yz+zx+o(\rho^2)$.

**4.73.** $f=2(z-1)-(z-1)^2+xy+o(\rho^2)$.

**4.74.** 1) $f=1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+x^3y+$ $+x^2y^2+xy^3+y^4+o(\rho^4)$. 2) $f=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^4+2x^2y^2+y^4)+$ $+o(\rho^4)$. 3) $f=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{24}(x^4+6x^2y^2+y^4)+o(\rho^4)$. 4) $f=x-$ $-\frac{x^3}{6}+\frac{xy^2}{2}+o(\rho^4)$. 5) $f=y+xy+\frac{x^2y}{2}-\frac{y^3}{6}-\frac{xy^3}{6}+\frac{yx^3}{6}+o(\rho^4)$. 6) $f=y+2xy-\frac{y^2}{2}-xy^2+2x^2y+\frac{y^3}{3}+\frac{4}{3}x^3y-x^2y^2+\frac{2}{3}xy^3-\frac{y^4}{4}+o(\rho^4)$.

**4.75.** 1) $f = \frac{x}{2} - \frac{x(y-2)}{4} + \frac{x(y-2)^2}{8} - \frac{x(y-2)^3}{16} + o(\rho^4)$. 2) $f = x\ln 2 + \frac{x(y-2)}{2} - \frac{\ln 2}{6}x^3 - \frac{x(y-2)^2}{8} - \frac{x^3(y-2)}{12} + \frac{x(y-2)^3}{24} + o(\rho^4)$.

**4.76.** $f = \sum\limits_{k=1}^{m}(x^k - y^k) + o(\rho^m)$.

**4.77.** $f = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i x^{2k-2i}y^{2i} + o(\rho^{2m})$.

**4.78.** $f = \sum\limits_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i(x-1)^{k-i}(y+1)^i + o(\rho^m)$.

**4.79.** 1) $u = 1 + 2(x-1) - (y-1) - 8(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + o(\rho^2)$. 2) $u = 1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{1}{8}(y-1)^2 + o(\rho^2)$. 3) $u = 1 + (x-1) + \frac{1}{4}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)(y-1) + \frac{9}{64}(y-1)^2 + o(\rho^2)$.

**4.80.** $u = e + \frac{1}{3}(x-2e) + \frac{e}{3}(y-1) - \frac{1}{54e}(x-2e)^2 + \frac{2}{27}(x-2e)(y-1) - \frac{2e}{27}(y-1)^2 + o(\rho^2)$.

**4.81.** $F(h) = f(x;y) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}\right)h^2 + o(h^2)$.

**4.82.** $F(h) = f(x;y) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial y^2}\right)h^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{\partial^4 f(x;y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(x;y)}{\partial y^4}\right)h^4 + o(h^5)$.

**4.84.** 1) $f = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i x^{k-i}y^i$, $|x-y| < 1$.

2) $f = 1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{2k}\frac{(-1)^{k+i}}{(2k)!}\cdot C_{2k}^i x^{2k-i}y^i$, $\mathbb{R}^2$.

3) $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\sum\limits_{i=0}^{k-1}C_{2k}^{2i+1}x^{2k-2i-1}y^{2i+1}$, $\mathbb{R}^2$.

4) $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{\alpha_1+2\alpha_2=k}\frac{(-1)^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,(2\alpha_2)!}x^{\alpha_1}y^{2\alpha_2}$, $\mathbb{R}^2$.

5) $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{2\alpha_1+2\alpha_2=k}\frac{(-1)^{\alpha_1}}{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!}x^{2\alpha_1}y^{2\alpha_2}$, $\mathbb{R}^2$.

6) $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i x^{k-i}y^i$, $-1 < x+y \leqslant 1$.

7) $f=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} C_{1/2}^{i}C_{1/2}^{k-i}x^{i}y^{k-i}$, $\quad |x|<1,\ |y|<1.$

8) $f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}(x^{2k+1}-y^{2k+1})$, $\quad |x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1.$

**4.85.** 1) $f=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left((y-1)^k+(x-1)(y-1)^{k-1}\right)$ $\quad 0<y<2.$

2) $f=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}(x-1)^{k-i}\,y^i$, $\quad 0<x<2,\quad |y|<1.$

3) $f=e^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}C_k^i(x-2)^{k-i}\,(y-2)^i$, $\quad \mathbb{R}^2.$

4) $f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{i=0}^{2k}C_{2k}^{i}x^{2k-i}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^i$, $\quad \mathbb{R}^2.$

5) $f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\sum_{i=0}^{2k}C_{2k}^{i}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k-i}y^{2i}$, $\quad \mathbb{R}^2.$

6) $f=\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left((x-1)^k+\frac{(-1)^k}{2^k}(y-1)^k\right)$, $\quad 0\leqslant x<2,$

$-1<y\leqslant 3.$

7) $f=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\,C_k^i x^{k-i}(y-1)^i$, $\quad -1\leqslant x<1,\quad 0<y\leqslant 2,$

$x<y\leqslant x+2.$

8) $f=\sum_{k=1}^{\infty}\sum\frac{(-1)^k}{\alpha_1\alpha_2}(x-1)^{\alpha_1}(y-1)^{\alpha_2}$, суммирование $\sum$ производится по всем натуральным $\alpha_1$ и $\alpha_2$, таким что $\alpha_1+\alpha_2=k$; $0<x\leqslant 2$, $0<y\leqslant 2$.

**4.86.** $F(u;v)=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i!\,(k-i)!}\,\frac{\partial^k f(x;y)}{\partial x^i\,\partial y^{k-i}}\,u^i v^{k-i}.$

## § 5. Экстремумы функций

**5.1.** 1) Минимум $u(7;-2)=-39$. 2) Максимум $u(1;0)=4$. 3) Экстремумов нет. 4) Нестрогий минимум $u=0$ при $y=2x+1$.

**5.2.** 1) Минимум $u(0;-2/3)=-4/3$. 2) Минимум $u(1;2)=-25$, максимум $u(-1;-2)=31$. 3) Минимум $u(0;0)=0$, максимум $u(-5/3;0)=$ $=125/27$. 4) Минимум $u(1/3;2)=-47/9$, максимум $u(-1/3;0)=-7/9$. 5) Если $a>0$, то максимум $u(-a;-a)=a^3$; если $a<0$, то минимум $u(-a;-a)=a^3$; если $a=0$, то экстремумов нет.

**5.3.** 1) Максимум $u(1;3)=9$. 2) Минимумы $u(\pm 1;0)=-1$. 3) Минимумы $u\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)=u\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)=-8$. 4) Максимум $u(0;0)=0$, четыре минимума $u(\pm 1/2;\pm 1)=-9/8$. 5) Максимум $u(3;6)=324$. 6) Максимум $u(2;3)=108$; нестрогий минимум $u(0;y)=0$, $y\in(0;6)$; нестрогий максимум $u(0;y)=0$, $y\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$.

**5.4.** 1) Максимум $u(-1; -1) = -3$. 2) Минимум $u(4; 2) = 6$. 3) Максимум $u(-3; -3) = -81$. 4) Экстремум $u\left(\sqrt[3]{a^2/b}; \sqrt[3]{b^2/a}\right) = 3\sqrt[3]{ab}$, если $a \neq 0$, $b \neq 0$; минимум, если $b/a > 0$; максимум, если $b/a < 0$.

**5.5.** 1) Минимум $u(2; 4) = -8$. 2) Экстремумов нет. 3) Минимум $u(0; -2) = 1$. 4) Экстремумов нет. 5) Два минимума $u(\pm 1; \mp 2) = -4$, два максимума $u(\pm 1; \pm 2) = 4$; нестрогий экстремум $u = 0$ в точках эллипса $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$, минимум при $xy > 0$, максимум при $xy < 0$. 6) Максимум $u(a/c; b/c) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, если $c > 0$; минимум $u(a/c; b/c) = -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, если $c < 0$.

**5.6.** 1) Минимум $u(-2; 0) = -2/e$. 2) Максимум $u(-4; -2) = 8/e^2$. 3) Минимум $u(0; 0) = 0$. 4) Экстремумов нет. 5) Минимум $u(0; 0) = -1$. 6) Минимум $u(1; 3) = -e^{-13}$, максимум $u(-1/26; -3/26) = 26e^{-1/52}$. 7) Минимум $u(0; 0) = 0$. Если $a > b$, то два максимума $u(\pm 1; 0) = a/e$; если $a < b$, то два максимума $u(0; \pm 1) = b/e$; если $a = b$, то нестрогий максимум $u = a/e = b/e$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$.

**5.7.** 1) Минимум $u(1; 2) = 7 - 10\ln 2$. 2) Экстремумов нет. 3) Два минимума $u(\pm 4; \pm 4) = 32(1 - 4\ln 2)$. 4) Два минимума $u\left(\pm 1/\sqrt{2e}; \pm 1/\sqrt{2e}\right) = -1/2e$, два максимума $u\left(\pm 1/\sqrt{2e}; \mp 1/\sqrt{2e}\right) = 1/2e$.

**5.8.** 1) Максимум $u(\pi/3; \pi/6) = 3\sqrt{3}/2$. 2) Максимум $u(\pi/3; \pi/3) = 3\sqrt{3}/8$, минимум $u(2\pi/3; 2\pi/3) = -3\sqrt{3}/8$. 3) Максимумы $u\left(\frac{7\pi}{12} + (k+n)\pi; \frac{7\pi}{12} + (k-n)\pi\right) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi + 2 + \sqrt{3}$, минимумы $u\left(\frac{5\pi}{12} + (k+n)\pi; -\frac{7\pi}{12} + (n-k)\pi\right) = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi - 2 - \sqrt{3}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. 4) Максимумы $u(2\pi k; 0) = 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

**5.9.** Стационарные точки $(\pm 1; 0)$, $(0; 0)$. Минимум $u(\pm 1; 0) = -1$. Нельзя, так как $d^2u$ в стационарных точках не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной квадратичной формой.

**5.11.** Да, см., например, **5.8.** 4). **5.12.** Нет, см., например, **5.6.** 5).

**5.13.** 1) Минимум $u(-2/3; -1/3; -1) = -1/3$. 2) Максимум $u(-3; 2; -1) = 22$. 3) Экстремумов нет. 4) Минимум $u(6; -18; 2) = -112$. 5) Максимум $u(4; 4; 2) = 128$. 6) Максимум $u(7; 7; 7) = 7^7$; нестрогий максимум или минимум $u = 0$ в точках плоскости $y = 0$, не лежащих на прямых $x = 0$, $z = 0$, $x + 3z = 49$.

**5.14.** 1) Минимум $u(1; 1; 1) = 5$, максимум $u(-1; 1; -1) = -3$. 2) Минимум $u(8; 4; 2) = 60$. 3) Минимум $u(1/2; 1; 1) = 4$, максимум $u(-1/2; -1; -1) = -4$. 4) Нестрогий минимум $u = 3$ в точках прямой $x = y = z$, кроме точки $(0; 0; 0)$.

**5.15.** 1) Максимум $u(\pi/2; \pi/2; \pi/2) = 4$. 2) Максимум $u(1/10; 0; 7/10) = 5/\sqrt{e}$, минимум $u(-1/10; 0; -7/10) = -5/\sqrt{e}$. 3) Максимум $u(4; 6; 10) = 13\ln 2 + 3\ln 3 + 5\ln 5$.

**5.16.** 1) Максимум $u(c; c; \ldots; c) = c^{1/c}$, $c = 2/(n^2 + n + 2)$. 2) Минимум $u\left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right) = (n+1)(b/a)^{1/(n+1)}$, $x_k^0 = a^{1-k/(n+1)}b^{k/(n+1)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

**5.17.** 1) Максимум $u(2; 3) = 5$. 2) Минимум $u(1; 0) = -7$. 3) Максимум $u(3; -1) = 13/3$. 4) Нестрогий максимум $u = 1$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 3$. 5) Нестрогий минимум $u = -4$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 25$.

**5.18.** Минимум $u_1(-1; 1) = -5$, максимум $u_2(-1; 1) = 1$. 2) Минимум $u_1(0; -2) = 1$, максимум $u_2(0; 16/7) = -8/7$. 3) Минимум $u_1(-1; 2) = 1$, максимум $u_2(-1; 2) = -2$. 4) Минимум $u_1(0; 0) = 2\sqrt{2}$, максимум $u_2(0; 0) = \sqrt{2}$, минимум $u_3(0; 0) = -\sqrt{2}$, максимум $u_4(0; 0) = -2\sqrt{2}$.

**5.19.** 1) Максимум $u(1/2; 1/2) = 1/4$. 2) Минимум $u(18/13; 12/13) = 36/13$. 3) Максимум $u(2; 1) = 3$. 4) Минимум $u(1; 0) = 0$, максимум $u(1/3; 1/3) =$

$= 1/27$. 5) Минимумы $u\left(\frac{5\pi}{8}+\pi k; \frac{3\pi}{8}+\pi k\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, максимумы $u\left(\frac{\pi}{8}+\pi k; -\frac{\pi}{8}+\pi k\right)=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $k \in Z$.

**5.20.** 1) $u(a/2; b/2)=ab/4$; минимум, если $ab<0$, максимум, если $ab>0$. 2) Минимум $u\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}; \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$. 3) $u\left(\frac{ab^2}{b^2-a^2}; \frac{a^2b}{a^2-b^2}\right)=$ $=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$; минимум, если $a^2>b^2$, максимум, если $a^2<b^2$; при $a=b$ экстремумов нет. 4) $u(a/3; 2b/3)=\frac{4}{27}ab^2$; минимум, если $a<0$, максимум, если $a>0$; $u(a; 0)=0$: минимум, если $a>0$, максимум, если $a<0$.

**5.21.** 1) Минимум $u(3; 4)=-20$, максимум $u(-3; -4)=30$. 2) Минимум $u(-4; 1)=9$, максимум $u(4; -1)=-7$. 3) Два минимума $u\left(\pm 1/\sqrt{2}; \mp 1/\sqrt{2}\right)=1/2$ и два максимума $u\left(\pm 1/\sqrt{2}; \pm 1/\sqrt{2}\right)=3/2$. 4) Два минимума $u(\pm 3; \mp 2)=-50$ и два максимума $u(\pm 4; \pm 3/2)=425/4$. 5) Минимум $u(-r/aA; -r/bA)=-rA$, максимум $u(r/aA; r/bA)=rA$, где $A=\sqrt{a^2+b^2}/|ab|$.

**5.22.** 1) Минимум $u(0; 0)=2$. 2) Минимум $u(1; 0)=1$. Метод Лагранжа неприменим в случаях 1)а) и 2), так как ранг матрицы (6) в точках минимума не равен единице.

**5.23.** 1) Минимум $u(-4; -4)=1/2$, максимум $u(4; 4)=3/2$. 2) Максимум $u(-1/2; -1/2)=-2\ln 2$. **5.24.** Нет, см., например, 5.22. 2).

**5.25.** 1) Минимум $u(6; 4; 3)=156$. 2) Максимум $u(2; 4; 6)=6912$. 3) Максимум $u(2; 2; 2)=512$. 4) Максимум $u(\pi/6; \pi/6; \pi/6)=1/8$. 5) Минимум $u(-1; 2; -2)=-9$, максимум $u(1; -2; 2)=9$. 6) Минимум $u(-2; 2; -2)=-8$, максимум $u(2; -2; 2)=8$. 7) Минимумы $u(1; 1; -1)=$ $=u(1; -1; 1)=u(-1; 1; 1)=u(-1; -1; -1)=-1$, максимумы $u(1; 1; 1)=$ $=u(1; -1; -1)=u(-1; -1; 1)=u(-1; 1; -1)=1$. 8) Минимум $u(6; 6; 3)=$ $=108$. 9) Минимумы $u(0; 0; \pm c)=c^2$, максимумы $u(\pm a; 0; 0)=a^2$. 10) Минимум $u\left(d\sqrt{a}; d\sqrt{b}; d\sqrt{c}\right)=d^2$, $d=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

**5.26.** 1) Максимум $u(11/4; -5/2; -11/4)=605/32$. 2) Минимумы $u(2; 2; 1)=u(2; 1; 2)=u(1; 2; 2)=4$, максимумы $u(4/3; 4/3; 7/3)=$ $=u(4/3; 7/3; 4/3)=u(7/3; 4/3; 4/3)=112/27$. 3) Максимум $u(1; 1; 1)=2$, минимум $u(-1; 1; 1)=0$. 4) Два минимума $u\left(0; \pm 1/\sqrt{2}; \mp 1/\sqrt{2}\right)=1$ и два максимума $u\left(\pm 2/\sqrt{3}; \mp 1/\sqrt{3}; \mp 1/\sqrt{3}\right)=2$. 5) Минимум $u(-2; 1; 4)=11$, максимум $u(2; -1; -4)=59$. 6) Два минимума $u\left(\pm 13/\sqrt{182}; \mp 2/\sqrt{182}; \mp 3/\sqrt{182}\right)=17/56$, два максимума $u\left(0; \pm 3/\sqrt{13}; \mp 2/\sqrt{13}\right)=1$.

**5.27.** 1) Минимум $u(A/a_1; \ldots; A/a_n)=A$, где $A=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^{-1}$. 2) Минимум $u(A/a_1; \ldots; A/a_n)=A$, где $A=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\right)^{-1}$. 3) Минимум $u(a/n; \ldots; a/n)=a^{\alpha}/n^{\alpha-1}$. 4) Минимум $u\left(\frac{1}{A}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}; \ldots; \frac{1}{A}\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}\right)=A^2$, где $A=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i}$. 5) Максимум $u(a\alpha_1/A; \ldots; a\alpha_n/A)=(a/A)^A\prod_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}$, где $A=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. 6) Минимум $u(-a_1/A;\ \ldots;\ -a_n/A)=-A$, максимум $u(a_1/A;\ \ldots;\ a_n/A)=A$, где $A=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_i^2}$.

5.28. 1) $M=14,\ m=-6$. 2) $M=13,\ m=-5$. 3) $M=21,\ m=-3$. 4) $M=13,\ m=-1$. 5) $M=9+4\sqrt{2},\ m=-7$. 6) $M=4,\ m=-1$. 7) $M=1,\ m=0$. 8) $M=\sqrt[4]{e},\ m=-2e$.

5.29. 1) $M=3,\ m=1$. 2) $M=10,\ m=2$. 3) $M=4,\ m=1$. 4) $M=6$. $m=-1$. 5) $M=8,\ m=-216$. 6) $M=3\sqrt{3}/2,\ m=0$.

5.30. 1) а) $M=4,\ m=2$. б) $M=12,\ m=-6$. 2) $M=225,\ m=25$. 3) $M=4,\ m=-1/2$. 4) $M=2\sqrt{3}/9,\ m=-2\sqrt{3}/9$. 5) $M=81,\ m=-81$. 6) $M=4e^5,\ m=-1$.

5.31. 1) $M=33,\ m=0$. 2) $M=7,\ m=-6$. 3) $M=1+\sqrt{2},\ m=-1/2$. 4) $M=300,\ m=0$.

5.32. $M=\sqrt{n},\ m=0$.

5.33. 1) $M=\sqrt{5}-1,\ m=-\sqrt{5}-1$. 2) $M=\frac{3}{7}(4+\sqrt{2}),\ m=\frac{3}{7}(4-\sqrt{2})$. 3) $M=7,\ m=1$. 4) $M=1,\ m=-1/2$.

5.34. 1) Не существуют. 2) $M=\sqrt{2},\ m=-1$. 3) $M=2,\ m=0$. 4) $M=e^{-1},\ m=0$.

5.35. Верно только при $n=1$, см., например, 5.34. 1).

5.37. 1) $19\sqrt{2}/8$. 2) $3\sqrt{5}/5$. 3) $(9\sqrt{5}-15)/\sqrt{50}$. 4) $8/\sqrt{130}$.

5.38. $(8/5;\ 16/5)$. 5.39. $3\sqrt{3}\,ab$. 5.40. $\sqrt{2},\ 2/\sqrt{5}$. 5.41. $|a-b|$. 5.42. $(3;\ -1;\ 1)$. 5.43. $\sqrt{11}$. 5.44. $256/13$. 5.45. 1) $(s/6)^{3/2}$. 2) $(a/12)^3$.

5.46. 1) $\frac{4\sqrt{3}}{9}R^3$. 2) $\frac{8}{27}Hr^2$. 3) $\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$. 4) $abh^2/2c$. 5.47. $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$.

5.48. $\frac{S}{3\sqrt[4]{27}}\sqrt{\frac{2S}{\pi}}$. 5.49. $\frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. 5.50. $\pi p^3/96$. 5.51. $s=6\sqrt[3]{V^2}$.

5.52. $\sqrt[6]{405\pi^2V^4}$. 5.53. $\arcsin(2/3)$.

5.54. Основание квадрат со стороной $\sqrt[3]{2V}+2d$, высота $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}+d$.

5.55. 1) $\frac{\pi ab}{|C|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. 2) $\pi abc\sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}}$.

5.56. 1) $n\sqrt[n]{a^3}$. 2) $n/\sqrt[n]{a}$.

5.57. $\bar{a}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{xx}-\bar{x}\cdot\bar{x}}$, $\bar{b}=\frac{\overline{xx}\cdot\bar{y}-\overline{xy}\cdot\bar{x}}{\overline{xx}-\bar{x}\cdot\bar{x}}$, где $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

**5.58.** Числа $m, m_1, m_2, \ldots, m_n, M$ должны образовывать геометрическую прогрессию, наибольшее значение скорости — $\left(\dfrac{2}{m^{1/(n+1)}+M^{1/(n+1)}}\right)^{n+1} Mv$.

**5.59.** $x=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i,$ где $M=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

**5.60.** $x=\dfrac{1}{A}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y=\dfrac{1}{A}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i,$

где $A=\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i\right)^2}$.

**5.61.** $\alpha=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2(\bar{x}\cdot\bar{y}-\overline{xy})}{\overline{xx}-\bar{x}\cdot\bar{x}-\overline{yy}+\bar{y}\cdot\bar{y}}, \quad p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha,$ где $\bar{x}=$ $=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad \bar{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad \overline{xy}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$.

**5.62.** $I_i=\dfrac{AI}{R_i}, \quad Q_{\min}=Q_0 AI^2,$ где $A=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{R_i}\right)^{-1}$.

## § 6. Геометрические приложения

**6.1.** 1) $x+2y-z=2, \quad x-2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$. 2) $2x+2y-z=2$, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. 3) $8x+8y+z+4=0, \quad \dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{8}=z-4$. 4) $x-2y+z=0, \quad x-1=\dfrac{y-1}{-2}=z-1$. 5) $z=-1, \quad \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ 6) $23x-19y+5z+60=0, \quad \dfrac{x+3}{23}=\dfrac{y-4}{-19}=\dfrac{z-17}{5}$. 7) Не существуют. 8) Не существуют. 9) $y-z=1, \quad \dfrac{x}{0}=y-1=-z$. 10) $x-\pi y+z=0$, $x-\pi=\dfrac{y-1}{-\pi}=z$. 11) $ex-z=0, \quad \dfrac{x-1}{e}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-e}{-1}$. 12) $x-y+$ $+2z=\dfrac{\pi}{2}, \quad x-1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\pi/4}{2}$.

**6.2.** 1) $3x+4y-12z=169, \quad \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{-12}$. 2) $x+y+3z=9$, $x-1=y-2=\dfrac{z-2}{3}$. 3) $x+11y+5z=18, \quad x-1=\dfrac{y-2}{11}=\dfrac{z+1}{5}$. 4) $2x+y+11z=25, \quad \dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z-2}{11}$. 5) $5x+4y+z=28$, $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{4}=z-6$. 6) $x+2y=4, \quad x-2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$. 7) $x+y-$ $-2z=0, \quad x-1=y-1=\dfrac{z-1}{-2}$. 8) $x+y-4z=0, \quad x-2=y-2=$ $=\dfrac{z-1}{-4}$.

**6.3.** 1) $12x-9y+2z=9$, $\frac{x-3}{12}=\frac{y-5}{-9}=\frac{z-9}{2}$. 2) $6x+3y-2z=$ $=7$, $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-4}{-2}$. 3) $3x-y-2z+4=0$, $\frac{x-1}{-3}=y-1=$ $=\frac{z-3}{2}$. 4) $\frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2}}(x+y)-(\operatorname{sh} 1)z=1$, $x=y=-\frac{\operatorname{cth} 1}{\sqrt{2}}\left(z-2\operatorname{sh} 1\right)$.

**6.4.** 1) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$. 2) $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=-1$, 3) $\frac{x_0x}{p}-$ $-\frac{y_0y}{q}=z+z_0$.

**6.5.** 1) $a^2\frac{x-x_0}{x_0}=b^2\frac{y-y_0}{y_0}=-c^2\frac{z-z_0}{z_0}$. 2) $p\frac{x-x_0}{x_0}=q\frac{y-y_0}{y_0}=$ $=\frac{z-z_0}{-1}$. 3) $a^2\frac{x-x_0}{x_0}=b^2\frac{y-y_0}{y_0}=-c^2\frac{z-z_0}{z_0}$, если $x_0^2+y_0^2+z_0^2\neq 0$.

**6.6.** 1) $x_0^{n-1}x+y_0^{n-1}y+z_0^{n-1}z=a^n$. 2) $(2r^2-a^2)x_0x+(2r^2+a^2)y_0y+$ $+(2r^2-a^2)z_0z=r^4$, $r^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2>0$.

**6.7.** 1) $(\cos v_0)x+(\sin v_0)y-z=0$, $x_0x+y_0y-z_0z=0$.

2) $\frac{\cos u_0\cos v_0}{3}x+\frac{\cos u_0\sin v_0}{2}y+(\sin u_0)z=1$, $\frac{x_0x}{9}+\frac{y_0y}{4}+z_0z=1$.

**6.8.** 1) $(\cos\psi_0\cos\varphi_0)x+(\cos\psi_0\sin\varphi_0)y+(\sin\psi_0)z=a+b\cos\psi_0$.
2) $(\cos\varphi_0\cos\psi_0)x+(\cos\varphi_0\sin\psi_0)y-(\sin\varphi_0)(z-\ln\operatorname{tg}(\varphi_0/2))=0$.

**6.9.** $x-6y+9z=16$, $5x+3y+9z+16=0$.

**6.10.** $x+2y-z+5=0$.

**6.11.** 1) $(0;3;3)$, $(0;3;-7)$, $(5;3;-2)$, $(-5;3;-2)$, $(0;-2;-2)$, $(0;8;-2)$.
2) $(1;1;0)$, $(1;-1;0)$, $(0;0;0)$, $(2;0;0)$. 3) $(0;2\sqrt{2};-2\sqrt{2})$, $(0;-2\sqrt{2};2\sqrt{2})$, $(2;-4;2)$, $(-2;4;-2)$, $(4;-2;0)$, $(-4;2;0)$.

**6.12.** 1) $2x-2y+4z=\pm\sqrt{22}$. 2) $x-y+2z=\pm\sqrt{5}$. 3) $x+2y-$ $-2=0$, $x+2y=0$.

**6.13.** 1) $4x-2y-3z=3$. 2) $3x+4y=24$, $3x-28y=120$.

**6.14.** 1) $x+y=1\pm\sqrt{2}$. 2) $2x+2y-z=4$.

**6.15.** $4x-5y-2z+2=0$.

**6.16.** $x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **6.17.** $9a^3/2$.

**6.20.** $z_0\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{x_0^2+y_0^2+1}}$. **6.22.** $x-2=\frac{y-10/3}{3}=\frac{z+4}{4}$.

**6.23.** $(-1;2\pm\sqrt{5};1)$. **6.24.** $(20/7;15/7;2)$, $(-20/7;-15/7;-2)$.

**6.25.** $\arccos(2/3)$, $\arccos(-2/3)$, $\arccos(-1/3)$.

**6.26.** $\left(0;\ 0;\ z_0+\frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right)}\right)$.

**6.27.** 1) $\pi/2$. 2) $\arccos\frac{2az_0}{b\sqrt{a^2+b^2}}$, $z_0$ — аппликата точки пересечения
3) $\pi/2$. **6.29.** $\pi/2$.



16*

**6.32.** 1) $\frac{x}{\sqrt[3]{a^2}}+\frac{y}{\sqrt[3]{b^2}}+\frac{z}{\sqrt[3]{c^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}}$. 2) $\frac{x}{\sqrt{a}}+$ $+\frac{y}{\sqrt{b}}+\frac{z}{\sqrt{c}}=\sqrt{a+b+c}$. 3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

**6.33.** 1) $(0; 0)$ — узловая точка с касательными $x=0$ и $y=0$. 2) $(0; 0)$ — точка возврата первого рода с касательной $y = 0$. 3) $(0; 0)$ — точка возврата первого рода с касательной $x = 0$. 4) $(1; 0)$ — узловая точка с касательными $y = \pm(x-1)$. 5) $(-1; 0)$ — изолированная точка. 6) $(0; 0)$ — узловая точка с касательными $y = 0$, $x = 0$. 7) $(0; 0)$ — точка самоприкосновения с касательной $x=0$. 8) $(0; 0)$ — изолированная точка. 9) $(0; -1)$ — узловая точка с касательными $y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}} - 1$. 10) $(\pm 2; 0)$ — узловые точки с касательными $y = \pm 2\sqrt{2/5}\,(x-2)$, $y = \pm 2\sqrt{2/5}\,(x+2)$. 11) $(0; 0)$ — точка возврата второго рода с касательной $y = 0$. 12) $(0; 0)$ — точка самоприкосновения с касательной $x = 0$. 13) $(0; 2)$ — изолированная точка. 14) $(0; 0)$ — точка самоприкосновения с касательной $x = 0$.

**6.34.** 1) $(0; 0)$ — изолированная точка при $a < 0$, узловая с касательными $y = \pm\sqrt{a}\,x$ при $a > 0$, точка возврата первого рода с касательной $y = 0$ при $a = 0$. 2) $(0; 0)$ — узловая точка с касательными $y = \pm x$. 3) $(a; 0)$ — узловая точка с касательными $y = \pm(x-a)$. 4) $(0; 0)$ — изолированная точка при $b < a$, узловая точка с касательными $y = \pm ax/\sqrt{b^2-a^2}$ при $b > a$, точка возврата первого рода с касательной $x = 0$ при $b = a$. 5) Если $a < 0$, то при $b = \frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$ изолированная особая точка $\left(-\sqrt{-a/3};\ 0\right)$, при $b=-\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}$ узловая точка $\left(\sqrt{-a/3}; 0\right)$ с касательными $y = \pm\sqrt[4]{-a/3}\left(\sqrt{3}\,x - \sqrt{-a}\right)$. Если $a=b=0$, то $(0; 0)$ — точка возврата первого рода с касательной $y = 0$. При остальных значениях $a$ и $b$ особых точек нет. 6) Если $a < b < c$, то особых точек нет; если $a = b < c$, то $(a;\ 0)$ — изолированная точка; если $a < b = c$, то $(b; 0)$ — узловая точка с касательными $y = \pm\sqrt{b-a}\,(x-b)$; если $a = b = c$, то $(a; 0)$ — точка возврата первого рода с касательной $y = 0$.

**6.35.** 1) $(\pm 2; 0)$ — точка возврата первого рода с касательной $y = 0$; $(0; \pm 2)$ — точки возврата первого рода с касательной $x = 0$. 2) $(0; 0)$ — узловая точка с касательными $y = \pm x$. 3) $(k\pi;\ 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, — точки возврата первого рода с касательными $x = k\pi$. 4) $(0; 0)$ — узловая точка с касательными $y = \pm x$. 5) $(0; 0)$ — точка возврата с касательной $y = 0$. 6) $(0; 0)$ — угловая точка. 7) $(0; 0)$ — точка прекращения. 8) $(e; e)$ — узловая точка с касательными $y = x$, $x + y = 2e$.

**6.36.** 1) $n = 2$, точка возврата второго рода с касательной $y = 0$. 2) $n = 2$, узловая точка с касательными $y = \pm\frac{4}{5}x$. 3) $n = 2$, узловая точка с касательными $y = \pm\sqrt{35}x$. 4) $n=3$, касательные $y = 0$, $y = \pm 2x/\sqrt{3}$. 5) $n = 3$, касательные $y = 0$, $y = \pm\sqrt{2}\,x$. 6) $n = 3$, касательные $y = 0$, $x=0$. 7) $n = 3$, касательные $y = 0$, $y = \pm x$. 8) $n = 4$, касательные $y = 0$, $x = 0$.

**6.37.** $n = 3$, кривая особых точек не имеет.

**6.38.** 1) $4y = x^2$. 2) $y^2 = 4x$. 3) $y = 1 + \ln x$. 4) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. 5) Параметрические уравнения огибающей $x = -f'(t)$, $y = f(t) - tf'(t)$. 6) $x^2 + y^2 = p^2$. 7) $9y^2 = 4x^3$. 8) $8y^3 = 27x^2$.

**6.39.** $2xy = \pm s$. **6.40.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

**6.42.** Дуга эпициклоиды

$$x = \frac{3a}{4}\cos t - \frac{a}{4}\cos 3t,\quad y = \frac{3a}{4}\sin t - \frac{a}{4}\sin 3t,\quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

**6.43.** 1) $y=\pm R$. 2) $y=\pm x$. 3) $xy=0$, $x^2+y^2\neq 0$. 4) $\dfrac{x^2}{2R^2}+\dfrac{y^2}{R^2}=1$.

**6.44.** $x^3+xy^2+y^2=0$. **6.45.** $(x-3)^2+y^2=9$, $x=-2$.

**6.46.** Астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=d^{2/3}$ без вершин.

**6.47.** 1) $y=0$, $y=4(x-1)$. 2) $y=\pm x/2$. 3) $y=\dfrac{4}{3}x^2$. 4) Огибающей нет. 5) $y=0$, $y=(x/2)^4$, $x^2+y^2\neq 0$. 6) $y=-x^4/4$.

**6.48.** $y=\dfrac{v_0^2}{2g}-\dfrac{gx^2}{2v_0^2}$.

**6.49.** 1) $y=-4x$. 2) $y=1/4x^2$. 3) Парабола $x=y^2$ без вершины. 4) $y=-x\pm 2$. 5) $y=ex$, кроме точки $(0;0)$. 6) $y=\pm 2e^x$. 7) $y=x\pm 1$. 8) $y=(\operatorname{tg}^2 x)/4$.

**6.50.** 1) $x(y+x)=0$, состоит из двух прямых семейства, огибающей нет. 2) $y=0$, является огибающей. 3) $y=0$, состоит из особых точек кривых семейства, является огибающей. 4) $y=0$, состоит из особых точек кривых семейства, огибающей нет. 5) $y=x\pm 2$, является огибающей. 6) $(y-x)((y-x)^2-4)=0$, состоит из огибающей $y=x\pm 2$ и прямой $y=x$, содержащей точки перегиба кривых семейства. 7) $y=\pm 2x^2$, является огибающей. 8) $x(x+2)=0$, состоит из огибающей $x=-2$ и прямой $x=0$, содержащей узловые точки кривых семейства. 9) $x(x^3-4)=0$, состоит из огибающей $x=\sqrt[3]{4}$ и прямой $x=0$, содержащей узловые точки кривых семейства. 10) $y(5^5y-2^8)=0$, состоит из огибающей $y=2^8/5^5$ и прямой $y=0$, содержащей точки возврата второго рода.

**6.51.** 1) $(x-1)^2+(y-2)^2=z^2$. 2) $x^2+y^2=R^2$. 3) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=3R^2/2$. 4) $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=0$, $x^2+y^2+z^2\neq 0$.

**6.52.** 1) $\left(r\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=R^2-z^2$. 2) $\left(z\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=2R^2$.

**6.53.** $|xyz|=V/(4\pi\sqrt{3})$.

# Глава II. КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 7. Мера Жордана. Измеримые множества

**7.5.** 1) $b-a$. 2) $b-a$. 3) $ab$. 4) $ab$. 5) и 6) $a_1a_2\ldots a_n$.

**7.65.** $14\pi/15$.

## § 8. Кратный интеграл Римана и его свойства

**8.1.** 1) $ab(pa+qb)/2$. 2) $a^2b^2/4$. 3) $\left(1-e^{pa}\right)\left(1-e^{qb}\right)/pq$. 4) $ab(pa^2+qb^2)/3$.

**8.2.** 1) $s_{\tau_n}=-20/n$, $S_{\tau_n}=20/n$, $I=0$.

2) $s_{\tau_n}=\dfrac{2}{n^2}\,\dfrac{\operatorname{sh}2\operatorname{sh}1}{\operatorname{sh}(1/n)\operatorname{sh}(1/2n)}\,e^{-3/(2n)}$, $S_{\tau_n}=\dfrac{2}{n^2}\,\dfrac{\operatorname{sh}2\operatorname{sh}1}{\operatorname{sh}(1/n)\operatorname{sh}(1/2n)}\,e^{3/(2n)}$, $I=4\operatorname{sh}2\operatorname{sh}1$. 3) $s_{\tau_n}=-8/n$, $S_{\tau_n}=8/n$, $I=0$.

4) $s_{\tau_n}=20(n-1)(2n-1)/(3n^2)$, $S_{\tau_n}=20(n+1)(2n+1)/(3n^2)$, $I=40/3$.

**8.3.** 1) а) $\sigma=2{,}164$, $\Delta=2{,}168$; б) $S=2{,}270$, $\Delta=1{,}084$. 2) а) $\sigma=-0{,}217$, $\Delta=0{,}5$; б) $S=-0{,}125$, $\Delta=0{,}25$. 3) а) $\sigma=0{,}251$, $\Delta=0{,}158$; б) $S=0{,}231$, $\Delta=0{,}079$. 4) а) $\sigma=0{,}402$, $\Delta=0{,}198$; б) $S=0{,}364$, $\Delta=0{,}099$.

**8.4.** 1) а) $\sigma=0{,}515$, $\Delta=0{,}197$; б) $S=0{,}515$, $\Delta=0{,}099$. 2) а) $\sigma=0{,}549$, $\Delta=0{,}111$; б) $S=0{,}548$, $\Delta=0{,}056$. 3) а) $\sigma=0{,}502$, $\Delta=0{,}147$; б) $S=0{,}501$, $\Delta=0{,}074$.

**8.5.** 1) $\dfrac{\varepsilon}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}$. 2) $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\ln\left(1+\dfrac{\varepsilon}{\pi}e^{-\sqrt{p^2+q^2}}\right)$.

3) $\dfrac{2-\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2}}\left(1-e^{-\varepsilon/\pi}\right)$. 4) $\varepsilon/(2\pi e)$. 5) $8\varepsilon/(9\pi)$.

**8.21.** 1) 0. 2) 0,3. 3) $10\pi/21$. 4) 0. 5) 0.

**8.68.** 4) $\dfrac{1}{f(x_0)}\displaystyle\int\limits_{X(1)} f(x)\,dx$. **8.71.** $f(0;\,0)$.

**8.75.** 1) 0. 2) $-(e-5e^{-1})/2$. 3) 1/9. 4) $\dfrac{1}{3}|\sin x|^3$. 5) $8\pi$.

**8.85.** 1) 8/15. 2) 2. 3) $a^{2(\alpha+1)}/2(\alpha+1)$. 4) $1/(\alpha+1)(\alpha+2)$. 5) 2/15. 6) $\dfrac{\pi}{28}-\dfrac{16}{2205}$.

**8.90.** 1) $\pi^2/4$. 2) 1/15. 3) 4/27. 4) $2a^5/15$. 5) $4R^5/15$. 6) 76/3. 7) $14a^4$. 8) 31/30. 9) $-(45\pi-10)/(6\pi^2)$.

**8.91.** 1) $2\operatorname{ch}1-2$. 2) 0. 3) 135/4. 4) $1/\sqrt{2}$. 5) 255/4. 6) 0. 7) $(\ln 2)/6$.

**8.92.** 1) $\pi^2/32$. 2) $(e-1)/2$. 3) $(\cos 1-1)/3$. 4) $\ln\cos(1/4)$. 5) $(e-1)/2$. 6) $\pi/6$.

**8.93.** 1) $8(b^4-a^4)/3$. 2) 20. 3) $7\pi$. 4) $(b^4-a^4)/2$. 5) $(10+3\pi)/6$.

**8.94.** 1) $a^3/3$. 2) 8. 3) $a^2/2$. 4) $\dfrac{4}{3}\pi+4\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

**8.96.** 1) $\pi ab/8$. 2) 0. 3) $5\pi a^3/2$. 4) $\pi a^2b/4$. 5) $-243/70$. 6) 0. 7) 16/45.

**8.103.** 1) $\displaystyle\int\limits_0^{1/\sqrt{2}}(\arccos r-\arcsin r)\,rf(r)\,dr$.

2) $\displaystyle -\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\cos 2\varphi}{\sin^4\varphi}\,f\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)d\varphi$.

3) $\displaystyle \frac{\pi}{6}\int\limits_0^{2/\sqrt{3}} rf(r^2)\,dr+\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r^2)\,dr$.

4) $\displaystyle \frac{9}{8}\int\limits_0^{\pi/2} f(\operatorname{tg}\varphi)\,\frac{\sin^2 2\varphi}{(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)^2}\,d\varphi$.

5) $$\frac{9}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{-\pi/6} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos 2\varphi\,d\varphi+3\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi+\frac{9}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos 2\varphi\,d\varphi.$$

**8.104.** 1) $\pi\int\limits_0^a rf(r)\,dr$. 2) $\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{f(\operatorname{ctg}\varphi)}{\sin^2\varphi}\,d\varphi$. 3) $2\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi$.

4) $2\int\limits_{a/\sqrt{2}}^{a} rf(r^2)\arccos\left(a/(r\sqrt{2})\right)dr$.

5) $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{a\sqrt{2}} rf(r)\,dr-2\int\limits_a^{a\sqrt{2}} rf(r)\arccos\frac{a}{r}\,dr$. 6) $\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\cos 2\varphi}{\cos^4\varphi}f(\cos\varphi)\,d\varphi$.

**8.106.** 1) $-4/\pi$. 2) $\pi\ln 3$. 3) $15a^4/2$. 4) $2a^5/15$. 5) $\pi/8$. 6) $\pi\ln^2 a$. 7) $\frac{\sqrt{2}}{3}(b-a)R^3$. 8) $\frac{2(1-k)}{3\sqrt{1+k^2}}R^3$. 9) $\operatorname{arcctg}|k|$.

**8.107.** 1) $\pi a^2/16$. 2) $-1/6$. 3) $(8-3\sqrt{3})/3$. 4) $(2\pi-3\sqrt{3})/2$. 5) $7\pi a^3/16$. 6) $2a^3/9$. 7) $(45\pi+20)/3$.

**8.108.** 1) $\pi(\ln 4-1)/2$. 2) $\pi/3$. 3) $3\pi/8$. 4) $16\sqrt{2}/15$.

**8.109.** 1) $(3\sqrt{3}-\pi)/108$. 2) $1/24$. 3) $\pi/32$. 4) $1/5$. 5) $(2\sqrt{3}-9)a^2/6$. 6) $(15\pi-4)a^3/9$.

**8.110.** 1) $\pi(1-e^{-R^2})/4$. 3) $\sqrt{\pi}/2$.

**8.111.** $(\pi\ln 2)/4$.

**8.113.** 2) $r\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi$.

**8.115.** 1) $\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}(a-|u|)f(u)\,du$. 2) $\frac{2R}{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2-u^2}\,f(u+c)\,du$, $\varepsilon=R\sqrt{a^2+b^2}$. 3) $\frac{b-a}{2}\int\limits_a^b\frac{f(v)}{v}\,dv$. 4) $\int\limits_0^2 f(u)\ln\frac{4}{1+\sqrt{1+4u}}\,du$.

5) $\frac{1}{3}\int\limits_0^2(1-|1-v|)^3 f(v)\,dv$.

**8.116.** 1) $kx-y=u,\ \ y=v$. 2) $y=ux,\ \ y=v$. 3) $x=u,\ \ y=vx$. 4) $x=u(1-v),\ y=uv$. 5) $u=xy,\ v=y-x$. 6) $y=ux^2,\ y=vx$.

**8.123.** 1) 4. 2) 8/45. 3) $(4+\ln 3)/2$. 4) $(e^a-1)/2a$. 5) $1/(4\pi)$.

**8.124.** 1) $c(b-a)$. 2) 4. 3) $7(e-1)/6$. 4) 135/8. 5) 3/4.

**8.125.** 1) $2\pi ab/3$. 2) $2a^{5/2}/15$. 3) 7/60. 4) $8a^2b/105$.

**8.128.** 1) $\frac{2}{t}F(t)$. 2) $2\iint\limits_{Q(t)}\frac{(x+y)\,dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**8.129.** 1) $\int\limits_0^t f(t;\,y)\,dy+\int\limits_0^t f(x;\,t)\,dx$. 2) $\frac{1}{2}\int\limits_{-t}^{t} f(t;\,v)\,dv$.

**8.130.** $8(\sqrt{2}-1)/3$. **8.132.** 1) 20. 2) 2/9. 3) 0.

**8.135.** 1) $\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta)\,d\zeta$. 2) $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-w^2) f(w)\,dw$.

3) $\frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left(2-z^2\right) f(z)\,dz + \frac{1}{4}\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\,dz$. 4) $\frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(1-z^2\right)^{3/2} f(z)\,dz$.

**8.136.** 1) $abc\,(a^2+b^2+c^2)/3$. 2) $c^2\,(e^a-1)\,(1-\cos b)/2$.
3) $c\,(ae^a+be^{-b}-(a+b)\,e^{a-b})$.

**8.137.** 1) 0. 2) 3/4. 3) $-8$.

**8.138.** 1) $\pi/2$. 2) 28. 3) 1/126.

**8.139.** 1) 16/3. 2) $(8\ln 2-5)/16$. 3) 5/12. 4) $-4/15$. 5) 1/8. 6) 1/48. 7) $\pi/6$. 8) 1/364. 9) 1/96.

**8.144.** 1) $63\pi$. 2) $(\pi\ln 2)/4$. 3) $31\pi/15$. 4) $R^5/15$. 5) $\pi a^2R^3/(3\,(a^2+h^2))$. 6) $\pi/10$.

**8.145.** 1) $\pi\left(2-\sqrt{2}\right)\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2 f(r)\,dr$. 2) $\frac{2\pi R^3}{3}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\operatorname{tg}\psi)\cos\psi\,d\psi$.

**8.146.** 1) $\pi R^2H\,(3R^2+2H^2)/12$. 2) $7\pi/4$. 3) $16\pi/3$. 4) $\pi a^4/12$.

**8.148.** 1) $4\pi abc/5$. 2) $4\pi abc\,(a^2+b^2)/15$. 3) $\pi^2abc/4$.

**8.149.** 1) $\frac{\pi}{R_0}\left(2R_0R-\left(R_0^2-R^2\right)\ln\frac{R_0+R}{R_0-R}\right)$.

2) $2\pi\left(\ln\frac{R_0+R}{R_0-R}-\frac{2R}{R_0}\right)$. 3) $\frac{\pi}{R_0}\left(\frac{2RR_0}{R_0^2-R^2}-\ln\frac{R_0+R}{R_0-R}\right)$.

4) $$\frac{2\pi}{(2-\alpha)\,R_0}\left(\frac{(R_0+R)^{4-\alpha}-(R_0-R)^{4-\alpha}}{4-\alpha}-R_0\,\frac{(R_0+R)^{3-\alpha}-(R_0-R)^{3-\alpha}}{3-\alpha}\right).$$

**8.150.** 1) $(4\pi\ln 3)/3$. 2) $\pi R^2h^2/4$. 3) 0. 4) $4\pi R^4/3$. 5) $-\pi R^4/8$. 6) $(\ln 3-1)/16$. 7) $a^4/10$. 8) $59\pi R^5/480$. 9) $\left(3\sqrt{2}-4\right)/3$.

**8.151.** 1) $\pi/40$. 2) 128/525. 3) $8\pi/5$. 4) $7\pi/96$.

**8.152.** 1) $(\ln 3)\ln 5$. 2) 55/72. 3) 27/32.

4) $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)h^{9/2}$.

5) $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\beta^2-\alpha^2+2\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

**8.153.** 1) 6/5. 2) $3\,(e-2)$.

**8.154.** $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\,\frac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, если $m$, $n$ и $p$ — четные числа; 0 — в остальных случаях.

**8.155.** $\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$.

**8.157.** $f(a_2;\,b_2;\,c_2)-f(a_1;\,b_2;\,c_2)-f(a_2;\,b_1;\,c_2)-f(a_2;\,b_2;\,c_1)+f(a_1;\,b_1;\,c_2)+f(a_1;\,b_2;\,c_1)+f(a_2;\,b_1;\,c_1)-f(a_1;\,b_1;\,c_1)$.

**8.159.** $4\pi t^2 f(t)$. **8.160.** $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x; y; t)\,dx\,dy$.

**8.161.** $\iint\limits_{\Omega(t)} f(x; y; t-x-y)\,dx\,dy$, где $\Omega(t)=\{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant t\}$.

**8.162.** $f(x; y; z)$. **8.164.** 1) $a^4/4!$ 2) $a^{\alpha+4}/6(\alpha+4)$.

**8.165.** 2) $a^4/24$. **8.166.** 2) $a^4/24$. **8.167.** 1) $a^8/384$. 2) $a^6/40$.

**8.168.** 1) $4\pi HR^3/3$. 2) $4\pi HR^3(9R^2+5H^2)/45$.

**8.169.** 1) $\pi a^3H^4/3$. 2) $2\pi a^5H^6/15$.

**8.170.** 1) $\pi^2a^2b^2$. 2) $\pi^2a^2b^2(a^2+b^2)/2$.

**8.175.** 1) $a^{n+p}/(p+1)$. 2) $na^{n+1}/2$. 3) $na^{n+p}/(p+1)$.

4) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k (n-k)^{p+n}\dfrac{a^{p+n}}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$. 5) $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(e^{ac_k}-1\right)/c_k$.

6) $a^n/2$.

**8.176.** 1) $a^n/n!$ 2) $a^{2n}/(2n)!!$. 3) $a^{n+1}/(2\cdot(n-1)!)$.

**8.177.** 1) $a^n/n!$. 2) $na^{n+1}/(n+1)!$. 3) $2na^{n+2}/(n+2)!$. 4) $\dfrac{2a^{n+1/2}}{(n-1)!\,(2n+1)}$.

5) $\dfrac{a^{n+p}}{(n-1)!\,(n+p)}$.

**8.178.** $2^n h_1 h_2 \ldots h_n |\det(a_{ij})|^{-1}$.

**8.179.** $a_1a_2\ldots a_n/n!$.

**8.181.** $V_{2m}(R)=\pi^m R^{2m}/m!$, $V_{2m+1}(R)=\dfrac{2^{m+1}\pi^m R^{2m+1}}{(2m+1)!!}$.

**8.182.** $HV_{n-1}(R)$, где $V_{n-1}(R)$ из задачи **8.181.**

**8.183.** $\dfrac{1}{n}HV_{n-1}(aH)$, где $V_{n-1}(R)$ из задачи **8.181.**

**8.184.** $\dfrac{1}{3}H^3V_{n-1}(R)$, где $V_{n-1}(R)$ из задачи **8.181.**

**8.185.** $a_1a_2\ldots a_nV_n(1)$, где $V_n(R)$ из задачи **8.181.**

**8.186.** $\dfrac{1}{2}V_{n+1}(R)$, где $V_{n+1}(R)$ из задачи **8.181.**

**8.187.** $nV_n(1)\int\limits_0^R r^{n-1}f(r)\,dr$, где $V_n(R)$ из задачи **8.181.**

**8.188.** $f(x)$. **8.189.** $(m/n)\,a^n$.

**8.199.** 1) Не сходится. 2) $\pi/2$. 3) $\pi/2$.

**8.200.** 1) Не сходится. 2) $\pi/4$. 3) $\pi/4$. 4) 0.

**8.203.** 1) Сходится при $\alpha>2$, расходится при $\alpha\leqslant 2$. 2) Сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\leqslant 1$. 3) Сходится при $\alpha>1/2$, расходится при $\alpha\leqslant 1/2$.

**8.204.** 1) Сходится, если только $\alpha > 1$ и $\beta > 1$; расходится в остальных случаях. 2) Сходится, если $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<1$; расходится, если $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geqslant 1$. 3) Сходится, если $p>0$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<p$; расходится, если $p\leqslant 0$ или $p>0$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geqslant p$. 4) Сходится при $p>3/2$, расходится при $p\leqslant 3/2$. 5) Сходится при $p>3/2$, расходится при $p\leqslant 3/2$. 6) Сходится при $p>2$, расходится при $p\leqslant 2$.

**8.205.** 1) Сходится при $\alpha>1$, расходится при $\alpha\leqslant 1$. 2) Сходится при $\alpha>1/4$, расходится при $\alpha\leqslant 1/4$. 3) Сходится при $\alpha>1/2$, расходится при $\alpha\leqslant 1/2$.

**8.206.** Расходится при любом $p$. **8.207.** Расходится.

**8.208.** Сходится при $\alpha<-1$, расходится при $\alpha\geqslant -1$.

**8.209.** 1) Сходится при $\alpha<2$, расходится при $\alpha\geqslant 2$. 2) Сходится при $\alpha<1$, расходится при $\alpha\geqslant 1$. 3) Сходится при $\alpha<1$, расходится при $\alpha\geqslant 1$. 4) Сходится, если $\alpha<1$ и $\beta<1$; расходится при остальных $\alpha$ и $\beta$.

**8.210.** 1) Сходится при $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>1$, расходится при $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\leqslant 1$. 2) Сходится при $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>p$, расходится при $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\leqslant p$. 3) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$.

**8.211.** 1) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$. 2) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$. 3) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$.

**8.213.** Сходится при $\alpha<3/2$, расходится при $\alpha\geqslant 3/2$.

**8.214.** Сходится при $\alpha<2$, расходится при $\alpha\geqslant 2$.

**8.215.** Сходится при $\alpha<3$, расходится при $\alpha\geqslant 3$.

**8.216.** 1) Не сходится. 2) Не сходится. 3) Сходится.

**8.217.** Сходится при любых $\alpha$. **8.219.** $\pi$.

**8.220.** $\pi/(p-1)$, $p>1$.

**8.221.** $1/(q-1)(p-q)$, $p>q>1$.

**8.222.** $\left((3/2)^{2-p}-1\right)/(p-1)(2-p)\,2^{p-1}$, $p>1$, $p\neq 2$; $\ln\sqrt{3/2}$, $p=2$.

**8.223.** $\pi\sqrt{2\sqrt{2}-2}$.

**8.224.** $1/2$. **8.225.** $\pi/2$. **8.226.** $\pi/2$.

**8.227.** $\pi ab/e$. **8.228.** $2\pi/\sqrt{3}$.

**8.229.** $-\pi a^2b^2\varepsilon/\left(2\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}\right)$.

**8.230.** $\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\exp\left(\frac{AE^2-2BDE+CD^2}{\Delta}-F\right)$. **8.231.** $\pi/(1-p)$.

**8.232.** $\pi/2$. **8.233.** $\pi/(1-\alpha)$. **8.234.** $\pi ab/2$.

**8.235.** 4. **8.236.** $\pi/2$. **8.237.** $\pi a$. **8.238.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **8.239.** $\pi\alpha/(1-\alpha)$.

**8.240.** 1) $2\alpha(\beta+1)<1$. 2) $\frac{2}{3}\left(\ln\frac{(b+\sqrt{b^2+1})^b}{(a+\sqrt{a^2+1})^a}+\sqrt{a^2+1}-\sqrt{b^2+1}\right)$.

**8.241.** $\frac{2\pi a}{(a^2+\xi^2+\eta^2)^{3/2}}$. **8.248.** 1) Сходится при $p>3/2$, расходится при $p\leqslant 3/2$. 2) Сходится, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$, расходится, если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant 1$.

**8.249.** 1) Сходится при $p<3/2$, расходится при $p\geqslant 3/2$. 2) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$. 3) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$. 4) Сходится при $p<1$, расходится при $p\geqslant 1$.

**8.251.** $1/(1-p)(1-q)(1-r)$, $p<1$, $q<1$, $r<1$.

**8.252.** $4\pi/(2p-3)$, $p>3/2$. **8.253.** $4\pi/(3-2p)$, $p<3/2$.

**8.254.** $\pi^{3/2}$. **8.255.** $(e-2)/2$. **8.256.** $a_1a_2\ldots a_n\pi^{n/2}$.

**8.257.** $\left(\pi^n \det\left(a_{ij}\right)\right)^{1/2}$. **8.258.** 1) $\Gamma(p+2)$. 2) $\frac{\pi}{4}\Gamma(p+1)$. 3) $\frac{\pi}{4p}\Gamma(3/2p)$.
4) $\frac{\pi}{4}\mathrm{B}(p+1;\ q+1)$. 5) $2\pi t^{3-2p}\mathrm{B}(3/2;\ 1-p)$.

## § 9. Геометрические и физические приложения кратных интегралов

**9.4.** 1) $8/3$. 2) $16\sqrt{15}/3$. 3) $2(p+q)\sqrt{pq}/3$. 4) $(6\pi+8)/3$. 5) $(6\pi-16)/3$.
6) $3\sqrt{3}/4$. 7) $(\pi+6\sqrt{3})/24$. 8) $a^2/3$. 9) $\pi a^2$.

**9.5.** 1) $\frac{2b+h}{h}\ln\frac{a+h}{a}$; $2b/a$. 2) $h/2$; 0.

**9.6.** 1) $(\pi+2)(b^2-a^2)/4$. 2) $(3\sqrt{3}-\pi)a^2/3$. 3) $3\sqrt{3}a^2/4$. 4) $ab+{}$
$+(a^2-b^2)\operatorname{arctg}(a/b)$. 5) $3\pi a^2/4$. 6) $\pi a^2/4$. 7) $5\pi a^2/16$.

**9.7.** 1) $3\pi/2$. 2) $(9\pi+12\sqrt{3})/4$.

**9.8.** 1) $\pi ab$. 2) $\pi ab^3/(2c^2)$. 3) $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{p^2}+\frac{b^2}{q^2}\right)$. 4) $6/35$. 5) $a^2/3$.
6) $ab/70$. 7) $\pi a^2/2$. 8) $a^2/6$.

**9.9.** 1) $25/21$. 2) $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$. 3) $\frac{b^2-a^2}{2}\ln\frac{q}{p}$.
4) $\frac{1}{6}(b^2-a^2)(q^3-p^3)$. 5) $\frac{1}{3}(b-a)(q-p)$. 6) $\frac{1}{3}(b^2-a^2)\ln\frac{q}{p}$.
7) $\frac{1}{15}(b^5-a^5)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)$. 8) $\frac{55}{64}ab$. 9) $\frac{3}{16}(b^2-a^2)\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}+\frac{6}{25}\right)$.

**9.10.** $\pi/|\Delta|$. **9.11.** $((b_2-b_1)(\operatorname{sh}2a_2-\operatorname{sh}2a_1)-(a_2-a_1)(\sin 2b_2-\sin 2b_1))/4$.

**9.12.** 1) $\pi$. 2) $2\pi$. 3) $3\pi a^4/32$. 4) $88/105$. 5) $a^3/12$. 6) $2\pi R^2a$. 7) $abc/3$.
8) $a^4/24$. 9) $32\pi/3$.

**9.13.** 1) $2(3\pi-4)a^3/3$. 2) $7/24$. 3) $8(ab)^{3/2}/3$. 4) $2abc/27$. 5) $\pi/8$.
6) $\pi/32$. 7) $16ab^2/3$. 8) $4(2-\sqrt{2})a^3/3$. 9) $\pi ac^2/2$.

**9.14.** 1) $\pi/8$. 2) $45\pi/32$. 3) $\pi(1-e^{-1})$. 4) $\pi(2-\sqrt{2})a^3/3$. 5) $16a^3/9$.
6) $(6\pi+40-32\sqrt{2})a^3/9$. 7) $\frac{2(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}a^2c$. 8) $3\pi a^4/2\sqrt{2}$.
9) $3\pi(a+b)/8$.

**9.15.** 1) $\pi ab/4$. 2) $a^2b^2/(8c)$. 3) $4a^4bc/(9p^3)$. 4) $\pi^2abc/2$.
5) $5(3-\sqrt{5})\pi abc/12$. 6) $3\pi abc/2\sqrt{2}$. 7) $81\pi abc/32$.

**9.16.** 1) $8\pi(2+\sqrt{2})/3$. 2) $\pi a^3$. 3) $\pi a^3/3$. 4) $\pi^2a^3/4\sqrt{2}$. 5) $a^3/360$.
6) $\pi a^3/60$. 7) $\pi^2a^3/6$. 8) $2\pi a^3/9\sqrt{3}$.

**9.17.** 1) $\pi a^2bc/(3p)$. 2) $\pi^2abc/4$. 3) $5(3-\sqrt{5})\pi abc/12$. 4) $8\pi abc/5$.
5) $a^4b^4c^4/(360p^9)$.

**9.18.** 1) $\pi a^3b^3/(12c^3)$. 2) $abc/3$. 3) $\pi/24$. 4) $(16-3\pi)\,abc/48$. 5) $8/35$.
6) $\dfrac{\pi abc}{64}\left(\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\right)\left(\dfrac{a^2}{p^2}+\dfrac{b^2}{q^2}\right)$. 7) $\dfrac{\pi abc}{64}\,\dfrac{pq}{aq+bp}\left(\dfrac{a}{p}\right)^4$. 8) $75\pi abc/256$.
9) $2\left(3\pi+20-16\sqrt{2}\right)abc/9$.

**9.19.** $\pi^2abc^2/(6p)$. 2) $abc^4/(60p^3)$. 3) $\dfrac{abc}{60}\left(\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\right)\left(\dfrac{a^2}{p^2}+\dfrac{b^2}{q^2}\right)$.
4) $\dfrac{abc}{60}\left(\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\right)^{-1}\left(\dfrac{a}{p}\right)^4$. 5) $\dfrac{abc}{60}\,\dfrac{p\,(5c+4p)}{(c+p)^2}$. 6) $abc/90$. 7) $4\pi abc/35$.
8) $\pi abc/2$. 9) $abc/1680$.

**9.20.** 1) $7a^4/3$. 2) $\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)\ln\dfrac{q}{p}$. 3) $5/4$. 4) $\dfrac{14}{9}\ln 3$. 5) $49a^3/864$. 6) $9a^4/4$.
7) $\dfrac{2\sqrt{2}\,(b^3-a^3)}{3}\left(2E\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-K\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\dfrac{b^3-a^3}{3}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\dfrac{3}{4}\right)$,
функции $E$ и $K$ см. в задаче **13.27**. 8) $5abc\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{3}\right)$.

**9.21.** $8d_1d_2d_3/|\Delta|$. **9.22.** $4\pi/(3\,|\Delta|)$.
**9.23.** $2\pi d/|\Delta|$. **9.25.** 1) $4\pi R^3H/3$. 2) $\pi R^3H/3$.
**9.27.** $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$. **9.28.** $2\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi a^2/3$.
**9.29.** $16a^2$. **9.30.** $\pi\left(5\sqrt{5}-1\right)/24$.
**9.31.** $8a^2\arcsin(b/a)$. **9.32.** $\left(5+3\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)/6$.
**9.33.** $\pi\sqrt{2}/4$. **9.34.** $8a^2$. **9.35.** $4a^2$. **9.36.** $2\pi$. **9.37.** $\pi\sqrt{2}$. **9.38.** $\pi a^2/\sqrt{2}$.
**9.39.** $2\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)/3$. **9.40.** $4a^2$. **9.41.** $(20-3\pi)/9$. **9.42.** $2\left(\pi+4-4\sqrt{2}\right)a^2$.
**9.43.** $\dfrac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)ab\,\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. **9.44.** $\dfrac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)ab$. **9.45.** $13/12$.
**9.46.** $2a^2$. **9.47.** $\dfrac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a^2$. **9.48.** $4\pi^3\sqrt{2}/3$. **9.49.** $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(e+e^{-1}\right)$.
**9.50.** $(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)\,R^2$. **9.51.** $4\pi^2ab$.

**9.56.** 1) $2\rho_0$. 2) $x_C=y_C=\pi/4$. 3) $I_{xx}=I_{yy}=\left(\dfrac{\pi^2}{4}+\pi-4\right)\rho_0$.
4) $\left(\dfrac{\pi^2}{4}-2\right)\rho_0$.

**9.57.** 1) $\dfrac{32}{9}a^3\rho_0$. 2) $x_C=\dfrac{6}{5}a,\ y_C=0$. 3) $I_{xx}=\dfrac{512}{525}a^5\rho_0,\ I_{yy}=\dfrac{1024}{175}a^5\rho_0$.
4) $\dfrac{1376}{1575}a^5\rho_0$.

**9.58.** 1) $a^3/3$. 2) $x_C=3a/4,\ y_C=5a/8$. 3) $I_{xx}=3a^5/20,\ I_{yy}=a^5/5$.
4) $19a^5/960$.

**9.60.** 1) $x_C=8a/5,\ y_C=-a/2$. 2) $x_C=\dfrac{2\sin\alpha}{3\alpha}a,\ y_C=0$. 3) $x_C=$
$=\dfrac{81a}{10\,(6+\ln 4)},\ y_C=-\dfrac{27a}{4\,(6+\ln 4)}$. 4) $x_C=0,\ y_C=5a/6$. 5) $x_C=y_C=$
$=4\pi a/9\sqrt{3}$. 6) $x_C=0;\ y_C=7a/6$. 7) $x_C=y_C=a/5$.

**9.61.** $7\pi/96$. **9.62.** 1) $x_C=0$, $y_C=3b/7$, $z_C=2h/7$. 2) $x_C=4/3$, $y_C=z_C=0$

**9.63.** 1) $x_C=y_C=z_C=3a/5$. 2) $x_C=8R/(3\pi^2)$, $y_C=z_C=0$. 3) $x_C=z_C=0$, $y_C=105R/124$. 4) $x_C=y_C=0$, $z_C=5h/6$. 5) $x_C=y_C=0$, $z_C=4h/7$. 6) $x_C=y_C=0$, $z_C=R/3$. 7) $x_C=y_C=0$, $z_C=\dfrac{4(5a^2+3h^2)}{15(2a^2+h^2)}h$.

8) $x_C=(64\sqrt{2})/(35\pi)$, $y_C=0$, $z_C=4/(3\pi)$.

**9.64.** $(4\pi\rho_0)/(\alpha R^\alpha)$. **9.65.** $4\pi e^{-k}\dfrac{2+2k+k^2}{k^3}\cdot abc\rho_0$.

**9.66.** 1) $I_{xx}=a^4(2\alpha-\sin 2\alpha)/8$, $I_{yy}=a^4(2\alpha+\sin 2\alpha)/8$, $I_0=\alpha a^4/2$. 2) $I_{xx}=I_{yy}=a^4\left(1-\dfrac{5\pi}{16}\right)$, $I_0=a^4\left(2-\dfrac{5\pi}{8}\right)$. 3) $I_{xx}=\dfrac{(a-b)c^3}{12}$, $I_{yy}=\dfrac{(a^3-b^3)c}{12}$, $I_0=\dfrac{(a-b)c}{12}(c^2+a^2+b^2+ab)$. 4) $I_{xx}=I_{yy}=3\pi a^4/128$, $I_0=3\pi a^4/64$. 5) $I_{xx}=49\pi a^4/32$, $I_{yy}=21\pi a^4/32$, $I_0=35\pi a^4/16$. 6) $I_{xx}=\pi ab^3/4$, $I_{yy}=\pi a^3b/4$, $I_0=\pi ab(a^2+b^2)/4$. 7) $I_{xx}=I_{yy}=3\pi a^4/(4\sqrt{2})$, $I_0=3\pi a^4/(2\sqrt{2})$. 8) $I_{xx}=I_{yy}=9a^4/8$, $I_0=9a^4/4$.

**9.67.** 1) $ab(a^2+b^2)/12$. 2) $26a^4/105$. 3) $\pi a^4/8$. **9.68.** 1) $\sqrt{3}\,a^4/96$. 2) $\sqrt{3}\,a^4/96$. **9.69.** 1) $4MR^2/9$. 2) $MR^2/3$.

**9.70.** 1) $I_{xx}=abc(b^2+c^2)/3$, $I_{yy}=abc(c^2+a^2)/3$, $I_{zz}=abc(a^2+b^2)/3$. 2) $I_{xx}=I_{yy}=\pi HR^2\left(\dfrac{H^2}{3}+\dfrac{R^2}{4}\right)$, $I_{zz}=\dfrac{\pi}{2}HR^4$. 3) $I_{xx}=I_{yy}=\dfrac{\pi HR^2}{60}(2H^2+3R^2)$, $I_{zz}=\pi HR^4/10$. 4) $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=4\pi R^5/15$.

**9.71.** $4\pi\rho_0R^7/7$. **9.72.** $59\pi R^5/480$.

**9.73.** 1) $I_{xy}=abc^3/60$, $I_{yz}=a^3bc/60$, $I_{zx}=ab^3c/60$. 2) $I_{xy}=4\pi abc^3/15$, $I_{yz}=4\pi a^3bc/15$, $I_{zx}=4\pi ab^3c/15$. 3) $I_{xy}=\pi abc^3/5$, $I_{yz}=\pi a^3bc/20$, $I_{zx}=\pi ab^3c/20$. 4) $I_{xy}=\dfrac{2abc^3}{225}(15\pi-16)$, $I_{yz}=\dfrac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$, $I_{zx}=\dfrac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$. 5) $I_{xy}=7\pi abc^3/2$, $I_{yz}=4\pi a^3bc/3$, $I_{zx}=4\pi ab^3c/3$.

**9.74.** 1) $\dfrac{64\sqrt{2}}{135}a^5$. 2) $\pi a^5/\sqrt{2}$. 3) $14/45$. 4) $4\pi(4\sqrt{2}-5)/15$. 5) $9\pi a^5/140$. 6) $4\pi abc(a^2+b^2)/715$. 7) $\pi abc(b^2+4a^2)/20$.

**9.75.** 1) $\pi^2ba^2(4b^2+3a^2)/2$. 2) $\pi^2ba^2(4b^2+5a^2)/4$.

**9.76.** $2\pi R^2H\left(R^2+\dfrac{2}{3}H^2\right)/3$.

**9.78.** 1) $\dfrac{\mu a^2}{2}\ln r$ при $r=\sqrt{x^2+y^2}>a$, $\dfrac{\mu}{2}\left(a^2\ln a+\dfrac{1}{2}(r^2-a^2)\right)$ при $r<a$. 2) $\int\limits_0^a f(\rho)\rho\cdot M(r;\ \rho)\,d\rho$, где $M(r;\ \rho)=\max\{\ln r,\ \ln\rho\}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

**9.79.** $\frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 \frac{1}{r_0}$ при $r_0 \geqslant R$, $2\pi\rho_0\left(R^2 - \frac{r_0^2}{3}\right)$ при $r_0 \leqslant R$, $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

**9.80.** $\frac{4\pi}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\rho_0 \frac{1}{r_0}$ при $r_0 \geqslant R_2$, $\frac{2\pi}{3}\rho_0\left(3R_2^2 - r_0^2 - 2\frac{R_1^3}{r_0}\right)$ при $R_1 \leqslant r_0 \leqslant R_2$, $2\pi\rho_0\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ при $r_0 < R_1$, $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$.

**9.81.** $\pi R^4 \frac{1}{r}$ при $r \geqslant R$, $\frac{\pi}{3}(4R^3 - r^3)$ при $r \leqslant R$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

**9.82.** $\pi\rho_0\left(R^2 \ln \frac{H + \sqrt{R^2 + H^2}}{R} + H\left(\sqrt{R^2 + H^2} - H\right)\right)$.

**9.83.** 1) $\pi\rho_0 h(l - h)$. 2) $\frac{\pi\rho_0 R^2 h}{l^3}\left(h^2 \ln \frac{R(l + R)}{h(l - h)} + l(R - h)\right)$, $R = \sqrt{l^2 - h^2}$.

**9.84.** $\frac{2\pi\rho_0}{3h}\left((h^2 + R^2)^{3/2} - h^3 + R^3 - \frac{3}{2}hR^2\right)$ при $h \geqslant R$,

$\frac{2\pi\rho_0}{3h}\left((h^2 + R^2)^{3/2} - 2h^3 - R^3 + \frac{3}{2}hR^2\right)$ при $h \leqslant R$.

**9.85.** $$\pi\rho_0\left((H - h)\sqrt{R^2 + (H - h)^2} + h\sqrt{R^2 + h^2} - (H - h)\,|H - h| - h^2 + R^2 \ln \frac{H - h + \sqrt{R^2 + (H - h)^2}}{\sqrt{R^2 + h^2} - h}\right).$$

**9.86.** $\frac{2\pi\rho_0 a^2 b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}\right)$.

**9.87.** $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \frac{m}{r_0^2}$ при $r_0 \geqslant R$, $\frac{4}{3}\pi\rho_0 m r_0$ при $r_0 \leqslant R$, где $r_0$ — расстояние от $M_0$ до центра шара.

**9.88.** $\pi\rho_0 R \sin^2\alpha$. **9.90.** $2\pi\rho_0\left(\sqrt{R^2 + H^2} - R + H\right)$.

**9.91.** $2\pi\rho_0 m H \frac{\sqrt{R^2 + H^2} - H}{\sqrt{R^2 + H^2}}$.

**9.92.** $2\pi m\rho_0 \frac{\sqrt{R^2 + h^2} - h}{\sqrt{R^2 + h^2}}$. **9.93.** $2\pi m\rho_0$. **9.94.** $kM_1M_2/a^2$.

**9.95.** $\frac{4\pi\rho_0^2}{3} r(R - r)$.

**9.96.** $\frac{1}{2}\rho_0 (T_2 - T_1)\left(R_2^4 - R_1^4\right)$. **9.97.** $4ah^2/5$.

**9.100.** За ось $l$ следует взять одну из двух главных осей инерции пластины.

**9.101.** Пусть начало координат $O$ совпадает с вершиной прямого угла, ось $Ox$ направлена по катету длины $a$, тогда масса $m$ и координаты ее точки нахождения определяются из условий $y = 0$, $z = b/4$, $mx = -Ma/3$.

**10.1.** 1) $\sqrt{5}/2$. 2) $3+2\sqrt{5}$. 3) $1+\sqrt{2}$. 4) $-\sqrt{5}\ln 2$. 5) $\ln((3+\sqrt{5})/2)$.
**10.2.** 1) 0. 2) $ab(a^2+ab+b^2)/(3(a+b))$. 3) 24.

**10.4.** $\pi a^3/2$. **10.5.** $2\pi a^{2n+1}$.

**10.6.** 1) $\pi a^2/2$. 2) $2a^2$. **10.7.** 1) $a^2\sqrt{2}$. 2) $2a^3\sqrt{2}/3$.

**10.8.** $2a^2(2-\sqrt{2})$. **10.9.** $4a^{7/3}$.

**10.10.** 1) $32a^2/3$. 2) $256a^3/15$.

**10.11.** 1) $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$. 2) $((1+4\pi^2)^{3/2}-1)a^2/3$.

**10.12.** 1) $8\pi^3b^2\sqrt{a^2+b^2}/(3a^2)$. 2) $(\sqrt{a^2+b^2}/ab)\operatorname{arctg}(2\pi b/a)$. 3) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)/3$.

**10.13.** 1) $((1+2\pi^2)^{3/2}-1)2\sqrt{2}/3$. 2) $((1+2\pi^2)^{3/2}-1)4\sqrt{2}/3$.

**10.14.** $2\pi a^2$. **10.15.** $a^4/6$. **10.16.** $a^2\sqrt{2}$. **10.17.** $2\pi a^3/3$.

**10.18.** $(100\sqrt{38}-72-17\ln((25+4\sqrt{38})/17))a^2\sqrt{2}/512$.

**10.19.** 1) $\pi$. 2) $(14-3\ln 4)/3$. 3) 8. 4) 3/2. 5) 4. 6) 12/5.
**10.20.** 1) $2\sin 2$. 2) $-8/15$. 3) $-14/15$. 4) 4/3.

**10.21.** 1) 0. 2) 2/3. 3) 2. **10.22.** 8/15. **10.23.** $-11$. **10.24.** $(5-\ln 8)/3$.
**10.25.** $\pi a^2/2$.

**10.26.** 1) 7/12. 2) 56. 3) 8. 4) 6. 5) $12+\ln 5$. 6) 4.

**10.27.** 1) $-1/4$. 2) 0. 3) $-2\pi ab$. 4) $-4ab^2/3$.

**10.28.** 1) $\pi a^2$. 2) $3\pi a^{4/3}/16$.

**10.29.** 1) $-48$. 2) 4. 3) $-1/2$. 4) 0.

**10.30.** 1) 4/3. 2) 0. 3) $-2\pi$. 4) 0.

**10.31.** $-\pi a^2$. **10.32.** 1/35. **10.33.** 0. **10.34.** 0. **10.35.** $-\pi a^2$.
**10.36.** $-\pi a^2\cos^2\alpha$. **10.37.** 13. **10.38.** $3\sqrt{3}$.

**10.39.** $a^3$. **10.40.** $-\pi R^3/4$. **10.41.** $\pi a^2 2^{3/2}\sin(\pi/4-\alpha)$. **10.42.** $-4$.
**10.43.** 0. **10.44.** $2\pi Rr^2$. **10.45.** 1) 0. 2) $-\pi a^3/8$. **10.46.** $\pi ab$.
**10.47.** 0. **10.48.** $-140/3$. **10.49.** 0. **10.50.** $(1-e^{\pi})/5$. **10.51.** 0. **10.52.** $\pi a^2/8$.
**10.53.** $-4$. **10.54.** $\pi R^4/4$. **10.55.** $-2$. **10.56.** 7. **10.57.** 12. **10.58.** 1.

**10.59.** $-4$. **10.60.** $-1148/5$. **10.61.** 0. **10.62.** 30. **10.63.** $\displaystyle\int_0^{x_0+y_0} f(t)\,dt$.

**10.64.** $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\varphi(t)\,dt+\int_{y_1}^{y_2}\psi(t)\,dt$. **10.65.** $e^{x_0}\cos y_0-1$. **10.66.** $-1/6$. **10.67.** 6.

**10.68.** $R_2-R_1$. **10.69.** $u=(x^3+y^3)/3+C$. **10.70.** $u=xe^{2y}-5y^3e^x+C$.
**10.71.** $u=e^{x-y}(x+y)+C$. **10.72.** $u=(e^y-1)/(1+x^2)+y+C$.
**10.73.** $u=\ln|x+y+z|+C$. **10.74.** $u=\operatorname{arctg}(xyz)+C$. **10.75.** $u=(x^3+y^3+z^3)/3-2xyz+C$. **10.76.** $u=x-\dfrac{x}{y}+\dfrac{xy}{z}+C$.

**10.77.** $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\operatorname{arctg}(z/(x+y))+C$.

**10.78.** $xF'_x(x;\,y)=yF'_y(x;\,y)$.

**10.81.** 1) $335a/27$. 2) $\ln(1+\sqrt{2})$. 3) $a\,\mathrm{sh}\,(x_0/a)$. 4) $3\pi a/2$. 5) $8a$
6) $(e^{2\pi}-1)\sqrt{2}$. 7) 8. 8) $4aE\left(\pi/2;\ \sqrt{a^2-b^2}/a\right)$, 9) $6a$.

**10.82.** 1) 5. 2) $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$. 3) $4\pi a$. 4) $\sqrt{2\pi}\,(3+4\pi)/3$. 5) $7p/6$.
6) $9\sqrt{2}/16$. **10.83.** $e^{-2\pi k}$.

**10.84.** $4\sqrt{2}\,E\left(\pi/2;\ 1/\sqrt{2}\right)\approx 7{,}6404$.

**10.85.** 1) $5\sqrt{5}$. 2) $2\sqrt{10}$. 3) $(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})/6$. 4) $(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})/12$.
5) $4(63-5\sqrt{5})\,k/9$. **10.86.** $\pi/a$.

**10.87.** 1) $k\pi a^2$. 2) $\pi k\,(2a)^{3/2}$. 3) $3\sqrt{2}\,\pi a^{5/2}$. 4) $a^{4/3}$. 5) $(\pi^2-8\ln 2)/16$.
6) $\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, $\varepsilon=\sqrt{a^2-b^2}/a$. 7) $9\pi a^3/64$. 8) $2a^2$.

**10.88.** 1) $\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,2\pi$. 2) $\dfrac{3a}{16}\left(\ln\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}+2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\right)$.
3) $4\left((1+2\pi^2)^{3/2}-1\right)/3$. 4) $\sqrt{3}\,ka^2/2$. 5) $2644k/15$. 6) $1/16$. 7) $2\sqrt{6}\,\pi a^3/9$.

**10.89.** 1) $\left(0;\ \dfrac{\mathrm{sh}\,2+2}{4\,\mathrm{sh}\,1}a\right)$. 2) $(\pi a;\ 4a/3)$. 3) $((R\sin\varphi_0)/\varphi_0;\ 0)$. 4) $(4a/5;\ 0)$.
5) $(0;\ 2a/5)$.

6) $x_C=y_C=\dfrac{7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}\cdot\dfrac{a}{16}$. 7) $(8/45;\ 0)$.

**10.90.** 1) $((R\sin\varphi_0)/\varphi_0;\ R(1-\cos\varphi_0)/\varphi_0;\ (\varphi_0 h)/(4\pi))$.
2) $(R/(1+4\pi^2);\ 2\pi R/(1+4\pi^2);\ h\left(1-(n+1)e^{-n}\right)/\left(1-e^{-n}\right))$.
**10.91.** $(2/5;\ 1/5;\ 1/2)$.

**10.92.** $x_C=y_C=z_C=\dfrac{a}{24}\,\dfrac{7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}$.
**10.94.** $\pi R^3$. **10.95.** $3\pi R^3$.
**10.96.** $I_x=32a^3/5$, $I_y=8(\pi^2-256/45)\,a^3$.
**10.97.** $I_x=I_y=\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,(3a^2+2h^2)/6$, $I_z=\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\,a^2$.
**10.98.** $2\pi a^3/3$.
**10.99.** 1) $8\sqrt{2}\,a^3/3$. 2) $3a^3$. 3) $2\pi^2(2\pi^2+1)\,a^3$.
**10.101.** 1) $1/3$. 2) $9/8$. 3) $9/2$. 4) $4/5$. 5) $\pi ab$. 6) $27\pi/2$. 7) $3\pi a^2/8$.
**10.102.** $(7\pi+3)\,ab/12$.
**10.103.** 1) $\pi$. 2) $a^2/6$. 3) $4/3$. 4) $8\pi/3$. 5) $a^2$. 6) $5\pi a^2/8$. 7) $(3\sqrt{3}+4\pi)/9\sqrt{3}$.
**10.104.** 1) $3/2$. 2) $4a^2/3$. 3) $1/30$.
**10.106.** 1) $\pi(\mathrm{sh}\,2a-2a)/4$. 2) $9\pi^2$. 3) $8\pi/3$. 4) $32\pi a^3/105$. 5) $\pi^2/2$.
**10.107.** $-8/15$. **10.108.** $-aF_0$. **10.109.** 1) $4/3$. 2) $17/12$.
**10.110.** 1) 22. 2) 106. 3) 64.
**10.111.** 1) 0. 2) $113/3$. 3) $-6\pi a^2$. 4) $-3\pi/2$. 5) $\pi ab$.
**10.112.** 1) а) 4; б) $\pi$; в) 1. 2) а) $-(\pi R+2y_0)\,R$; б) $(\pi R-2y_0)\,R$.
**10.113.** 1) и 2) $\mu(1/r_2-1/r_1)$, где $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2}$, $j=1,\ 2$.
**10.114.** 1), 2) и 3) $\pi/2$. **10.115.** 1) $2\pi$. 2) 0.

**10.116.** 1) и 2) $\lambda\left(x_0^2+y_0^2+z_0^2\right)/2$.

**10.117.** 1) 23. 2) $1/2$. 3) $-4/3$. 4) $\sin(2\pi b)-\pi a^2$. 5) $2\pi a^2$.
6) $(2\sqrt{2}-7/3)\,a^3$. 7) $2\pi R^2/\sqrt{3}$.

**10.118.** $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} rf(r)\,dr$, $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2+z_j^2}$, $j=1,\ 2$.

**10.120.** $-\dfrac{2k\rho_0}{x^2+y^2}(x;\ y;\ 0)$ (прямая совпадает с осью $Oz$).

**10.121.** $(0;\ 0;\ kMmh/(a^2+h^2)^{3/2})$. **10.122.** 1) $RT\ln(p_1/p_2)$.

**10.123.** 1) $\oint\limits_{\partial G} \rho(x;\ y)(v(x;\ y)\,dx - u(x;\ y)\,dy)$. 2) $\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$.

**10.124.** 1) 0 при $r = \sqrt{x^2+y^2} < 1$, $-2\pi\mu_0 \ln r$ при $r > 1$. 2) $\dfrac{\pi}{nr^n}\cos n\varphi$ при $r > 1$, $\dfrac{\pi}{n} r^n \cos n\varphi$ при $r < 1$ (($r$; $\varphi$) — полярные координаты точки ($x$; $y$)). 3) $\dfrac{\pi}{nr^n}\sin n\varphi$ при $r > 1$, $\dfrac{\pi}{n} r^n \sin n\varphi$ при $r < 1$.

**10.125.** 1) 0. 2) $2\pi$.

**10.126.** 1) $\pi r^n \cos n\varphi$ при $r < 1$, $-\pi r^{-n}\cos n\varphi$ при $r > 1$ (($r$; $\varphi$) — полярные координаты точки ($x$; $y$)). 2) $\pi r^n \sin n\varphi$ при $r < 1$, $-\pi r^{-n}\sin n\varphi$ при $r > 1$.

## § 11. Поверхностные интегралы

**11.1.** 1) $7\sqrt{21}/3$. 2) $\pi$. **11.2.** 1) $8\pi R^4/3$. 2) $\pi(1+\sqrt{2})/2$.

**11.3.** 1) $4\pi R^4$. 2) $40a^4$. 3) $2\sqrt{3}\,a^4$. 4) $\pi r\left(r^3 + 2r^2H + rH^2 + \dfrac{2}{3}H^3\right)$.

**11.4.** $(\sqrt{3}-1)(\ln 2 + \sqrt{3}/2)$. **11.5.** 1) 0. 2) $(125\sqrt{5}-1)/420$.

**11.6.** 1) $\pi/\sqrt{2}$. 2) $2\pi\sqrt{2}/3$. **11.7.** 1) $64\sqrt{2}/15$. 2) $29\pi\sqrt{2}/8$.

**11.8.** 1) $\dfrac{4}{3}\pi abc\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$. 2) $4\pi abc$. 3) $4\pi$.

**11.9.** $\dfrac{2\pi R}{a(n-2)}(|a-R|^{2-n} - |a+R|^{2-n})$, $n \neq 2$; $\dfrac{2\pi R}{a}\ln\left|\dfrac{a+R}{a-R}\right|$, $n=2$ если $a \neq 0$; $4\pi R^{2-n}$, если $a = 0$.

**11.10.** $(\pi \sin\alpha \cos^2\alpha)/2$. **11.11.** $\pi^2(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

**11.12.** $\pi(a^2-3)^2/18$, если $|a| \leqslant \sqrt{3}$; 0, если $|a| > \sqrt{3}$.

**11.13.** $\pi(8-5\sqrt{2})R^4/6$.

**11.15.** 1) $3\rho_0 a^3/4$. 2) а) $\rho_0\pi^2R^3$; б) $8\rho_0\pi R^4/3$. 3) $2\pi(1+6\sqrt{3})\rho_0/15$. 4) $8(1+\sqrt{2})\rho_0/15$.

**11.16.** 1) $\sqrt{3}\,\rho_0 a^3/6$. 2) $\pi\rho_0 R^3$. **11.17.** 1) $R/2$. 2) $4R/3\pi$. 3) $3R/8$.

**11.18.** 1) $(R/2;\ R/2;\ R/2)$. 2) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}R;\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}R;\ \dfrac{\sqrt{2}+1}{\pi}R\right)$.
3) $(1/2;\ 0;\ 16/(9\pi))$. 4) $(0;\ 0;\ (307-15\sqrt{5})/310)$.
5) $(0;\ 2(2\sqrt{2}-1)/(3\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})));\ \pi/2)$.

**11.19.** 1) $\rho_0\sqrt{3}/12$. 2) $I_{xy} = \pi\rho_0 rh^2l/2$, $I_{yz} = I_{zx} = \pi\rho_0 r^3 l/4$, где $l = \sqrt{r^2+h^2}$.

**11.20.** 1) $4\pi\dfrac{6\sqrt{3}+1}{15}\rho_0 a^4$. 2) $\pi\rho_0 a(3a^2+2b^2)\sqrt{a^2+b^2}/12$.

**11.21.** 1) $2\pi\rho_0 ma\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2+H^2}}\right)$. 2) $\pi\rho_0 m \ln(b/a)$.

**11.22.** $4\pi\rho_0 mR^2/r^2$, если $r > R$; 0, если $r < R$; $2\pi\rho_0 m$, если $r = R$; $r$ — расстояние точки от центра сферы

**11.23.** 1) $\dfrac{4}{3}\pi\rho_0 ac\sqrt{a^2+c^2}$. 2) $2\pi\rho_0(\sqrt{3}-1/3)a^3$.

**11.24.** 1) $4\pi\mu_0 R^2/a$, если $a \geqslant R$; $4\pi\mu_0 R$, если $a \leqslant R$; $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.
2) $4\pi(\mu_1R_1 + \mu_2R_2)$, если $a \leqslant R_1$; $4\pi\left(\dfrac{\mu_1R_1^2}{a} + \mu_2R_2\right)$, если $R_1 \leqslant a \leqslant R_2$; $\dfrac{4\pi}{a}(\mu_1R_1^2 + \mu_2R_2^2)$, $a \geqslant R_2$; $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

**11.25.** 1) $2\pi\mu_0 R \ln \dfrac{\sqrt{R^2+(H-z)^2}+H-z}{\sqrt{R^2+z^2}-z}$. 2) $\dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{3z}\left(1+\dfrac{2R^2}{5z^2}\right)$, если $|z| \geqslant R$; $\dfrac{4\pi\mu_0 R}{3}\left(1+\dfrac{2z^2}{5R^2}\right)$, если $|z| \leqslant R$.

**11.26.** $-8\pi$. **11.27.** $128/3$. **11.28.** 1) $-1/24$. 2) 0.

**11.29.** $(f_1(a)-f_1(0))\,bc+(f_2(b)-f_2(0))\,ac+(f_3(c)-f_3(0))\,ab$.

**11.30.** 1) $4\pi R^3/3$. 2) 0.

**11.31.** 1) $-2\pi R^7/7$. 2) $-2\pi R^7/105$. **11.32.** $-\pi R^4/4$. **11.33.** $8\pi(a+b+c)\,R^3/3$. **11.34.** $-\pi R^4/2$. **11.35.** $-2\pi/5$.

**11.36.** 1) 0. 2) $4\pi abc/3$. 3) 0. 4) $4\pi ab/c$.

**11.37.** 1) $\pi abc^2/4$. 2) $2\pi(a^2+b^2)\,abc/5$.

**11.38.** $-3\pi H^4/2$. **11.39.** 0. **11.40.** $-\pi r^5/6$.

**11.41.** $\left(\dfrac{\pi H}{8}-\dfrac{r}{3}\right)r^2H$. **11.42.** $-\pi/3$. **11.43.** $-a^4/3$. **11.44.** 1) $3abc/2$. 2) $-3a^3$. **11.45.** 1) $128\pi$. 2) $-48\pi$. 3) $56\pi$. **11.46.** 1) $(a+b+c)\,abc$. 2) $\pi abc^2/2$. **11.47.** 1) $3a^5/20$. 2) $12\pi R^5/5$. **11.48.** 1) 0. 2) $\pi R^6/3$.

**11.50.** 1) $2a^3/9$. 2) $2\pi^2a^2b$. 3) $2\pi(2a^2+b^2)\,|c|/3$. **11.51.** 1) $12\pi$. 2) $\pi(24+7\pi)/2$. **11.52.** 1) $-\pi R^4/2$. 2) $\pi a^4/12$. 3) $-\pi H^4/2$. **11.53.** 0. **11.54.** $-R^5/3$. **11.55.** 0.

**11.57.** 2) $4\pi$, если $(x;\,y;\,z)\in G$; 0, если $(x;\,y;\,z)\notin \overline{G}$.

**11.61.** $-\pi ab$. **11.62.** $-a^3$. **11.63.** 1) $\pi\sqrt{3}\,R^2$. 2) $2\pi$.

**11.64.** $-45a^3/8$. **11.65.** 1) $2\sqrt{2}\,\pi a^2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)$. 2) $2(a+c)\,a\pi$.

**11.66.** $2\pi a^2$. **11.67.** $2\pi ab^2$. **11.68.** $3\pi R^4/2$. **11.69.** $-\pi a^2$. **11.70.** 0. **11.71.** 0. **11.72.** $h^3/3$.

## § 12. Скалярные и векторные поля

**12.1.** а) $x^2-y^2+z^2=1$. б) $x^2-y^2+z^2=-2$.

**12.2.** $x-2=y-2=(z+2)/2$.

**12.3.** 1) Объединения двух плоскостей $(\boldsymbol{a}-C\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{r})=0$, $(\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{r})\neq 0$, $C=\text{const}$. 2) Плоскости $(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{r})=\text{const}$.

**12.4.** $\{u=2\}$ — отрезок $y=z=0$, $-1\leqslant x\leqslant 1$; $\{u=\text{const}>2\}$ — эллипсоиды $\dfrac{4}{u^2}x^2+\dfrac{4}{u^2-4}(y^2+z^2)=1$; $\max u=2\sqrt{1+R^2}$.

**12.5.** Однополостные конусы с вершиной $(0;\,0;\,0)$ и осью $Oz$; $\max u = \cos(\pi/12)=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$, $\min u=\sin(\pi/12)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

**12.6.** 1) $(2;\,2;\,2)$. 2) $(2/3;\,2/3;\,-2/3)$. 3) $(4;\,1;\,1)$. 4) $(0;\,0;\,1)$.

**12.7.** а) $xy=18z^2$. б) $x=2y^2$, $z=1/(3y)$, $y\neq 0$, $y\neq 1$. в) $(2;\,1;\,1/3)$.

**12.8.** 1) 0. 2) $\arccos(-1/3)$. 3) $\arccos(-8/9)$. 4) $\pi/2$.

**12.9.** $1/9$. **12.10.** $\inf|\operatorname{grad} u|=0$, $\sup|\operatorname{grad} u|=1/2$.

**12.15.** 1) $\boldsymbol{r}/r$. 2) $2\boldsymbol{r}$. 3) $-\boldsymbol{r}/r^3$. 4) $\boldsymbol{r}/r^2$. 5) $\boldsymbol{a}$. 6) $[\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b}]$. 7) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{r})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{r})$. 8) $2[\boldsymbol{a},\,[\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{a}]]$.

**12.17.** $\varepsilon/|\operatorname{grad} u(M_0)|$.

**12.21.** 1) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$. 2) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\dfrac{1}{r\cos\psi}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\boldsymbol{e}_\varphi$.

**12.24.** 1) $\cos(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n})/r$. 2) $-(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n})/r^3$. 3) $(\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{a})$. 4) $f'(r)\,(\boldsymbol{n},\,\boldsymbol{r})/r$. **12.25.** $2u/r$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

**12.26.** $(\operatorname{grad} u,\,\operatorname{grad} v)/|\operatorname{grad} v|$.

**12.27.** а) $z=0$; $y=x^2$, $x\in(0;\,1]$. б) $z=1/x$, $y=x^2$, $x\in(0;\,1]$.

**12.28.** 1) $xy=C$. 2) $x^2-y^2=C$. 3) $y=Cx^2$ и $x=0$, $x^2+y^2\neq 0$. 4) $2x^2+y^2=C$, $x\neq 0$.

**12.29.** 1) $(as;\,bs^2;\,cs)$, $s>0$. 2) $(as;\,bs;\,c/s)$, $s>0$. 3) $x^2-y^2=C_1$, $x^2-z^2=C_2$.

**12.31.** 1) $x=as,\ y=b,\ z=cs,\ s>0$. 2) $x=a,\ y^2+z^2=b^2$. 3) $x=as^2$, $y=bs,\ z=c,\ s>0$. 4) $x=as,\ y=b/s,\ z=c,\ s>0$. 5) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=C_1$, $z=C_2$.

**12.32.** 1) $\boldsymbol{r}=s\boldsymbol{r}_0,\ s>0$. 2) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t,\ \boldsymbol{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$. 3) $\boldsymbol{r}=s\boldsymbol{r}_0$, $s>0$. 4) $\boldsymbol{r}^2=\text{const},\ (\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r})=\text{const}$. 5) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{c}t$. 6) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$. 7) $x=as,\ y=bs^2,\ z=cs,\ s>0$.

**12.33.** 1) $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=ct$. 2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2y^2}=4$. 3) $y=x,\ z^2=2(x^2-1)$.

**12.34.** $x^2+y^2=R^2,\ z=C$ (ось $Oz$ совпадает с проводником, а по направлению — с током).

**12.35.** $x^2+y^2=4z^2$.

**12.36.** Четверть тора $8(y^2+z^2)=(x^2+y^2+z^2+1)^2$.

**12.38.** 1) 3. 2) $4r$. 3) $2/r$. 4) $\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. 5) $12xy^2+4x^3-6xz$.

**12.39.** $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$.

**12.40.** 1) $(\operatorname{grad}u)^2+u\operatorname{div}\operatorname{grad}u\equiv(\nabla u)^2+u\,\Delta u$. 2) $(\operatorname{grad}u,\ \operatorname{grad}v)+$ $+u\operatorname{div}\operatorname{grad}v\equiv(\nabla u,\ \nabla v)+u\,\Delta v$.

**12.41.** 1) 6. 2) 0. 3) $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{c})/r$. 4) $rf'(r)+3f(r)$. 5) $f''(r)+2\frac{f'(r)}{r}$. 6) $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{c})f'(r)/r$. 7) 0. 8) $-2(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{r})$.

**12.42.** 1) $u(r)=C/r^3$. 2) $u(r)=C_1/r+C_2$. 3) $u(r)=Cr^{\lambda-3}$.

**12.43.** 0. **12.44.** $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{w}=2\omega$.

**12.46.** $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$.

**12.47.** 1) $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$. 2) $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2a_r)+$ $+\frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(a_\psi\cos\psi)$.

**12.48.** 1) $\frac{1}{r}(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}'(r))$. 2) $\frac{1}{r}(u'(r)(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a})+u(r)(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}'))$.

**12.50.** 1) 0. 2) $\frac{1}{r}[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}]$. 3) $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$. 4) $u'(r)[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}]/r$. 5) 0.

**12.51.** 1) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$. 2) $-\frac{5}{4}\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\frac{5}{2}\boldsymbol{k}$. **12.52** Неверно.

**12.53.** 1) $\pi/2$. 2) $\arccos(3/5)$. **12.54.** 1) $2\boldsymbol{c}$. 2) $3[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{c}]$.

**12.57.** 0. **12.60.** $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)$.

**12.61.** 1) $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z};\ \frac{\partial a_r}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial r};\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)\right)$.

2) $\left(\frac{1}{r\cos\psi}\left(\frac{\partial a_\psi}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\psi}(a_\varphi\cos\psi)\right);\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_r}{\partial\psi}-\frac{\partial}{\partial r}(ra_\psi)\right);\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra_\varphi)-\right.$ $\left.-\frac{1}{r\cos\psi}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}\right)$.

**12.62.** $\frac{1}{r}(u'[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}]+u[\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{a}'])$.

**12.63.** 1) $\Delta u\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$. 2) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+$ $+\frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\cos\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\psi\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)$.

**12.64.** $(0;\ 0;\ 2\omega)$.

**12.68.** 1) $\pi R^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})$. 2) $\pi h^3$. 3) $3\pi h R^2$. 4) $4\pi$. 5) $4\pi R^3 f(R)$.

**12.69.** 1) $5/3$. 2) $1/4$. 3) $2a^4/3$. 4) $-2\pi$. 5) $2\sqrt{3}\,\pi$. 6) 0. 7) $81\pi/8$. 8) $3\pi/16$. 9) $45\pi$. 10) $R^4$. 11) 0.

**12.70.** 1) $24a^5$. 2) 0. 3) $-\pi a^5/4$. 4) $\pi H^3$. 5) $2R^3$. 6) $R^5/3$. 7) $a^2b^2c^2/8$. 8) $16\pi/5$. 9) 0.

**12.71.** $4\pi/\sqrt{\det(a_{ij})}$. **12.72.** 1) $\dfrac{24}{125}\pi\varepsilon^3$. 2) $4\varepsilon^3$.

**12.84.** 1) 0. 2) $4\pi$. **12.85.** $2\pi$. **12.88.** 1) 0. 2) $2\pi$.

**12.90.** 1) $\left(r_2^2 - r_1^2\right)/2$. 2) $r_2 - r_1$. 3) $\left(r_2 - r_1\right)/r_1 r_2$. 4) $\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} uf(u)\,du$. 5) $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$.

**12.91.** 1) $(1 + \ln 3)/2$. 2) $4e - 3 - e^{-2}$. 3) 15.

**12.92.** 1) 5. 2) $-4/3$. 3) 0. **12.93.** 1) $-\pi a^2$. 2) $2\pi ab$.

**12.94.** 1) $4\pi\sqrt{3}/9$. 2) 0. 3) 0. 4) $-4\pi$. 5) 0. 6) $\pi$. **12.95.** 1) $2\pi$. 2) 0. **12.96.** $2\pi$.

**12.97.** 1) $2\omega\pi R^2$. 2) $2\omega\pi R^2 \sin\alpha$. **12.99.** 2) а) $4\pi I$. б) $4\pi I \sin\alpha$.

**12.100.** 1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\pi\varepsilon^2$. 2) $\sqrt{3}\,\pi\varepsilon^2$. **12.103.** 1) Да. 2) Нет. 3) Нет. 4) Да.

**12.104.** 1) Да. 2) Нет. **12.105.** $2I \arccos\left(x/\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

**12.106.** $xy + yz + zx + C$. 2) $\operatorname{arctg}(xyz) + C$. 3) $xy + e^z + C$. 4) $r + C$. 5) $r^3/3 + C$.

**12.107.** $\displaystyle\int_{r_0}^{r} tf(t)\,dt + C$. **12.112.** 1) Потенциально и соленоидально. 2) Потенциально, несоленоидально. **12.113.** 1) Нет. 2) Да. 3) Нет. 4) Да. **12.115.** $C/r^3$. **12.116.** Нет.

**12.118.** 1) $\dfrac{1}{2}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}] + \boldsymbol{b}$ *). 2) $-xy^2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{b}$. 3) $xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b}$. 4) $-xy\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b}$. 5) $-x(x + y^2)\boldsymbol{j} + (x^3 + y^3)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b}$. 6) $-xe^y\boldsymbol{i} - ye^z\boldsymbol{j} - ze^x\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b}$.

**12.120.** $(-I\ln(x^2 + y^2))\boldsymbol{k} + \boldsymbol{b}$. **12.121.** $\dfrac{q}{4\pi r}\boldsymbol{v}$.

## Глава III. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### § 13. Собственные интегралы, зависящие от параметра

**13.2.** 1) 1. 2) 1. 3) $(\ln 3)/2$. 4) $(e - 1)/3$. 5) $-2$.

**13.5.** 1) Нет. 2) Нет. **13.8.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Нет.

**13.10.** $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$. **13.11.** $\pi \arcsin(b/a)$.

**13.12.** 1) $\operatorname{arctg}\dfrac{b - a}{1 + (a + 1)(b + 1)}$. 2) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(b + 1)^2 + 1}{(a + 1)^2 + 1}$.

**13.13.** 1) $I'(\alpha) = (\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1)/\alpha^2$. 2) $I'(\alpha) = (\cos 27\alpha - \cos\alpha)/(3\alpha)$. 3) $I'(\alpha) = \left(e^{4\alpha} - e^{\alpha}\right)/(2\alpha)$. 4) $I'(\alpha) = 2\left(\operatorname{ch} 9\alpha^4 - \operatorname{ch} 4\alpha^4\right)/\alpha$.

**13.14.** 1) $\Phi'(\alpha) = (2\ln(1 + \alpha^2))/\alpha$. 2) $\Phi'(\alpha) = 2(\sin 2\alpha^2 - \sin\alpha^2)/\alpha$.

3) $\displaystyle\Phi'(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \sqrt{1 - x^2}\, e^{\alpha\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \sin\alpha \cdot e^{\alpha|\sin\alpha|} - \cos\alpha \cdot e^{\alpha|\cos\alpha|}$.

---

*) Здесь $\boldsymbol{b}$ — произвольное безвихревое поле

4) $\Phi'(\alpha)=\int\limits_{3\alpha}^{\alpha} x^2 e^{\alpha x^2}\,dx+2\alpha e^{\alpha^5}-3e^{9\alpha^3}$. 5) $\Phi'(\alpha)=4\alpha^3\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 e^{\alpha^4 x^2}\,dx+$ $+\cos\alpha\cdot e^{\alpha^4\sin^2\alpha}+\sin\alpha\cdot e^{\alpha^4\cos^2\alpha}$. 6) $\Phi'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1+\alpha^2 e^{2\alpha}}{1+\alpha^2 e^{-2\alpha}}+$ $+\ln\left(1+2\alpha^2\operatorname{ch}2\alpha+\alpha^4\right)$. 7) $\Phi'(\alpha)=4\operatorname{sh}\alpha+\frac{2}{\alpha^2}\left(\operatorname{arctg}\left(\alpha^2 e^{-\alpha}\right)-\operatorname{arctg}\left(\alpha^2 e^{\alpha}\right)\right)+$ $+(\alpha+1)e^{\alpha}\ln\left(1+\alpha^4 e^{2\alpha}\right)-(\alpha-1)e^{-\alpha}\ln\left(1+\alpha^4 e^{-2\alpha}\right)$. 8) $\Phi'(\alpha)=$ $=\frac{2\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ch}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)+\operatorname{ch}\alpha\cdot\ln\left(\operatorname{ch}^2\alpha+\alpha^2\right)-$ $-\operatorname{sh}\alpha\cdot\ln\left(\operatorname{ch}^2\alpha+\alpha^2+1\right)$.

**13.15.** Нет. **13.16.** $F'(x)=(f(x+a)-f(x-a))/2a$.

**13.17.** $\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}+\frac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$.

**13.18.** 1) $\pi\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{2}$. 2) 0. 3) $2\pi\arcsin\alpha$. 4) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha\cdot\ln(1+|\alpha|)$.

**13.20.** $F''(\alpha)=3f(\alpha)+2\alpha f'(\alpha)$.

**13.21.** $F''(\alpha)=\begin{cases}2f(\alpha), & \text{если } \alpha\in(a;\ b),\\ 0, & \text{если } \alpha\notin[a;\ b].\end{cases}$

**13.22.** $F''(\alpha)=(f(\alpha+2h)-2f(\alpha+h)+f(\alpha))/h^2$.

**13.31.** 1) $\varphi(x)=\sin x$. 2) $\varphi(x)=\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\lambda}\right)$. 3) $\varphi(x)=2\left(\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\lambda}\right)-1\right)/\lambda$.

**13.32.** $F''_{xy}=x\left(2-3y^2\right)f(xy)+\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y\left(1-y^2\right)f'(xy)$.

## § 14. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

**14.7.** 1) Сходится неравномерно. 2) Сходится неравномерно. 3) Сходится неравномерно. 4) Сходится равномерно. 5) Сходится неравномерно. 6) Сходится неравномерно.

**14.8.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится равномерно. 4) Сходится неравномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится неравномерно.

**14.14.** 1) Сходится равномерно. 2) Сходится равномерно. 3) Сходится неравномерно. 4) Сходится неравномерно. 5) Сходится равномерно. 6) Сходится равномерно.

**14.17.** 1) Непрерывна. 2) Непрерывна. 3) Непрерывна. 4) Непрерывна. 5) Непрерывна. 6) Непрерывна при $\alpha\neq\pm1$; $\alpha=-1$ и $\alpha=1$ — точки разрыва.

**14.18.** 1) Непрерывна при $\alpha\neq0$; $\alpha=0$ — точка разрыва. 2) Непрерывна. 3) Непрерывна. 4) Непрерывна.

**14.22.** Нет.

## § 15. Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов

**15.1.** 1) $0{,}5\ln(b/a)$. 2) $0{,}5\ln(a/b)$. 3) $0{,}5\ln(b/a)$. 4) $\ln((a+1)/(b+1))$.

**15.2.** 1) $\pi|\alpha|/2$. 2) $\pi/2$. 3) $\pi/4$. 4) $\pi/6$. 5) $\pi/4$. 6) $\pi/4$.

**15.3.** 1) $\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha$. 2) $\pi/4$. 3) $3\pi\alpha|\alpha|/8$. 4) $3\pi/16$. 5) $3\pi/16$. 6) $5\pi/32$.

**15.4.** 1) $5\pi/32$. 2) $\pi\alpha|\alpha|/2$. 3) $\pi|\alpha|/4$. 4) $(|\beta|-|\alpha|)\pi/2$. 5) $-\pi(\alpha+\beta)/2$. 6) $(2-\alpha)\pi/4$, если $\alpha<2$; 0, если $\alpha\geqslant2$.

**15.5.** 1) $\frac{1}{2}\ln((\alpha+\beta)/|\alpha-\beta|)$. 2) $\alpha\ln\alpha$. 3) $\frac{3}{8}\ln(\alpha/\beta)$. 4) $\alpha(\ln\alpha-1)$. 5) $(|\alpha+\beta|-|\alpha-\beta|)\pi/4$. 6) 0.

**15.6.** 1) $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$. 2) $\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$. 3) $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\lambda}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\lambda}$.

4) $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}$. 5) $\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. 6) $\frac{\pi}{\beta}(\alpha\beta-\ln(1+\alpha\beta))$.

**15.9.** $\frac{(-1)^m m!}{\alpha^{m+1}}$. **15.10.** $\frac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!\,a^{2n+1}}$. **15.15.** 1) $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2|\alpha|}\right)$.

2) $\frac{\pi}{2}|\beta|-\sqrt{\pi\alpha}$. 3) $\pi|\alpha|^3/3$. 4) $\frac{\pi}{4}\left(2|\alpha|-1+e^{-2|\alpha|}\right)$.

5) $\frac{\pi}{4}(1+|\alpha|)e^{-|\alpha|}$. 6) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}\cdot e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$

**15.16.** 1) $\frac{\pi}{4}(\operatorname{sign}(\alpha+\beta)+\operatorname{sign}(\alpha-\beta))$. 2) $\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$.

3) $\frac{\beta}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\beta^2/(4\alpha)}$. 4) $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{d^{2n}}{d\alpha^{2n}}\left(e^{-\alpha^2}\right)$.

5) $\beta\operatorname{arctg}\frac{2\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{4}\ln\left(1+\frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$. 6) $-(\arcsin\alpha)^2$.

**15.17.** 1) $\pi\left(\sqrt{1-\alpha^2}-1\right)$. 2) $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. 3) $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$.

4) $\frac{\pi}{2}\left(1+\alpha-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. 5) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$. 6) $\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha\beta+1)$.

7) $2\ln\beta+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\pi+2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\ln\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

**15.18.** 1) $\frac{\pi^2}{8}-\frac{(\arccos\alpha)^2}{2}$. 2) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$.

3) $2\pi[(\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\alpha\ln\alpha-\beta\ln\beta]$.

4) $\frac{\pi}{2}[(\alpha^2-\beta^2)\ln(\alpha+\beta)-\alpha^2\ln\alpha+\beta^2\ln\beta+\alpha\beta]$. 5) $\sqrt{\pi}(|\beta|-|\alpha|)$.

6) $\frac{2\pi}{3}[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$.

**15.19.** 1) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\right)$.

2) $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{\lambda}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{\lambda}+\frac{\lambda}{4}\ln\frac{\lambda^2+(\alpha-\beta)^2}{\lambda^2+(\alpha+\beta)^2}$.

3) $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. 4) $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. 5) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\beta^2}{a^2+\alpha^2}$.

**15.23.** 1) Нет. 2) Нет.

## § 16. Эйлеровы и некоторые другие интегралы

**16.6.** 1) $\Gamma(p)/\alpha^p$. 2) $\frac{1}{\alpha}\Gamma(1/\alpha)$. 3) $\frac{1}{\beta}\Gamma((\alpha+1)/\beta)$. 4) $2^{n/2-1}a^{-n/2}\Gamma(n/2)$.

5) $\Gamma(\alpha)/\beta^\alpha$. 6) $\Gamma(p+1)$. 7) $\Gamma(p)$. 8) $\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha-1/2)}{2\Gamma(\alpha)}$.

**16.7.** 1) $2\pi/\sqrt{3}$. 2) $\pi\sqrt{2}$. 3) $\pi\sqrt{2}$. 4) $\pi/\sin(2\pi/5)$. 5) $2\pi/(9\sqrt{3})$. 6) $\pi/\sin(2\pi/5)$.

**16.8.** 1) $\pi\sqrt{5}/100$. 2) $\pi/(4\sqrt{6})$. 3) $2\pi/\sqrt[6]{108}$. 4) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

5) $\pi\sqrt{2}/32$. 6) $3\pi 2^{-23/4}$.

**16.9.** 1) $2\pi\sqrt{3}/9$. 2) $\pi\sqrt{2}/4$. 3) $\pi a^4/16$. 4) $-\pi^2\sqrt{2}/4$. 5) $\pi/(\beta\sin(\alpha\pi/\beta))$. 6) $2^{\alpha-3}\pi\alpha(1-\alpha)/\sin\alpha\pi$.

**16.10.** 1) 0. 2) 0. 3) $\pi\ln|a|/(2|a|)$. 4) $\pi^2\sin(\alpha\pi/2)/(4\cos^2(\alpha\pi/2))$. 5) $\dfrac{\pi 2^{2/3}}{3}(\sqrt{3}\ln 2+\pi)$. 6. $2\pi^2/3$.

**16.11.** 1) $(4\pi\ln 2)/3$. 2) $-(\pi\ln 3)/2\sqrt{3}$. 3) $\dfrac{\pi}{2|a|}(\ln^2|a|+\pi^2/4)$. 4) $\dfrac{\pi^3}{8}\cdot\dfrac{1+\sin^2(\alpha\pi/2)}{\cos^3(\alpha\pi/2)}$. 5) $2\pi^2/27$. 6) $3\pi^3/(32\sqrt{2})$. 7) $-(\pi^2\cos\alpha\pi)/\sin^2\alpha\pi$. 8) $\pi^3(1+\cos^2\alpha\pi)/\sin^3\alpha\pi$.

**16.12.** 1) $\pi(1-\alpha)/\sin\alpha\pi$. 2) $\pi p/(4\sin(\pi p/2))$. 3) $\pi\alpha/\sin\alpha\pi$. 4) $2\pi\sqrt{3}/27$. 5) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n-2)}{3^n n!}$. 6) $2\pi\sqrt{3}/27$. 7) $\pi/(2\sin\alpha\pi)$. 8) $3\pi/512$. 9) $\pi/(2\sin\alpha\pi)$.

**16.13.** 1) $\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{\alpha};\,1-\dfrac{1}{n}\right)$. 2) $\dfrac{1}{\beta}\mathrm{B}\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta};\,\gamma+1\right)$. 3) $a^{\alpha+\beta-1}\mathrm{B}(\alpha;\beta)$.

4) $\mathrm{B}(\beta-\alpha;\,\alpha)$. 5) $\dfrac{1}{3}\mathrm{B}\left(\alpha+\dfrac{1}{3};\,\dfrac{2}{3}\right)$.

6) $\dfrac{a^{-p}}{\beta}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{(\alpha+1)/\beta}\mathrm{B}\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta};\,p-\dfrac{\alpha+1}{\beta}\right)$.

**16.14.** 1) $2^{p-1}\mathrm{B}((p-1)/2;\,(p+1)/2)$. 2) $\mathrm{B}(\alpha;\,\beta)$. 3) $\mathrm{B}(\alpha;\,\beta)/(2a^{2\alpha}b^{2\beta})$. 4) $\dfrac{\mathrm{B}(\alpha/2;\,\alpha/2)}{2(ab)^\alpha}$. 5) $\dfrac{1}{2}\mathrm{B}((\alpha+1)/2;\,(\beta+1)/2)$. 6) $\dfrac{2^{\alpha-1}}{(1-\beta^2)^{\alpha/2}}\mathrm{B}(\alpha/2;\,\alpha/2)$. 7) $2^{\alpha+\beta-2}\mathrm{B}(\alpha;\,\beta)$. 8) $\dfrac{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}{(a+c)^{\beta+1}(b+c)^{\alpha+1}}\mathrm{B}(\alpha+1;\,\beta+1)$.

**16.16.** $\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\Gamma(p+1)}{\alpha^{p+1}}\right)$.

**16.18.** 1) $\dfrac{\pi\alpha^{p-1}}{2\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}$. 2) $\dfrac{\pi\alpha^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin(p\pi/2)}$.

**16.19.** 1) $\pi\operatorname{ctg}\pi p$. 2) $\dfrac{\pi}{2\beta}\operatorname{tg}(\alpha\pi/2\beta)$. 3) $\ln\sqrt{2\pi}$. 4) $\ln\sqrt{2\pi}+a(\ln a-1)$. 5) $\dfrac{1}{\pi}(1+\ln(\pi/2))$. 6) $1/(4n)$.

## § 17. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

**17.1.** 1) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\tau y}{y}\cos xy\,dy$. 2) $f(x)=\dfrac{2}{\pi a}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos ay}{y^2}\cos xy\,dy$.

3) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(y(x-a))-\sin(y(x-b))}{y}\,dy$.

4) $f(x)=\dfrac{1}{|a|}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-|a|y}\cos xy\,dy$.

**17.2.** 1) $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-|a|y}\sin xy\,dy$. 2) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\pi y}{1-y^2}\sin xy\,dy$.

3) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\pi y/2)}{1-y^2}\cos xy\,dy$. 4) $f(x)=\frac{2\omega}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(2\pi ny/\omega)}{y^2-\omega^2}\sin xy\,dy$.

**17.3.** 1) $f(x)=\frac{4\alpha\beta}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{y\sin xy}{[(y-\beta)^2+\alpha^2][(y+\beta)^2+\alpha^2]}\,dy$.

2) $f(x)=\frac{\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(y-\beta)^2+\alpha^2}+\frac{1}{(y+\beta)^2+\alpha^2}\right]\cos xy\,dy$.

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-y^2/4}\cos xy\,dy$. 4) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}ye^{-y^2/4}\sin xy\,dy$.

**17.4.** 1) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+y^2}}\sin(xy+\varphi)\,dy,\quad \varphi=\operatorname{arctg}(\alpha/y)$.

2) $f(x)=\frac{\omega}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\alpha^2+\omega^2-y^2)\cos xy+2\alpha y\sin xy}{(\alpha^2-\omega^2+y^2)^2+4\alpha^2\omega^2}\,dy$.

3) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi ny/2)\sin(x-\pi n/2)\,y}{y^2-1}\,dy$, если $n$ четное,

$f(x)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos(\pi ny/2)\cos(x-\pi n/2)\,y}{y^2-1}\,dy$, если $n$ нечетное.

**17.5.** 1) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\pi y}{1-y^2}\sin xy\,dy$.

2) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2y-3\sin(2y/3)}{y^2}\sin xy\,dy$.

**17.6.** 1) $f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\alpha^2+y^2}\,dy$.

2) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos xy}{y}\,dy$.

**17.7.** 1) $F[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin y}{y}$. 2) $F[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\pi y}{1-y}$.

3) $F[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y\sin\pi y}{1-y^2}$. 4) $F[f]=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\pi y}{1-y^2}$.

5) $F[f]=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}\,(y-1)}(1+e^{-i\pi y})$. 6) $F[f]=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{y(e^{-i\pi y}+1)}{y^2-1}$.

**17.8.** 1) $F[f] = -i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\frac{\alpha y}{(y^2+\alpha^2)^2}$. 2) $F[f] = e^{-y^2/2}$. 3) $F[f] = e^{-(y^2+\alpha^2)/2}\operatorname{ch}\alpha y$. 4) $F[f] = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{y^2}{(y^2+1)^2}$.

5) $F[f] = 2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y\,\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$. 6) $F[f] = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2y^3}{(1+y^2)^2}$.

**17.9.** 1) $F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi(1-y^2)\cos\pi y + 2y\sin\pi y}{(1-y^2)^2}$. 2) $F[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin 2y - \sin y}{y}$. 3) $F[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2y\cos y + (y^2-2)\sin y}{y^3}$.

4) $F[f] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2\pi\cos\pi y\,(1-y^4) + \sin\pi y\,[6y+2y^3-\pi^2(y-2y^3+y^5)]}{(1-y^2)^3}$.

5) $F[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{y^2\sin 2y + 2\sin y - 2y\cos y}{y^3}$.

**17.17.** 1) $\varphi(y) = e^{-y}$, $y \geqslant 0$. 2) $\varphi(y) = 2y/\pi(1+y^2)$, $y \geqslant 0$.

# Глава IV. ВВЕДЕНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## § 18. Метрические пространства

**18.6.** Да. **18.8.** Нет: не выполняется первое свойство метрики.
**18.10.** Нет. **18.11.** Да. **18.12.** Нет. **18.13.** Да. **18.14.** Да. **18.15.** Нет. **18.23.** Нет. **18.27.** Может. **18.28.** Нет, нет. **18.32.** Неверно.

**18.33.** 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$. 2) $(a_1; \ldots; a_n; \ldots)$ — ограниченная последовательность.

**18.34.** Может. **18.49.** Может.

**18.50.** 1) Да. 2) Нет. Множество внутренних точек пересечения множеств содержится в пересечении множеств их внутренних точек.

**18.51.** 1) Нет. 2) Нет. Объединение множеств внутренних точек множеств содержится в множестве внутренних точек объединения множеств.

**18.52.** 1) Да. 2) Нет. $\bigcup\limits_{\alpha} \overline{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha}$. **18.53.** 1) Да. 2) Нет. $\overline{\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha} \subset \bigcap\limits_{\alpha} \overline{A}_\alpha$. **18.68.** 1) Да. 2) Нет. **18.100.** Да. **18.101.** Да, да, да.

**18.107.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. **18.111.** $l_\infty^{(0)}$. **18.112.** Да. **18.113.** Да, нет. **18.114.** Нет. **18.130.** Да. **18.140.** Да. **18.166.** Нет. **18.172.** 1) Нет. 2) Нет. **18.174.** 1) Да. 2) Да. **18.175.** Нет. **18.176.** Нет. **18.177.** 1) Да. 2) Нет. 3) Да. **18.178.** 1) Да. 2) Нет. 3) Да. **18.179.** 1) Да. 2) Нет. **18.182.** Не будет. **18.183.** Да. **18.204.** Да.

**18.208.** 1) При $-1 < a < b < 1$ будет, а при $-1 \in [a;\ b]$ и $1 \in [a;\ b]$ не будет; 3), 5) Не будут, а 4), 6) будут предкомпактными; 2) при $|a| < 1$ будет, а при $|a| \geqslant 1$ не будет предкомпактным.

**18.209.** 1) и 5) не будут, а 2), 3) и 4) будут компактами.

## § 19. Нормированные и полунормированные пространства

**19.77.** 1), 4), 5) Да. 2), 3) Нет. **19.78.** 1), 4), 5) Да. 2, 3) Нет. **19.85.** 1), 3), 5) Нет. 2), 4), 6) Да. **19.86.** $p \leqslant q$. **19.101.** Нет. **19.131.** Нет. **19.140.** 1) —3) Да. 4), 5) Нет. **19.141.** 1) $1-\cos 1$. 2) 1. 3) 1.

**19.142.** 1) — 3) $\|A\| = 1$. 4) $\|A\| = \|\varphi\|_{C[0;\ 1]}$. 5) $\|A\| = 2/\pi$. 6) $\|A\| = e - 1$.

**19.143.** 1), 2) $\|A\| = 1$. **19.145.** Для всех $\alpha > 0$: $\|A\| = 1$. **19.146.** Последовательность $(\alpha_1; \ldots; \alpha_n; \ldots)$ ограничена, $\|A\| = \sup\limits_n |\alpha_n|$.

**19.174.** $(f'(x))(h(t)) = \varphi(t)h(t)$.

**19.175.** 1) $f'(\cos t) = \cos\sin t$. 2) $f'(0) = b$. 3) $f'(\ln t) = t^{t+1}$.

**19.176.** $$(f'(x_0))(h(t)) = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F\big(t; x_0(t); x_0'(t)\big)}{\partial x} h(t) + \frac{\partial F\big(t; x_0(t); x_0'(t)\big)}{\partial x'} h'(t)\right] dt, \quad h \in \overset{\circ}{C}{}^1[a; b].$$

**19.194.** $(f'(t))\,h = h'' + h\cos t$, $(f^{(k)}(t))\,h^k = \sin\left(t + \frac{k\pi}{2}\right) h^k$, $k \geqslant 2$,
$$f(t+h) = \sin t + h'' + h\cos t + \sum_{k=2}^{n} \frac{\sin\left(t + \frac{k\pi}{2}\right)}{k!} h^k + o(h^n), \quad h \to 0.$$

## § 20. Гильбертовы пространства

**20.19.** $\pi/2, \pi/3, \pi/6$. **20.36.** 1) Да. 2) Нет. **20.37.** 1) $\cos\varphi = \sqrt{6}/\pi$. 2) $\cos\varphi = \sqrt{3/(\pi^2+3)}$.

**20.56.** 1) $y_0(t) = 1$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 3t^2 - 1$, $y_3(t) = 5t^3 - 3t$. 2) $y_0(t) = 1$, $y_1(t) = 2t - 1$, $y_2(t) = 6t^2 - 6t + 1$, $y_3(t) = 20t^3 - 30t^2 + 12t - 1$.

**20.75.** Нет. **20.95.** Да (например, когда $E$ — плотное в $X$ множество). **20.98.** Нет, нет.

**20.99.** $Y^\perp = \{x(t) \mid x(t) = 0$ для всех $t \in [-1; 0]\}$; нет. **20.100.** $Y^\perp$ состоит из одномерного подпространства всех постоянных функций.

## § 21. Топологические пространства. Обобщенные функции

**21.22.** 1) Стационарные с некоторого номера. 2) Сходящиеся в обычном смысле. 3) Сходящиеся к пределу слева. 4) и 5) Стремящиеся к $+\infty$. 6) Последовательности $(x_n)$, у элементов $x_n$ которых, начиная с некоторого номера, постоянные целые части.

**21.60.** 0, 0. **21.71.** $y' = \delta(x - x_0)$. **21.72.** $y' = -\varphi'(x_0)$. **21.73.** $y' = \operatorname{sign} x$.

**21.74.** $y' = \theta$. **21.75.** $y' = \mathscr{P}\frac{1}{x}$. **21.76.** $(y'; \varphi) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx$.

**21.77.** $(y'; \varphi) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\,\theta(1-x)}{x}\,dx$. **21.78.** $\big(\delta^{(n)}; \varphi\big) = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

**21.79.** $$\left(x_+^k\right)^n = \begin{cases} k(k-1)\ldots(k-n+1)\,x^{k-n} & \text{при } n \leqslant k, \\ k!\,\delta^{(n-k-1)}(x) & \text{при } n > k. \end{cases}$$

**21.106.** $F(\delta) = 1/\sqrt{2\pi}$, $F^{-1}(\delta) = \sqrt{2\pi}$. **21.113.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(ix)^n$.

**21.114.** $\sqrt{2\pi}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k i^k \delta^{(k)}$. **21.115.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iay}$. **21.116.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos ay$.

**21.117.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin ay$. **21.118.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{i}{y - i0}$.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость/Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — М.: Наука, 1984.
2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды./Под ред. Л. Д. Кудрявцева. — М.: Наука, 1986.
3. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1983.
4. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1981.
5. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — 9-е изд. — М.: Наука, 1977.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2, 3. — М.: Наука, 1969.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. 1. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1982; ч. 2. — 2-е изд. — М.: Наука, 1980.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. — М.: Наука, 1979.
9. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1. — М.: Наука, 1981; ч. 2. — М.: Наука, 1984.
10. Рудин У. Основы математического анализа. — 2-е изд. — М.: Мир, 1976.
11. Полиа Г., Сеге Г. — Задачи и теоремы анализа. Ч. 1, 2. — М.: Наука, 1978.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
13. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
14. Сборник задач по математике для втузов/Под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. — Т. 1. — 2-е изд. — М.: Наука, 1986; т. 2 — 2-е изд.— М.: Наука, 1986; т. 3. — М.: Наука, 1984.
15. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Задачник.— 2-е изд., — М.: Наука, 1987.
16. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1982.
17. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. — Сборник задач по высшей математике. Т. 1. — М.: Физматгиз, 1958; т. 2. — М.: Физматгиз, 1959.
18. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1985.
19. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — М.: Наука, 1984.
20. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1984.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962.

# СПИСОК ФОРМУЛ

**I. Производная.**

1. *Таблица производных элементарных функций.*

$$(\text{const})' = 0; \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x;$$
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \qquad (\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2};$$
$$(a^x)' = a^x \ln a; \qquad (\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2};$$
$$(e^x)' = e^x; \qquad (\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2);$$
$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a); \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2);$$
$$(\ln x)' = 1/x; \qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$
$$(\sin x)' = \cos x; \qquad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad (\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x; \qquad (\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x.$$

2. *Формулы для производных $n$-го порядка.*

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ \ldots\ (\alpha-(n-1))\, x^{\alpha-n};$$
$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n;$$
$$(e^x)^{(n)} = e^x;$$
$$(1/(x+\alpha))^{(n)} = (-1)^n\, n!/(x+\alpha)^{n+1};$$
$$(\ln|x+\alpha|)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!/(x+\alpha)^n;$$
$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin(\alpha x + n\pi/2);$$
$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos(\alpha x + n\pi/2).$$

*Формула Лейбница*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

где $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ \ldots\ (n-(k-1))}{k!}$, $k = 2, \ldots, n$.

3. *Формула Тейлора.* Для функции $f(x)$, определенной в окрестности точки $x_0$ и имеющей $n$-ю производную $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, верна в этой окрестности формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

где $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$ (остаточный член в форме Пеано) или

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

(остаточный член в форме Лагранжа).

## II. Интегрирование функций одного переменного.

1. *Таблица интегралов.*

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0, \; a \neq 1;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C, \qquad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C, \quad \alpha \neq 0.$$

## III. Ряды.

1. *Разложения в ряд Тейлора основных элементарных функций.*

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad x\in\mathbb{R};$$

$$\operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad x\in\mathbb{R};$$

$$\operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad x\in\mathbb{R};$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in\mathbb{R};$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\qquad x\in\mathbb{R};$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,\qquad x\in(-1;\ 1];$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n,\qquad x\in(-1;\ 1)$$

$$\text{при }\alpha\neq 0,\quad \alpha\notin\mathbb{N};$$

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in[-1;\ 1];$$

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!\,(2n+1)}x^{2n+1},\qquad x\in[-1;\ 1].$$

2. *Тригонометрический ряд Фурье.* Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, за исключением, быть может, конечного количества точек разрыва первого рода, то в каждой точке $x\in(-\pi;\ \pi)$ тригонометрический ряд Фурье

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

где

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

сходится к значению $(f(x+0)+f(x-0))/2$ (в частности, в точке непрерывности функции $f$ — к ее значению в этой точке), а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ к значению $(f(-\pi+0)+f(\pi-0))/2$.

**IV. Градиент, дивергенция, ротор.**

Дифференциальный символ $\nabla$ — набла (символ, оператор Гамильтона), в декартовой системе координат определяют формулой

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Градиентом дифференцируемой функции (скалярного поля) $f(x;\ y;\ z)$ называют вектор $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$ с координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial y};\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Для дифференцируемого векторного поля $\boldsymbol{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$ в декартовой системе координат по следующим формулам определяют дивергенцию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv (\nabla,\ \boldsymbol{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

ротор

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \equiv [\nabla,\ \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

**V. Интегрирование функций нескольких переменных.**

1. *Замена переменных в кратном интеграле.* Замену переменных в кратном интеграле производят по формуле

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_U f(\varphi(u))\,|J(u)|\,du,$$

где $x = \varphi(u)$ — непрерывно дифференцируемое отображение $\bar{U}$ на $\bar{X}$, взаимно однозначное на $U$,

$$J(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

— якобиан этого отображения. В частности, для полярных координат на плоскости

$$\iint\limits_X f(x;\ y)\,dx\,dy = \iint\limits_U f(r\cos\varphi;\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi,$$

для цилиндрических координат в пространстве

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad J = r,$$

и

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi, \quad J = r^2\cos\psi$$

для сферических координат.

2. *Основные интегральные формулы.*

Формула Грина

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$

верна для плоской области $G$ с кусочно-гладкой границей $\Gamma$ и функций $P$, $Q$ непрерывных вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на $\bar{G}$. Контур $\Gamma$ ориентирован так, что при его обходе область $G$ остается слева.

Формула Гаусса — Остроградского

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

верна для ограниченной области $G$ с кусочно-гладкой границей $S$, функций $P$, $Q$, $R$ непрерывных в $\overline{G}$ вместе с $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$; здесь $S$ — граница $G$, ориентированная внешней нормалью $\boldsymbol{n}$.

Формула Стокса

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

верна, если $S$ ориентированная кусочно-гладкая поверхность, ограниченная согласованно ориентированным контуром $L$, функции $P$, $Q$, $R$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области $G \supset S$ (согласованность ориентации контура $L$ означает наглядно, что наблюдатель, движущийся по контуру, видит из конца нормали $\boldsymbol{n}$ к $S$ эту поверхность слева).

**VI. Некоторые интегралы, зависящие от параметра.**

1. *Интеграл Дирихле*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

*Интеграл Пуассона*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

2. *Эйлеровы интегралы.*

Гамма-функция

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx, \quad s > 0,$$

бета-функция

$$\mathrm{B}(p;\ q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \quad p > 0,\ q > 0,$$

имеют следующие основные свойства:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1,$$

в частности, $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{B}(p;\ q) = \mathrm{B}(q;\ p),$$

$$\mathrm{B}(p;\ q+1) = \frac{q}{p+q}\,\mathrm{B}(p;\ q),$$

$$\mathrm{B}(p;\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \quad q > 0$$

(формула Эйлера).